Р. Б. РАЙХМИСТ

ЗАДАЧНИК ПО МАТЕМАТИКЕ

ДЛЯ УЧАЩИХСЯ СРЕДНЕЙ ШКОЛЫ И ПОСТУПАЮЩИХ В ВУЗЫ

С РЕШЕНИЯМИ И ОТВЕТАМИ

УДК 373.167.1:51
ББК 22.1
Р18

Райхмист Р. Б.
Р 18 Задачник по математике для учащихся средней школы и поступающих в вузы (с решениями и ответами): Учеб. пособие. – М.: Московский Лицей, 2007. – 304 с.: ил. ISBN 978-5-7611-0264-4

В книге содержится 3690 задач. Перед каждой темой приводится краткая сводка основных понятий и формул. В каждом разделе предлагаются наборы задач, объединенных общей идеей решения или вычислительно-преобразовательным приемом. В конце книги приведены решения задач (по одной из каждого набора), а также ответы ко всем задачам.

Подписано в печать с готовых диапозитивов 17.08.07.
Формат 60×84¹/₁₆. Печать офсетная. Бумага газетная. Усл. печ. л. 17,67.
Тираж 5000. Заказ 5581.

Издательство «Московский Лицей»
129337, г. Москва, Ярославское шоссе, д. 2, корп. 1
Тел./факс (495) 188-33-10

Отпечатано в ГУП «Брянское областное полиграфическое объединение»
241019, г. Брянск, пр-т Ст. Димитрова, 40
Тел.: (4832) 41-46-64, 41-44-23, 41-80-67

ISBN 978-5-7611-0264-4

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящая книга предназначена для тех, кто учится и для тех, кто учит.

Школьнику задачник предоставляет возможность самостоятельно восполнить имеющиеся у него пробелы в математическом образовании. Преподаватель может использовать книгу для проведения контрольных работ, выдачи домашних заданий и для работы в классе, а также для индивидуальной работы с учащимися.

В книге содержатся задачи, распределенные по группам разной степени сложности и охватывающие все разделы школьного курса. В пределах каждой темы предлагаются наборы из десяти однотипных задач, объединенных либо общей идеей решения, либо вычислительно-преобразовательным приемом, либо применением той или иной теоремы. В конце книги приводятся подробные решения задач (по одной задаче из каждого набора), а к остальным задачам — указания и ответы. Перед каждой темой дается краткая сводка теорем и формул.

Схема самостоятельной работы школьника над книгой представляется следующим образом. Просмотрев необходимые формулы и теоремы, он приступает к решению простейших задач (сложность «0»); если же какая-то задача не получается, то он обращается к решению аналогичной задачи, приведенному в конце книги. Из наборов по 10 задач он может решить столько задач, сколько ему требуется для закрепления нужного навыка. Далее он переходит к решению более сложных задач (сложности «1», «2» и «3») в пределах данной темы.

Автор надеется, что задачник будет полезен как для школьников и учащихся лицеев, гимназий, колледжей, техникумов, так и для поступающих в вузы.

Автор

ЛАТИНСКИЙ АЛФАВИТ

A a	а	*N n*	эн
B b	бэ	*O o*	о
C c	цэ	*P p*	пэ
D d	дэ	*Q q*	ку
E e	е	*R r*	эр
F f	эф	*S s*	эс
G g	ге (жє)	*T t*	тэ
H h	ха (аш)	*U u*	у
I i	и	*V v*	вэ
J j	йот (жи)	*W w*	дубль — вэ
K k	ка	*X x*	икс
L l	эль	*Y y*	игрек
M m	эм	*Z z*	зет

ГРЕЧЕСКИЙ АЛФАВИТ

Α α	альфа	Ν ν	ню
Β β	бэта	Ξ ξ	кси
Γ γ	гамма	Ο ο	омикрон
Δ δ	дельта	Π π	пи
Ε ε	эпсилон	Ρ ρ	ро
Ζ ζ	дзета	Σ σ	сигма
Η η	эта	Τ τ	тау
Θ θ	тэта	Φ φ	фи
Ι ι	иота	Χ χ	хи
Κ κ	каппа	Υ υ	ипсилон
Λ λ	ламбда	Ψ ψ	пси
Μ μ	мю	Ω ω	омега

Раздел I

АРИФМЕТИЧЕСКИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

§ 1. АРИФМЕТИЧЕСКИЕ ДЕЙСТВИЯ

Сложность «0»

В задачах **1.001—1.010** произвести вычисления:

1.001. $\left(26{,}7-13\frac{1}{5}\right):1{,}8+0{,}125\left(1{,}88+2\frac{3}{25}\right)+22\cdot\frac{3}{5{,}5}$

1.002. $\left(4\frac{1}{8}-0{,}004\cdot 300\right):29{,}25+\left(4\frac{1}{5}-3\frac{1}{2}\right):70$

1.003. $\left(6{,}3+3\left(35\frac{17}{42}-4\frac{6}{35}\right)\right)\left(0{,}7-\frac{1}{12}\right)\cdot 6$

1.004. $\left(\frac{1}{2}+0{,}8-1\frac{1}{2}:2{,}5\right):\left(3+4\frac{3}{25}-0{,}12\right)$

1.005. $14\frac{2}{5}:\left(7\frac{1}{12}+2{,}15-5\frac{19}{30}\right)-\left(6:3\frac{1}{13}\right)\left(8\frac{8}{15}:8\right)$

1.006. $\left(3\frac{4}{9}:\left(2\frac{1}{36}-1\frac{20}{27}\right)\right):(2{,}08:10{,}4+2{,}5\cdot 0{,}4)$

1.007. $(13\frac{1}{10}-12{,}05):\frac{7{,}2}{0{,}48\cdot 11{,}7}+(1{,}25\cdot 0{,}4+18{,}54:1{,}8):(0{,}43+17{,}57)$

1.008. $(16{,}32:1{,}6+2{,}5\cdot 0{,}08):(25{,}44+0{,}56)+\frac{6{,}4\cdot 1{,}11}{9{,}6}:\left(74\frac{1}{25}-73{,}04\right)$

1.009. $\left(7{,}5\cdot 0{,}028:\left(\frac{3}{4}-0{,}36:0{,}6\right)-\left(\frac{1}{15}+\frac{3}{8}+0{,}725\right):1\frac{1}{6}\right):$
$:\left(4{,}5-3\frac{4}{7}\right):\frac{28}{65}$

1.010. $\left(\left(4{,}07:\frac{1}{20}-23{,}01\cdot 0{,}06\right):4+0{,}0703\cdot\frac{1}{2}\right)\times$
$\times\left(\left(7{,}3745:3{,}01-1\frac{1}{4}\right)\cdot 1\frac{1}{50}+13\frac{3}{500}\right):20{,}04$.

Сложность «0»

В задачах **1.011—1.020** произвести вычисления:

1.011. $\left(\frac{41}{18}-\frac{17}{36}\right)\cdot\frac{18}{65}+\left(\frac{8}{7}-\frac{23}{49}\right):\frac{99}{49}+\frac{7}{6}$

1.012. $\frac{10}{16}+\frac{3}{2}\cdot\left(\frac{17}{4}:17\right)+3,75:\frac{5}{6}$

1.013. $\left(\frac{14}{15}+\frac{5}{2}+0,3\right)\cdot\frac{8}{7}\cdot0,75+\frac{5}{10}$

1.014. $\left(\frac{1}{2}+0,125-\frac{1}{6}\right)\cdot\left(6,4:\frac{80}{3}\right)+\frac{1}{8}$

1.015. $\frac{13\cdot86}{450}:0,26+\frac{57\cdot14}{27}-\frac{10}{9}$

1.016. $\left(\frac{92}{85}+\frac{104}{17}\right)\cdot\frac{5}{18}+\left(\frac{1}{3}+\frac{7}{6}\right)-\frac{5}{2}$

1.017. $4\left(\frac{17}{5}-\frac{47}{40}\right)+12,5:6,25+3$

1.018. $\left(2,75-\frac{3}{2}\right)+\left(\frac{5}{2}-1,875\right):0,125-\frac{1}{4}$

1.019. $(1,5+3,75)\cdot0,6-\left(\frac{3}{2}+\frac{14}{4}\right)\cdot\frac{4}{25}-1,5$

1.020. $\frac{217}{31}:1,75-\left(3,5:\frac{5}{4}+\frac{7}{2}\right)+3,4:\frac{17}{8}$

Сложность «0»

В задачах **1.021—1.030** произвести вычисления:

1.021. $\frac{\left(2,3+5:\frac{25}{4}\right)\cdot7}{0,8\cdot0,125+6,9}$

1.022. $\frac{\left(\frac{16}{5}-1,7\right):0,05}{\left(\frac{33}{20}-1,5\right):1,5}$

1.023. $\frac{1,01\cdot0,2-0,004}{\left(\frac{95}{63}-\frac{13}{21}\right)\cdot18\cdot0,125}$

1.024. $\frac{\left(\frac{29}{35}-\frac{3}{7}\right)\cdot49}{\left(\frac{135}{24}-\frac{47}{18}\right)\cdot\frac{36}{31}}$

1.025. $\frac{(4,3-0,64:1,6)\cdot0,25}{\frac{25}{16}:2,5+0,375\cdot\frac{1}{3}}$

1.026. $\frac{\left(\frac{29}{27}-\frac{1}{3}\cdot\frac{4}{9}\right)\cdot0,6}{\left(\frac{41}{18}-\frac{17}{36}\right)\cdot\frac{1}{65}+0,25}$

1.027. $\frac{(10-1,1:0,23)\cdot0,46+1,8}{\left(2,75-\frac{27\cdot51}{17\cdot54}\right)\cdot0,8}$

1.028. $\frac{\left((1,2:36)+\frac{6}{5}\cdot0,25\right)\cdot9}{\left(\frac{128}{45}-\frac{1}{15}\right):\frac{125}{9}}$

1.029. $\frac{\left(1,8+\frac{19}{20}\right):0,5}{\frac{7}{40}:0,35+\frac{7}{3}:\frac{217}{31}}$

$$\textbf{1.030.}\ \frac{1:1,6+\left(\frac{17}{4}:17\right):\frac{2}{3}+\left(\frac{7}{2}-\frac{1}{4}\right)\cdot\frac{20}{13}}{\frac{15}{4}:\frac{3}{2}+\left(\frac{8}{7}-\frac{23}{49}\right):\frac{22}{147}-2}$$

Сложность «0»

В задачах **1.031—1.040** найти x из пропорции:

$$\textbf{1.031.}\ \frac{9\left(\frac{108}{75}+0,56\right)}{5x}=\frac{0,25:\frac{5}{6}-\frac{4}{25}}{\frac{33}{2}-\frac{124}{9}}$$

$$\textbf{1.032.}\ \frac{\left(\frac{94}{50}+\frac{53}{25}\right)\cdot\frac{3}{16}}{\frac{5}{72}-\frac{13}{18}\cdot\frac{1}{26}}=\frac{x}{\frac{2}{15}+7,7:\frac{99}{4}}$$

$$\textbf{1.033.}\ \frac{x}{\left(\frac{10}{3}\cdot1,2+\frac{8}{3}\right)\cdot0,375}=\frac{\frac{50}{11}\cdot0,22-\frac{24}{25}}{\left(0,4-\frac{3}{20}\right)\cdot0,8}$$

$$\textbf{1.034.}\ \frac{\frac{13}{6}-\frac{53}{6}\cdot0,2}{7x}=\frac{\left(\frac{15}{2}-6,75\right)\cdot\frac{2}{3}}{\left(\frac{15}{2}+4,75\right):0,5}$$

$$\textbf{1.035.}\ \frac{\frac{70}{6}+\frac{31}{15}}{\frac{63}{60}+4,1}=\frac{\frac{186}{25}-0,48}{x}$$

$$\textbf{1.036.}\ \frac{\frac{23}{3}+\frac{39}{2}:4,5}{\frac{3}{5}:0,1+4,2}=\frac{2x}{\frac{21}{6}+\frac{61}{2}}$$

$$\textbf{1.037.}\ \frac{x}{\frac{0,1:0,05}{90}+\frac{2}{9}}=\frac{14+\frac{7}{4}}{\frac{25}{2}-\frac{184}{15}}$$

$$\textbf{1.038.}\ \frac{17,7-2,6:\frac{4}{3}}{x}=\frac{5-\frac{4}{5}\cdot0,625}{\left(\frac{23}{5}+\frac{7}{3}\right):\frac{26}{15}}$$

$$\textbf{1.039.}\ \frac{0,75-\frac{1}{6}}{0,3+\frac{8}{15}}=\frac{x}{\left(\frac{8}{30}+\frac{10}{75}\right):0,04}$$

$$\textbf{1.040.}\ \frac{11-\frac{19}{2}}{\left(1,25+\frac{5}{6}\right):\frac{1}{3}}=\frac{\left(6,8-\frac{16}{5}\right):\frac{35}{6}}{x}$$

Сложность «0»

В задачах **1.041—1.050** разделить данное число на части в указанном отношении:

1.041. 18,3 обратно пропорционально числам 2; 3; 5; 1.

1.042. 150 пропорционально числам 8; $\frac{1}{3}$; $\frac{5}{3}$.

1.043. 37,4 пропорционально числам $11\frac{2}{3}$; $\frac{1}{7}$; 6.

1.044. 434 обратно пропорционально числам 2; 3; 5.

1.045. 2400 пропорционально числам $11\frac{1}{5}$; 2; 3; $3\frac{4}{5}$.

1.046. 190 обратно пропорционально числам 3; $\frac{1}{2}$; 5.

1.047. 92,5 пропорционально числам 7; 5; $\frac{1}{3}$.

1.048. 172,8 обратно пропорционально числам 4; $\frac{5}{7}$; $1\frac{1}{3}$.

1.049. 135 пропорционально числам 6; $\frac{2}{3}$; $\frac{5}{3}$.

1.050. 76,5 обратно пропорционально числам $\frac{24}{7}$; 6; 4.

Сложность «0»

В задачах **1.051—1.060** представить периодическую дробь в виде обыкновенной:

1.051. 0,(7) **1.052.** 0,2(1)

1.053. 0,(51) **1.054.** 2,(91)

1.055. 28,1(51) **1.056.** 4,4(3)

1.057. 0,42(5) **1.058.** 0,55(3)

1.059. 0,(88) **1.060.** 25,(32)

§ 2. ПРОЦЕНТЫ

Сложность «0»

В задачах **1.061—1.070** вычислить:

1.061. 4% от 75 **1.062.** 15% от 84

1.063. 25% от 340 **1.064.** 32% от 12,5

1.065. $18\frac{1}{3}$% от 330 **1.066.** $\frac{1}{3}$% от 360

1.067. 160% от 82,85 **1.068.** 250% от 5,12

1.069. 7% от 18,4 **1.070.** 180% от 31,2

Сложность «0»

В задачах **1.071—1.080** найти число, если:

1.071. 8% его равны 24. **1.072.** 140% его равны 182.

1.073. 45% его равны 225.

1.074. 3,5% его равны 21.

1.075. 3% его равны 1,5.

1.076. 750% его равны 450.

1.077. 7% его равны 182.

1.078. 60% его равны 23.

1.079. $1\frac{2}{3}$% его равны 4,75.

1.080. 13% его равны 91.

Сложность «0»

1.081. Сколько процентов соли содержится в растворе, если в 200 г раствора содержится 150 г воды?

1.082. Товар с перевозкой стоил 3900 тыс. руб. Сколько процентов от стоимости товара с перевозкой составляют расходы по перевозке, если стоимость товара равна 3510 тыс. руб.?

1.083. В цехе работают 250 человек, из них 120 не являются спортсменами. Сколько процентов от общего числа составляют спортсмены?

1.084. Товар до снижения цены стоил 18 тыс. руб., а после снижения — 14,4 тыс. руб. На сколько процентов снизили цену на товар?

1.085. За смену токарь обточил 81 деталь при норме 45 деталей. На сколько процентов он перевыполнил план?

1.086. Цистерна вмещает 40 т бензина. После заливки в нее некоторого количества бензина осталось незаполненным 6,5% вместимости цистерны. Сколько бензина залили в цистерну?

1.087. Постройка дома стоила 98 млн. руб., Из них 65% заплатили за материал, а остальное — за работу. Сколько заплатили за работу?

1.088. После снижения цен на 5% стоимость 1 м материи стала равной 38 тыс. руб. Сколько стоил 1 м материи до снижения?

1.089. На соревнованиях спортсмены завоевали 96 медалей, из них 35 бронзовых и 31 серебряную. Сколько процентов от общего числа составили золотые медали?

1.090. Число дождливых дней в июне обычно равно 12. Сколько процентов недождливых дней в июне?

Сложность «0»

В задачах **1.091—1.100** найти число, если:

1.091. 5% его составляют 23% от 15,5.

1.092. 4,5% его составляют 12% от 45.

1.093. 4% его составляют 31% от 16,4.

1.094. 5,5% его составляют 17% от 11.

1.095. 3% его составляют 18% от 27,3.

1.096. 6,5% его составляют 34% от 32,5.

1.097. 6% его составляют 13% от 36,6.

1.098. 3,5% его составляют 18% от 7.

1.099. 7% его составляют 15% от 42,7.

1.100. 11% его составляют 14,5% от 22.

Сложность «0»

1.101. Кофе при жарении теряет 12% своей массы. Сколько свежего кофе надо взять, чтобы получить $14\frac{2}{25}$ кг жареного кофе?

1.102. Яблоки при сушке теряют 85% своей массы. Сколько надо взять свежих яблок, чтобы приготовить $10\frac{1}{2}$ кг сушеных?

1.103. Магнитный железняк содержит 70% чистого железа. Сколько нужно взять магнитного железняка, чтобы в нем содержалось $50\frac{7}{20}$ т чистого железа?

1.104. Из чайного листа получают 4,2% чая. Сколько нужно взять чайного листа, чтобы получить $46\frac{1}{5}$ кг чая?

1.105. В сплаве олова и меди медь составляет 85%. Сколько нужно взять сплава, чтобы в нем содержалось $1\frac{13}{32}$ кг олова?

1.106. При перегонке нефти получается 30% керосина. Сколько нужно взять нефти, чтобы получить $18\frac{3}{4}$ т керосина?

1.107. В свекле содержится 21% сахара. Сколько нужно взять свеклы, чтобы в ней содержалось 7,413 т сахара?

1.108. Цветы при сушке теряют 72% своей массы. Сколько килограммов цветов надо взять, чтобы приготовить из них $12\frac{1}{4}$ кг сухих цветов?

1.109. При обработке отливки в стружку идет 13% массы отливки. Какова должна быть масса отливки, если масса обработанной детали равна $10\frac{7}{8}$ кг?

1.110. Морская вода содержит 5% соли. Сколько нужно взять морской воды, чтобы получить при выпаривании $17\frac{1}{4}$ кг соли?

Сложность «0»

1.111. На сколько процентов увеличится произведение двух чисел, если одно из них увеличить на 30%, а другое — на 20%?

1.112. На сколько процентов уменьшится произведение двух чисел, если одно из них уменьшить на 25%, а другое — на 50%?

1.113. На сколько процентов уменьшится дробь, если ее числитель уменьшить на 70%, а знаменатель — на 25%?

1.114. На сколько процентов уменьшится дробь, если ее числитель уменьшить на 20%, а знаменатель увеличить на 60%?

1.115. На сколько процентов уменьшится произведение двух чисел, если одно из них увеличить, а другое уменьшить на 30%?

1.116. На сколько процентов уменьшится дробь, если ее числитель увеличить на 20%, а знаменатель — на 50%?

1.117. На сколько процентов увеличится произведение двух чисел, если первое увеличить на 50%, а второе уменьшить на 20%?

1.118. На сколько процентов увеличится дробь, если ее числитель уменьшить на 10%, а знаменатель — на 50%?

1.119. На сколько процентов увеличится дробь, если ее числитель увеличить на 60%, а знаменатель уменьшить на 20%?

1.120. На сколько процентов увеличится дробь, если ее числитель уменьшить на 30%, а знаменатель — на 50%?

§ 3. ДЕЙСТВИЯ СО СТЕПЕНЯМИ И РАДИКАЛАМИ

1°. Свойства степеней ($a > 0$, $b > 0$, x, y — действительные числа):

$$a^0 = 1; \qquad a^{-1} = \frac{1}{a};$$

$$a^x \cdot a^y = a^{x+y}; \qquad \frac{a^x}{a^y} = a^{x-y};$$

$$(a^x)^y = a^{xy}; \qquad a^{-x} = \frac{1}{a^x};$$

$$(ab)^x = a^x b^x; \qquad \left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}$$

2°. Свойства арифметических корней ($a \geq 0$, $b \geq 0$, n и k — натуральные числа, большие единицы):

$$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}; \qquad \sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} \quad (b \neq 0);$$

$$(\sqrt[n]{a})^k = \sqrt[n]{a^k}; \qquad \sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[nk]{a};$$

$$\sqrt[n]{a} = \sqrt[nk]{a^k}; \qquad (\sqrt[n]{a})^n = a \quad (a \geq 0);$$

$$(\sqrt[n]{a})^k = a^{k/n} \quad (n \geq 2); \qquad a^{1/n} = \sqrt[n]{a} \quad (n \geq 2);$$

$$\sqrt{a^2} = |a| = \begin{cases} a \text{ при } a \geq 0, \\ -a \text{ при } a < 0. \end{cases}$$

Сложность «0»

В задачах **1.121—1.130** вычислить:

1.121. $\left(8-6\cdot\left(\frac{5}{18}\right)^{0}\right)^{-2}$

1.122. $\left(2^{-3}+\left(\frac{3}{4}\right)^{-4}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{2}\right):\left(\left(\frac{1}{6}\right)^{0}-12\cdot 3^{-3}\right)\cdot 18$

1.123. $\left(\left(\frac{2}{3}\right)^{-1}-\left(\frac{4}{3}\right)^{-1}\right)^{-1}\cdot 3$

1.124. $\left(3\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}+4^{-1}\right):\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}+\left(\frac{1}{5}\right)^{-1}\right)$

1.125. $\left(\left(\frac{4}{5}\right)^{0}-(0,1)^{-1}\right):\left(\left(\frac{3}{8}\right)^{-1}\left(\frac{3}{2}\right)^{3}-\left(\frac{1}{3}\right)^{-1}\right)$

1.126. $\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}-5\cdot 2^{-2}+\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}\right):(3^{0}+2^{-2})$

1.127. $\left(\left(\frac{3}{4}\right)^{2}-4^{-2}\right):\left(\left(\frac{5}{6}\right)^{0}+\left(\frac{3}{2}\right)^{-1}\right)$

1.128. $\left(\left(\frac{5}{6}\right)^{-2}-\left(\frac{3}{4}\right)^{0}\right):\left(\left(\frac{1}{11}\right)^{-1}\right)$

1.129. $\left(\left((61\cdot 64^{-1}-8^{-2})^{-1}\right):\frac{2}{15}\right)^{-1}$

1.130. $\left(\left(\left(\frac{1}{7}\right)^{-2}-40\left(\frac{5}{3}\right)^{0}\right)^{-1}\right):9^{-2}$

Сложность «0»

В задачах **1.131—1.140** вычислить:

1.131. $(2^{-1/2})^{-6}-(0,125)^{-1}+(2^{1/2})^{0}$

1.132. $\left((3^{-1/4})^{8}+\left(\frac{3}{2}\right)^{0}\right)^{-2}$

1.133. $2\,(-3)^{-2}+\left(\left(\frac{3}{5}\right)^{2/3}\right)^{-3}+(-3)^{0}$

1.134. $\left(33\cdot(4^{1/4})^{-12}+\frac{(-2)^{-5}}{2}\right)^{-3}$

1.135. $((6^{4/3})^{3/2}+(0,25)^{-1})\cdot(-0,5)^{3}$

1.136. $((2^{-10})^{-1/2}-7\cdot(-0,5)^{-2})^{-1}$

1.137. $\left(630\cdot\left(\frac{1}{0,2}\right)^{-1}-\left(7^{-4/5}\right)^{-5/2}\right)\cdot(-11)^{-1}$

1.138. $\left(4\cdot\left(4^{3/2}\right)^{-4/3}+3\cdot\left(\frac{1}{0,125}\right)^{-1}\right)^{-1}$

1.139. $\left(-2^{-5}+9\cdot\left(2^{-15}\right)^{1/3}+\left(\sqrt{2}\right)^{0}\right)^{-1}$ **1.140.** $\left(\left(5^{7/4}\right)^{8/7}-\frac{\left(2^{-3}\right)^{-2}}{32}\right)\cdot(46)^{-1}$

Сложность «0»

В задачах **1.141—1.150** вычислить:

1.141. $\dfrac{3\cdot 2^{7}\cdot 4^{5}\cdot\left(\frac{1}{32}\right)^{2}+\frac{2^{5}}{4}}{245}$ **1.142.** $\dfrac{\left(\frac{7}{16}\right)^{2}\cdot 56^{4}\cdot\left(\frac{1}{49}\right)^{2}-160}{\left(\frac{1}{13}\right)^{-1}}$

1.143. $\dfrac{\left(\frac{1}{9}\right)^{-3}\cdot 81^{2}\cdot\left(\frac{1}{9}\right)^{4}+\left(\frac{1}{6}\right)^{-4}}{225}$ **1.144.** $\dfrac{\left(\frac{1}{14}\right)^{6}\cdot 42^{8}\cdot\left(\frac{1}{9}\right)^{4}-180}{\left(\frac{3}{2}\right)^{-4}}$

1.145. $\dfrac{\left(\frac{1}{12}\right)^{2}\cdot 4^{8}\cdot\left(\frac{3}{16}\right)^{2}-0,1^{-2}}{15\cdot 0,5^{-1}}$ **1.146.** $\dfrac{\left(\frac{2}{9}\right)^{6}\cdot 18^{7}\cdot\frac{7}{128}-160}{\left(\frac{1}{11}\right)^{-2}}$

1.147. $\dfrac{\left(\frac{1}{15}\right)^{3}\cdot\left(\frac{1}{75}\right)^{-4}\cdot\frac{9}{125}+0,2^{-2}}{17,5}$ **1.148.** $\dfrac{\left(\frac{1}{24}\right)^{3}\cdot 27^{-2}\cdot\left(\frac{1}{12}\right)^{-9}-80}{0,75^{-2}}$

1.149. $\dfrac{\left(\frac{1}{18}\right)^{5}\cdot 64\cdot\left(\frac{1}{27}\right)^{-4}+\left(\frac{1}{6}\right)^{-2}}{\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}}$ **1.150.** $\dfrac{\left(\frac{7}{6}\right)^{4}\cdot 18^{8}\cdot\frac{42^{-3}}{3^{5}}-6^{3}}{51}$

Сложность «0»

В задачах **1.151—1.160** вычислить:

1.151. $\sqrt[3]{\frac{12}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{63^2-27^2}{5}}}$

1.152. $\sqrt[3]{\frac{12}{25}\sqrt{\frac{244}{15\,(38^2-23^2)}}}$

1.153. $\sqrt{2+\sqrt{\frac{68\,(32^2-15^2)}{47}}}$

1.154. $\sqrt[3]{29+\sqrt{(27^2-22^2)\cdot 5}}$

1.155. $\sqrt{\frac{75}{4}\sqrt{\frac{228}{66^2-48^2}}}$

1.156. $\sqrt[3]{\frac{23}{64}+\sqrt{\frac{5}{48^2-32^2}}}$

1.157. $\sqrt{90+\sqrt{\frac{31}{83}\,(57^2-26^2)}}$

1.158. $\sqrt[3]{\frac{400\sqrt{23^2-17^2}}{\sqrt{0,6}}}$

1.159. $\sqrt{\frac{9}{16}\sqrt{\frac{33^2-25^2}{29}}}$

1.160. $\sqrt{58+\sqrt{\frac{44^2-26^2}{35}}}$

Сложность «1»

В задачах **1.161—1.170** вычислить:

1.161. $\dfrac{(10^{1/3}-7^{1/3})\left(\sqrt[3]{100}+\sqrt[3]{70}+\sqrt[3]{49}\right)}{\left(3\sqrt{16}-3\sqrt{6}\right)^2\left(\frac{\sqrt{16}}{3}+\frac{\sqrt{6}}{3}\right)^2}$

1.162. $\dfrac{\left(7\sqrt{27}-7\sqrt{8}\right)(27^{1/2}+8^{1/2})}{27^2-64}$

1.163. $\dfrac{\left(3\cdot\sqrt[3]{7}+3\cdot\sqrt[3]{3}\right)(49^{1/3}-21^{1/3}+9^{1/3})}{\left(\sqrt{15}-\sqrt{10}\right)^2\left(2\sqrt{15}+2\sqrt{10}\right)^2}$

1.164. $\dfrac{(5^{1/3}+2^{1/3})\left(\sqrt[3]{25}-\sqrt[3]{10}+\sqrt[3]{4}\right)}{0,25}$

1.165. $\dfrac{(7^{1/2}-6^{1/2})^3\left(\sqrt{7}+\sqrt{6}\right)^3}{0,125}$

1.166. $\dfrac{13,75\cdot 1,2}{\left(\sqrt{69}-\sqrt{3}\right)(69^{1/2}+3^{1/2})}$

1.167. $\dfrac{(9^{1/3}+7^{1/3})\left(\sqrt[3]{81}-\sqrt[3]{63}+\sqrt[3]{49}\right)}{(14/3)-(1/2)}$

1.168. $\dfrac{5-1,6\cdot(5/8)}{\left(4\cdot\sqrt[3]{5}-4\sqrt[3]{3}\right)(25^{1/3}+15^{1/3}+9^{1/3})}$

1.169. $\dfrac{3\,(15^{1/2}-7^{1/2})^2\left(\sqrt{15}+\sqrt{7}\right)^2}{3+(9/13)}$

1.170. $\dfrac{\left(\sqrt{14}-\sqrt{6}\right)^3(14^{1/2}+6^{1/2})^3}{(5^{1/3}+3^{1/3})\left(16\cdot\sqrt[3]{25}-16\cdot\sqrt[3]{15}+16\cdot\sqrt[3]{9}\right)}$

Сложность «I»

В задачах 1.171—1.180 вычислить:

1.171. $\dfrac{\left(12^{1/2}-\sqrt{8}\right)\cdot 3^{1/2}}{\left(36^{1/2}-2\sqrt{6}\right)(2+(2/9))}$

1.172. $\dfrac{\left(54^{1/3}+\sqrt[3]{81}\right)\left(18^{1/2}-\sqrt{2}\right)^2}{5\cdot 2^{1/3}+5\cdot\sqrt[3]{3}}$

1.173. $\dfrac{\left(4\sqrt{7}+4\cdot 2^{1/2}\right)^2}{18+2\cdot 56^{1/2}}$

1.174. $\dfrac{\left(\sqrt[3]{5}-9^{1/3}\right)\left(32^{1/2}-\sqrt{8}\right)^2}{\sqrt[3]{40}-72^{1/3}}$

1.175. $\dfrac{\left(3^{1/2}-\sqrt{2}\right)72^{1/2}}{3\left(2\sqrt{6}-16^{1/2}\right)(64^{1/3}+1)}$

1.176. $\dfrac{\left(3^{1/3}+\sqrt[3]{7}\right)\left(18^{1/2}+\sqrt{2}\right)^2}{24^{1/3}+\sqrt[3]{56}}$

1.177. $\dfrac{(7+40^{1/2})(1,5+0,75)}{\left(\sqrt{18}+45^{1/2}\right)^2}$

1.178. $\dfrac{\left(8^{1/2}+\sqrt{2}\right)^2\left(4^{1/3}-\sqrt[3]{2}\right)}{32^{1/3}-\sqrt[3]{16}}$

1.179. $\dfrac{11\left(6^{1/2}-\sqrt{3}\right)^2}{12\,(3-2\cdot 2^{1/2})}$

1.180. $\dfrac{(8+56^{1/2})(1,5+0,25)}{\left(\sqrt{7}+8^{1/2}\right)\sqrt{2}}$

Сложность «I»

В задачах 1.181—1.190 вычислить:

1.181. $\dfrac{\left(\sqrt{17}-2\right)\left(\sqrt{34}+\sqrt{8}+\sqrt{17}+2\right)}{\sqrt{2}+1}$

1.182. $\dfrac{\left(\sqrt{15}+\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{60}-\sqrt{12}-\sqrt{45}+3\right)}{2-\sqrt{3}}$

1.183. $\dfrac{\left(\sqrt{14}+1\right)\left(7\sqrt{2}-\sqrt{7}+2\sqrt{14}-2\right)}{\sqrt{28}+4}$

1.184. $\dfrac{\left(\sqrt{19}+\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{38}+\sqrt{57}-\sqrt{6}-2\right)}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$

1.185. $\dfrac{\left(\sqrt{40}-2\right)\left(\sqrt{130}+\sqrt{13}+5\sqrt{10}+5\right)}{\sqrt{13}+5}$

1.186. $\dfrac{\left(\sqrt{21}+4\right)\left(\sqrt{168}-4\sqrt{8}-7\sqrt{3}+4\sqrt{7}\right)}{\sqrt{8}-\sqrt{7}}$

1.187. $\dfrac{\left(\sqrt{7}-\sqrt{15}\right)\left(7\sqrt{2}+\sqrt{210}+\sqrt{35}+5\sqrt{3}\right)}{\sqrt{14}+\sqrt{5}}$

1.188. $\dfrac{\left(2\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{24}+3+\sqrt{16}+\sqrt{6}\right)}{\sqrt{12}+2\sqrt{2}}$

1.189. $\dfrac{\left(\sqrt{5}-\sqrt{11}\right)\left(\sqrt{33}+\sqrt{15}-\sqrt{22}-\sqrt{10}\right)}{\sqrt{75}-\sqrt{50}}$

1.190. $\dfrac{\left(1-\sqrt{20}\right)\left(\sqrt{7}+\sqrt{140}+\sqrt{2}+\sqrt{40}\right)}{\sqrt{28}+2\sqrt{2}}$

Сложность «2»

В задачах **1.191—1.200** вычислить:

1.191. $\left(4\sqrt{7}-\sqrt{119}-4\sqrt{3}+\sqrt{51}\right)\left(4\sqrt{7}+\sqrt{119}+4\sqrt{3}+\sqrt{51}\right)$

1.192. $\left(3\sqrt{3}+2\sqrt{7}+\sqrt{21}+6\right)\left(3\sqrt{3}+2\sqrt{7}-\sqrt{21}-6\right)$

1.193. $\left(5\sqrt{3}+2\sqrt{30}-2\sqrt{20}-5\sqrt{2}\right)\left(5\sqrt{3}-2\sqrt{30}-2\sqrt{20}+5\sqrt{2}\right)$

1.194. $\left(4\sqrt{5}-4-\sqrt{55}+\sqrt{11}\right)\left(4\sqrt{5}+4+\sqrt{55}+\sqrt{11}\right)$

1.195. $\left(9\sqrt{2}+3\sqrt{5}-6\sqrt{3}-\sqrt{30}\right)\left(9\sqrt{2}-3\sqrt{5}+6\sqrt{3}-\sqrt{30}\right)$

1.196. $\left(2\sqrt{30}+\sqrt{10}+5\sqrt{3}+4\right)\left(2\sqrt{30}+\sqrt{10}-5\sqrt{3}-4\right)$

1.197. $\left(2\sqrt{66}-\sqrt{253}+12\sqrt{2}-2\sqrt{69}\right)\left(2\sqrt{66}+\sqrt{253}-12\sqrt{2}-2\sqrt{69}\right)$

1.198. $\left(\sqrt{65}+\sqrt{14}-\sqrt{91}-\sqrt{10}\right)\left(\sqrt{65}+\sqrt{14}+\sqrt{91}+\sqrt{10}\right)$

1.199. $\left(\sqrt{57}+3\sqrt{6}+\sqrt{38}+6\right)\left(\sqrt{57}-3\sqrt{6}-\sqrt{38}+6\right)$

1.200. $\left(4\sqrt{6}+\sqrt{39}+2\sqrt{26}+6\right)\left(4\sqrt{6}+\sqrt{39}-2\sqrt{26}-6\right)$

Сложность «2»

В задачах **1.201—1.210** вычислить:

1.201. $\left(\sqrt{21}-2\right)\sqrt{25+2\sqrt{84}}$

1.202. $\sqrt{\left(\sqrt{97}+4\right)\sqrt{113-8\sqrt{97}}}$

1.203. $\left(9-\sqrt{83}\right)\sqrt{18\sqrt{83}+164}$

1.204. $\left(\sqrt{33}-2\right)\sqrt{37+2\sqrt{132}}$

1.205. $\left(10-\sqrt{140}\right)\sqrt{60+10\sqrt{35}}$

1.206. $\left(\sqrt{28}-\sqrt{12}\right)\sqrt{10+\sqrt{84}}$

1.207. $\left(4\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)\sqrt{50+\sqrt{384}}$

1.208. $\left(\sqrt{3}-\sqrt{17}\right)\sqrt{\sqrt{204}+20}$

1.209. $\left(2\sqrt{6}+\sqrt{11}\right)\sqrt{35-2\sqrt{264}}$

1.210. $\left(5-3\sqrt{2}\right)\sqrt{43+5\sqrt{72}}$

Сложность «2»

В задачах **1.211—1.220** найти x, если:

1.211. $a \circ b=\frac{ab}{a+b}$ и $2 \circ x=3 \circ 4$

1.212. $a \circ b=\frac{a+b}{a-b}$ и $3 \circ x=2 \circ 4$

1.213. $a \circ b=\frac{a}{b}+1$ и $x \circ 4=3 \circ 2$

1.214. $a \circ b=\frac{a-b}{ab}$ и $x \circ 2=5 \circ 2$

1.215. $a \circ b=a+\frac{1}{b}$ и $x \circ 2=2 \circ 3$

1.216. $a \circ b=\frac{a-b}{ab}$ и $2 \circ x=4 \circ \frac{1}{2}$

1.217. $a \circ b=\frac{2ab}{a-2b}$ и $3 \circ x=2 \circ \frac{1}{2}$

1.218. $a \circ b=\frac{a-2b}{2a+b}$ и $x \circ \frac{1}{2}=\frac{1}{2} \circ 4$

1.219. $a \circ b=\frac{2a+3b}{a-b}$ и $x \circ 1=2 \circ 1$

1.220. $a \circ b=\frac{a}{a+b}$ и $1 \circ x=2 \circ 3$

Раздел II

АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

§ 4. МНОГОЧЛЕНЫ

1°. Формулы сокращенного умножения:

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b);$$
$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2;$$
$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2;$$
$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3;$$
$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3;$$
$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2);$$
$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

2°. Тождественные преобразования многочленов. Два многочлена от одного неизвестного равны тождественно (т.е. равны при всех значениях неизвестного) тогда и только тогда, когда равны коэффициенты при одинаковых степенях неизвестного.

В частности:

1) $$a_0 + a_1x \equiv b_0 + b_1x \Leftrightarrow \begin{cases} a_0 = b_0 \\ a_1 = b_1 \end{cases}$$

2) $$a_0 + a_1x + a_2x^2 \equiv b_0 + b_1x + b_2x^2 \Leftrightarrow \begin{cases} a_0 = b_0 \\ a_1 = b_1 \\ a_2 = b_2 \end{cases}$$

3) $$a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 \equiv b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3 \Leftrightarrow \begin{cases} a_0 = b_0 \\ a_1 = b_1 \\ a_2 = b_2 \\ a_3 = b_3 \end{cases}$$

Сложность «0»

В задачах **2.001—2.010** выполнить умножение и привести подобные члены:

2.001. $(a + 5)(a^2 - 5a + 25)$

2.002. $(2b - 1)(1 + 2b + 4b^2)$

2.003. $(a + b)(a^2 + b^2) - (a^3 + b^3)$

2.004. $(7c^2 + 2)(-49c^4 + 14c^2 - 4)$

2.005. $(3d^3 - 4)(9d^6 + 12d^3 + 16)$

2.006. $(10x - 3y)(100x^2 + 30xy + 9y^2)$

2.007. $a^3 - (a - 4)(a^2 + 3a + 12) - a(a + 3)$

2.008. $(x + 2)(x^2 - 2x + 4) - (x^2 - 3x)(x + 3)$

2.009. $(1 + x + y)(1 - (x + y))$

2.010. $(x + 2y - 2(x + y))(x^2 - (x^2 + y))$

Сложность «0»

В задачах **2.011—2.020** разложить на множители:

2.011. $5a(2x - 3) - 3x(2x - 3) + (3 - 2x)$

2.012. $135a^{12}x^8 + 90a^{10}x^{11} - 36a^6x^{16}$

2.013. $72a^5x^4 - 54a^3x^5 + 36a^2x^6$

2.014. $-56c^7x^{10} + 42c^5x^{16} - 70c^4x^{20}$

2.015. $132x^9y^7 + 165x^8y^5 - 99x^5y^4$

2.016. $195p^6x^5 - 91p^5x^6 + 221p^3x^{10}$

2.017. $288c^{13}x^5 - 126c^{10}x^8 - 198c^7x^{10}$

2.018. $-399b^4y^{10} - 114b^3y^{15} + 95b^2y^{20}$

2.019. $621a^{12}z^9 + 135a^{10}z^{12} + 108a^8z^{15}$

2.020. $30a^2t^2 + 5az^3 - 25tz^2 - 6a^3tz$

Сложность «0»

В задачах **2.021—2.030.** вставить нужные числа вместо символов $\otimes$ и $\Diamond$:

2.021. $(\otimes x + 3)^2 = 4x + \Diamond x + 9$

2.022. $(3x + \otimes)^2 = 9x^2 + \frac{1}{2}x + \Diamond$

2.023. $\left(\frac{1}{2}x - \otimes\right)^2 = \frac{1}{4}x^2 - 3x + \Diamond$

2.024. $\left(\frac{1}{3}x + \otimes y\right)^2 = \frac{1}{9}x^2 + \frac{1}{3}xy + \Diamond y^2$

2.025. $(\otimes x^2 - 3)^2 = 100x^4 - 60x^2 + \Diamond$

2.026. $\left(\frac{1}{a}x + \otimes\right)^2 = \frac{1}{a^2}x^2 + x + \Diamond;$

2.027. $(x - \otimes)^2 = x^2 - 14x + \Diamond$

2.028. $\left(\frac{3}{2}x + \otimes y\right)^2 = \frac{9}{4}x^2 - xy + \Diamond y^2$

2.029. $(ax + \otimes y)^2 = a^2x^2 + a^2xy + \Diamond y^2$

2.030. $(\otimes x - by)^2 = \Diamond x^2 - 2abxy + b^2y^2$

Сложность «I»

В задачах **2.031—2.040** разложить на множители:

2.031. $(2c + 1)^3 - 27$

2.032. $(p - 2)^3 + 27$

2.033. $(2b - 3)^3 + 1$

2.034. $4b^2 - (x^2 - b^2 - 1)^2$

2.035. $d^3 - 4d^2 + 20d - 125$

2.036. $27a^3 - 3a^2 + 2a - 8$

2.037. $(x + y + z)^3 - (x^3 + y^3 + z^3)$

2.038. $(a^2 - a - 3ax + 3x)^2 - (3ax - a + 3x - 9x^2)^2$

2.039. $(2a^3 - 3a^2x + 3ax^2 - 2x^3)^2 - 9a^2x^2(a - x)^2$

2.040. $(2x + 1)^3 - 8$

Сложность «I»

В задачах **2.041—2.050** выделить полный квадрат:

2.041. $x^2 - 2x + 5$

2.042. $a^2 + \frac{1}{2}a + 3$

2.043. $4b^2 + 2b - 1$

2.044. $\frac{1}{4}c^2 + c - 5$

2.045. $3y^2 + 6y - 8$

2.046. $x^2 - \frac{1}{3}x + 2$

2.047. $d^2 + 3d + 4$

2.048. $2x^2 + 4x - 5$

2.049. $\frac{1}{2}p^2 + 5p - 8$

2.050. $3x^2 + 2x + 4$

Сложность «I»

В задачах **2.051—2.060** произвести деление многочленов:

2.051. $(a^3 + 3a^2 + 4a + 2) : (a + 1)$

2.052. $(x^4 + 3x^3 + 7x^2 + 7x + 6) : (x^2 + 2x + 3)$

2.053. $(y^5 - 2y^3 + y^2 + y - 1) : (y^2 - 1)$

2.054. $(2z^3 - z^2 - 5z - 2) : (2z + 1)$

2.055. $(x^3 + x^2y - 2y^3) : (x - y)$

2.056. $(8t^3 + 12t^2 - 6t + 4) : (4t^2 - 2t + 1)$

2.057. $(x^4 - 25x^2 + 60x - 36) : (x - 1)$

2.058. $(8y^3 - 14y^2 + 7y - 1) : (y - 1)$

2.059. $(9x^4 - 30x^3 + 25x^2 - 4) : (x - 1)$

2.060. $(x^4 - 10x^3 + 90x - 81) : (x - 3)$

Сложность «1»

В задачах **2.061—2.070** произвести деление многочленов:

2.061. $(-2x + x^2 - 1 + 2x^3) : (x + 1)$

2.062. $(1 - x^2 - 3x + 6x^3) : (2x - 1)$

2.063. $(4x^2 - x - x^3 + 2x^4 + 2) : (x^2 + 1)$

2.064. $(3x^4 + 2 + 5x^2 + 2x + 3x^3) : (3x^2 + 2)$

2.065. $(4x - x^3 - x^2 - 2) : (1 - x)$

2.066. $(2 - x^2 + 2x - x^3) : (2 - x^2)$

2.067. $(2 + 3x^2 + x^3 + 3x) : (1 + x + x^2)$

2.068. $(x^3 + x^4 - x - 1) : (x^2 - 1)$

2.069. $(x^4 + x^2 - 4 + 2x^3) : (x + 2)$

2.070. $(x^3 - 2x^2 - 4x + 3) : (x - 1 + x^2)$

Сложность «0»

В задачах **2.071—2.074** найти значение коэффициента при x^3 в выражении:

2.071. $(x - 3)^3 - (2x(3 + (x - 3)^2) - 10)$

2.072. $(x - 1)(2 - x)(3 + 2x) - x(1 - 2x^2)$

2.073. $(x^2 - 2x + 1)(x^2 + 1) + (2x - 1)(x^3 + 2x + 5)$

2.074. $(x^2 - 1)(1 - 2x)(1 + x) + 2x^3$

В задачах **2.075—2.077** найти значение коэффициента при x^2 в выражении:

2.075. $(x - 2)(2 - 3x)(2x + 5) + 2(x^2 - 1)$

2.076. $\left(x - \frac{1}{4}\right)(4x - 2) + (1 - x)(2x + 5)x$

2.077. $\frac{1}{2}x(x - 5)(2x - 1) + x^3(x^2 - 4)$

В задачах **2.078—2.080** найти значение коэффициента при x в выражении:

2.078. $(x-1)(2x-1)+(x-1)\left(\frac{1}{2}x+2\right)x$

2.079. $x\left(x+\frac{1}{4}\right)(0{,}4x-5)+(3x-6)\left(\frac{1}{2}x+1\right)$

2.080. $(x-1)(x+2)(x-3)+2x$

Сложность «I»

В задачах **2.081—2.090** найти значение a, при котором данное равенство верно для всех x:

2.081. $\frac{8x-35a-3}{15a}=\left(\frac{7}{3}+\frac{1}{5a}\right)(x-1)+\frac{x}{3}$

2.082. $(2x+5)(2a+7)=(6a+1)x+10a+35$

2.083. $\frac{3x+5a}{a}=\left(\frac{2}{a}-3\right)x+5-x$

2.084. $(8-a)(9x-2)+18x=3ax+2a-16$

2.085. $\frac{a(2x-7)-8x-35}{5+a}=\frac{x-21}{3}$

2.086. $(x+3)(18+a)=5(5ax+90x+54+3a)$

2.087. $x\left(4-\frac{14}{a+1}\right)=\frac{10x+8a+8}{a+1}-8$

2.088. $(4-a)(3x-2)+3x=ax-2(4-a)$

2.089. $\frac{3x+4a+8}{a+2}=\left(\frac{2}{a+2}-1\right)x+4-\frac{x}{3}$

2.090. $\frac{x-(a/3)}{a}+\frac{x+1}{3}=\left(\frac{7}{3}+\frac{8}{a}\right)x$

Сложность «I»

В задачах **2.091—2.100** найти значения a и b, при которых данное равенство является верным для всех x:

2.091. $(3x+4)^2=(3b-4a)x^2+\frac{12}{b}(17-a)x+16$

2.092. $(x+7)(x+8)=x^2+(4a+b)x+2a-b+56$

2.093. $21x+10(ax^2+1)=7x^2+bx^2+5ax+3bx+10$

2.094. $(4x-1)(2x+3)=\frac{2x^2}{a}+\frac{3bx^2}{a}+(9a-b)x-16x-3$

2.095. $(x+5)^2 = 25 + bx - 4ax + \frac{x^2}{2a+b}$

2.096. $(x+3a)(x-2b) + 6ab = \frac{a+b}{20-b}x^2$

2.097. $(2x+1)(2x+5) + 5x = \frac{(8-b)x^2}{a} + 3bx - 2ax + 5$

2.098. $(9x-1)(2x+3) = -3 + 12x - (2a-5b)x + (4a+b)x^2$

2.099. $(x+3)^2 - x - 9 = (a+b)x^2 - \frac{(19-b)x}{a}$

2.100. $(4x-1)(1-x) = \left(\frac{8}{a} - \frac{b}{a}\right)x^2 - 40ax - 15bx - 1$

§ 5. АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ДРОБИ

Сложность «0»

В задачах **2.101—2.110** упростить выражение:

2.101. $\frac{a^3+3a^2b+3ab^2+b^3}{a^2-b^2}$

2.102. $\frac{(a^2-b^2)(a^2-ab+b^2)}{a-b}$

2.103. $\frac{a^3-3a^2b+3ab^2-b^3}{a-b}$

2.104. $\frac{a^3+3a^2b+3ab^2+b^3}{a+b}$

2.105. $\frac{(a+b)(a^2-ab+b^2)}{b^2-a^2}$

2.106. $\frac{(a^2-b^2)(a^2+ab+b^2)}{a+b}$

2.107. $\frac{a^3-3a^2b+3ab^2-b^3}{a-b}$

2.108. $\frac{(a+b)(a^2-ab+b^2)}{a^2-b^2}$

2.109. $\frac{a^3-3a^2b+3ab^2-b^3}{a^2-b^2}$

2.110. $\frac{a^3+3a^2b+3ab^2+b^3}{b^2-a^2}$

Сложность «0»

В задачах **2.111—2.120** выполнить действия:

2.111. $\frac{a^2+4a+2}{a} - a - \frac{2}{a}$

2.112. $\frac{b^2+2b-3}{b-1} - b$

2.113. $\frac{m^2-4m+5}{m-1} - \frac{2}{m-1} - m$

2.114. $\frac{a+1}{a^2-a-2} - \frac{1}{a-2}$

2.115. $n - \frac{2}{3n+1} - \frac{3n^2-0,5n-2,5}{3n+1}$

2.116. $\frac{6b^2-b-2}{3b-2} - 2b$

2.117. $\frac{3a^2+12a+13}{3a+6} - a - \frac{1}{3(a+2)}$

2.118. $\frac{3m^2-2m-1}{m} - 3m + \frac{1}{m}$

2.119. $\frac{2n^2+11n+14}{n+3}-2n+\frac{1}{n+3}$

2.120. $\frac{2a^2+5a-12}{2a-3}-a+1$

Сложность «0»

В задачах **2.121—2.130** выполнить действия:

2.121. $\frac{x}{a^2+ax}+\frac{1}{a+x}$

2.122. $\frac{a^2-b^2}{a-b}-\frac{a^3-b^3}{a^2-b^2}$

2.123. $\frac{1}{1-25a^2}+\frac{1}{25a^2-10a+1}$

2.124. $\frac{x}{x^2+y^2}-\frac{y(x-y)^2}{x^4-y^4}$

2.125. $\frac{1}{a^2+ab+b^2}+\frac{a+b}{a^3-b^3}$

2.126. $\frac{1}{x^2+3xy}+\frac{1}{9y^2-x^2}$

2.127. $\frac{c}{4c^2-9}-\frac{1}{4c+6}$

2.128. $\frac{x+2}{x^2-2x}-\frac{x-2}{x^2+2x}$

2.129. $\frac{1}{a^2+2ax}+\frac{1}{2ax+4x^2}$

2.130. $\frac{a}{a-b}+\frac{a^2b+ab^2}{b^3-a^3}$

Сложность «0»

В задачах **2.131—2.140** выполнить действия:

2.131. $\frac{b^2}{a^2+ab+b^2}+\frac{4a^2b-ab^2}{b^3-a^3}+\frac{a}{a-b}$

2.132. $\frac{1}{x^2+3xy}+\frac{2}{9y^2-x^2}+\frac{1}{2x-6y}$

2.133. $\frac{25}{a^2+5a+25}-\frac{2a}{5-a}-\frac{a^3+25a^2}{a^3-125}$

2.134. $\frac{1}{2t+5}-\frac{2}{25-10t}-\frac{4}{4t^2-25}$

2.135. $\frac{1}{a^2-2ab}+\frac{1}{2ab+4b^2}+\frac{2}{4b^2-a^2}$

2.136. $\frac{24x}{4x^2-9}+\frac{2x-3}{2x+3}+\frac{2x+3}{2x-3}$

2.137. $\frac{c+2}{2c-4}-\frac{2-c}{6+3c}+\frac{5c^2+12}{24-6c^2}$

2.138. $\frac{x-2}{x^2+2x}+\frac{x+2}{x^2-2x}-\frac{4x}{x^2-4}$

2.139. $\frac{6}{4z-z^2}-\frac{2}{z^2+4z}-\frac{z}{z^2-16}$

2.140. $\frac{y+x}{x-y}+\frac{6-4xy}{x^2-y^2}+\frac{y-x}{x+y}$

Сложность «1»

В задачах **2.141—2.150** выполнить действия:

2.141. $\frac{9a}{(3-a)^2}-1:\left(\frac{a}{a-3}+\frac{12a^2-9a}{27-a^3}+\frac{9}{a^2+3a+9}\right)$

2.142. $\left(\frac{c+5}{5c-1}+\frac{c+5}{c+1}\right):\frac{c^2+5c}{1-5c}+\frac{c^2+5}{c+1}$

2.143. $\left(\frac{x+5}{x^2-81}+\frac{x+7}{x^2-18x+81}\right):\left(\frac{x+3}{x-9}\right)^2+\frac{7+x}{9+x}$

2.144. $\frac{3n+10}{n+4}+\left(\frac{n-4}{n+6}\right)^2\cdot\left(\frac{n+21}{16-8n+n^2}-\frac{n+3}{16-n^2}\right)$

2.145. $\left(\frac{a+2}{a-2}\right):\left(\frac{6a}{a^3-8}+\frac{2a}{a^2+2a+4}+\frac{1}{2-a}\right)-\frac{4a+4}{a-2}$

2.146. $\left(\frac{1}{2+4m}-\frac{1-m}{8m^3+1}:\frac{1-2m}{4m^2-2m+1}\right)\cdot\frac{4m+2}{2m-1}$

2.147. $\left(a+\frac{2}{1+0,5a}\right):\frac{a^3-8}{a+2}+\frac{2}{2a-a^2}$

2.148. $\left(\frac{1-2z}{3+6z}+2z-1\right):\frac{1-2z}{1+2z}-\frac{6z^2-2z}{3z}$

2.149. $\left(\frac{y-3}{7y-4}-\frac{y-3}{y-4}\right):\frac{9y-3y^2}{7y-4}+\frac{y^2-18}{y-4}$

2.150. $\left(\frac{x^2-2x+4}{4x^2-1}:\frac{x^3+8}{2x^2+x}-\frac{x+2}{2x^2-x}\right):\frac{4}{x^2+2x}-\frac{x+4}{3-6x}$

Сложность «I»

В задачах **2.151—2.160** упростить выражение и вычислить его при заданном значении параметра:

2.151. $\left(\frac{a+2}{a-2}\right):\left(\frac{6a}{a^3-8}+\frac{2a}{a^2+2a+4}+\frac{1}{2-a}\right)-\frac{4a+4}{a-2}$ при $a=19,25$

2.152. $\left(\frac{1}{2a-3}+\frac{9}{9-4a^2}-\frac{2}{2a+3}\right):\left(1+\frac{4a^2+9}{4a^2-9}\right)$ при $a=\frac{1}{1580}$

2.153. $\left(\frac{a^3-27}{3a^3+18a^2+27a}\right):\left(\frac{a-3}{3a+9}-\frac{a+3}{a^2-3a}-\frac{3a+3}{9-a^2}\right)$ при $a=97$

2.154. $\left(\frac{4}{a^2+a}-\frac{2}{1-a^2}-\frac{1}{a^2-a}\right):\left(\frac{2a-1}{a^2+a}\right)$ при $a=10,5$

2.155. $\left(\frac{(a+5)^2}{a}-4\right)\left(\frac{(a+5)^2-5a}{2a}\right):\left(\frac{a^3-125}{a}\right)$ при $a=\frac{25}{3}$

2.156. $\left(\frac{a}{a^2-4}-\frac{8}{a^2+2a}\right)\left(\frac{a^2-2a}{4-a}\right)+\frac{a+8}{a+2}$ при $a=118$

2.157. $\left(\left(\left(\frac{a+1}{a-1}\right)^2+3\right):\left(\left(\frac{a-1}{a+1}\right)^2+3\right)\right):\left(\frac{a^3+1}{a^3-1}\right)$ при $a=\frac{11}{13}$

2.158. $\left(\frac{1}{a+3}-\frac{6}{9-a^2}\right):\left(\frac{a^2-6a-27}{(a^2-9)(a-3)^2}+\frac{12}{a^3-9a^2+27a-27}\right)$ при $a=22$

2.159. $\left(a^3+4a+\dfrac{2a(a^2+4)}{a-2}\right)\left(\dfrac{2a}{a+2}-a\right):\left(\dfrac{a^4+4a^2}{a^2-4}\right)$ при $a=8{,}5$

2.160. $\dfrac{a^3+27}{(a+3)^2}:(a^2-9)+\dfrac{3}{a+3}+\dfrac{3a-18}{(a^2-9)(a+3)}$ при $a=17$

Сложность «I»

В задачах **2.161—2.170** упростить выражение и вычислить его при заданных значениях параметров:

2.161. $\left(\left(\dfrac{m}{n}-\dfrac{n}{m}\right):(m+n)+m\left(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{m}\right)\right):\left(\dfrac{1+m}{mn}\right)$ при $m=190$ и $n=13$

2.162. $\left((a^2+b^2+ab)\left(b-\dfrac{b^2}{a+b}\right)\right):\left(\dfrac{a^3-b^3}{a^2-b^2}\right)$ при $a=15$ и $b=17$

2.163. $\left(\dfrac{(m+n)^2+2n^2}{m^3-n^3}-\dfrac{1}{m-n}+\dfrac{m+n}{m^2+mn+n^2}\right)\left(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{m}\right)$ при $m=16$ и $n=\dfrac{10}{176}$

2.164. $\left(\dfrac{4}{a^2+a}-\dfrac{2}{1-a^2}-\dfrac{1}{a^2-a}\right):\dfrac{2a-1}{a^2+a}$ при $a=\dfrac{18}{35}$

2.165. $\left(\dfrac{a+1}{2a-2}+\dfrac{6}{2a^2-2}-\dfrac{a+3}{2a+2}\right)\left(\dfrac{4a^2-4}{5a}\right)$ при $a=\dfrac{2}{121}$

2.166. $\left(\dfrac{ab}{a+b}+\dfrac{b^2}{a-b}+\dfrac{2ab^2}{a^2-b^2}\right)\left(\dfrac{1}{a+b}+\dfrac{b}{a^2-ab}-\dfrac{2b}{a^2-b^2}\right)$ при $a=13$ и $b=78$

2.167. $\left(\dfrac{2m+1}{2m-1}-\dfrac{2m-1}{2m+1}\right):\left(\dfrac{4m}{10m-5}\right)$ при $m=\dfrac{3}{14}$

2.168. $\left(\dfrac{a}{b-a}-\dfrac{a}{b+a}\right)\cdot\dfrac{b^2+2ab+a^2}{2a^2}$ при $a=23$ и $b=33$

2.169. $\left(1+\dfrac{a}{b}+\dfrac{a^2}{b^2}\right)\left(1-\dfrac{a}{b}\right)\cdot\dfrac{ab^2}{a^3-b^3}$ при $a=121$ и $b=11$

2.170. $\left(\dfrac{m^2}{n^2}+\dfrac{n}{m}\right):\left(\dfrac{m}{n^2}-\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{m}\right)$ при $m=97$ и $n=41$

Сложность «I»

В задачах **2.171—2.180** выделить целую часть:

2.171. $\dfrac{x^4-1}{x^2+3}$ **2.172.** $\dfrac{x+2x^2-x^3}{1-x}$

2.173. $\dfrac{x^5+x}{x^2-x^3-1}$ **2.174.** $\dfrac{2x^4+2}{x-1}$

2.175. $\frac{x-x^7}{x^5+1}$ **2.176.** $\frac{1-2x^6+x}{x^3-x}$

2.177. $\frac{3x^5+2x}{1-x^2}$ **2.178.** $\frac{2x-x^4}{x+1}$

2.179. $\frac{2x^2+3x-x^4}{x^2-1}$ **2.180.** $\frac{x^6+2x}{1-x}$

Сложность «2»

В задачах **2.181—2.190** найти числа A, B, C, при которых справедливо равенство:

2.181. $\frac{1}{x(x-1)(x+2)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{x+2}$

2.182. $\frac{x}{(x-1)(x+2)(x+3)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+2}+\frac{C}{x+3}$.

2.183. $\frac{2x+1}{(x^2+1)(x+2)}=\frac{A}{x+2}+\frac{Bx+C}{x^2+1}$

2.184. $\frac{1}{(x^2+1)x}=\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{x^2+1}$

2.185. $\frac{x-2}{x(x+1)(x+2)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x+1}+\frac{C}{x+2}$

2.186. $\frac{x+3}{x^2(x-1)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{C}{x-1}$

2.187. $\frac{x}{(x-1)^2(x+1)}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{(x-1)^2}$

2.188. $\frac{1}{(x^2+x+1)x}=\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{x^2+x+1}$

2.189. $\frac{x^2+4}{(x-1)(x+1)(x-2)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1}+\frac{C}{x-2}$

2.190. $\frac{x^2-1}{x^2(x+3)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{C}{x+3}$

§ 6. СТЕПЕНИ И РАДИКАЛЫ

Сложность «1»

В задачах **2.191—2.200** выполнить действия:

2.191. $\frac{1+(a+x)^{-1}}{1-(a+x)^{-1}}\left(1-\frac{1-(a^2+x^2)}{2ax}\right)$

2.192. $\dfrac{(x^2-b^2)^{-1}+(x^2+b^2)^{-1}}{(x^2-b^2)^{-1}-(x^2+b^2)^{-1}}-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{b^2}{x^2}\right)^{-1}$

2.193. $\dfrac{a^{-2}+b^{-2}}{a^{-1}+b^{-1}}:\left(\dfrac{a+b}{ab}\right)^{-1}-b^{-2}$

2.194. $\dfrac{x^{-1}+y^{-1}}{x^{-2}-y^{-2}}:\left(\dfrac{1}{y^{-1}}-\dfrac{1}{x^{-1}}\right)^{-1}$

2.195. $\dfrac{a^{-2}+b^{-2}}{a^{-1}+b^{-1}}:\left(\dfrac{ab}{a^2+b^2}\right)^{-1}$

2.196. $\left(\dfrac{x^{-2}}{1+x^{-2}}\right):\left(\dfrac{x^2+1}{x}\right)^{-1}$

2.197. $\left(\dfrac{a^{-2}}{1+a^{-2}}-1\right):(a^2+1)^{-1}$

2.198. $\dfrac{a^{-1}-x^{-1}}{a^{-3}+x^{-3}}:\left(\dfrac{xa^{-2}+ax^{-2}}{x-a}\right)^{-1}$.

2.199. $(x^2y^{-1}+x^{-1}):(xy^{-2}-y^{-1}+x^{-1})-1$

2.200. $\dfrac{x^{-6}-64}{4+2x^{-1}+x^{-2}}\cdot\dfrac{x^2(x^{-3}+8)^{-1}}{(4-4x^{-1}+x^{-2})(x^{-1}-2)^{-1}}$

Сложность «I»

В задачах **2.201—2.202** выполнить действия:

2.201. $\left(\dfrac{a^{1.5}+b^{1.5}}{a^{0.5}+b^{0.5}}-a^{0.5}b^{0.5}\right):(a-b)+\dfrac{2b^{0.5}}{a^{0.5}+b^{0.5}}$

2.202. $\left(\dfrac{1-a^{-1/2}}{1+a^{-1/2}}+\dfrac{1+a^{-1/2}}{1-a^{-1/2}}\right):\dfrac{a+1}{a-1}$

2.203. $\left(\dfrac{x-y}{x^{1/2}-y^{1/2}}-\dfrac{x^{3/2}-y^{3/2}}{x-y}\right)(x^{1/2}+y^{1/2})$

2.204. $\dfrac{a^{5/4}-a^{1/4}}{a^{3/4}+a^{1/2}}:\dfrac{a^{1/2}+1}{a^{1/2}+a^{1/4}}+1$

2.205. $\left(\dfrac{ax^{1/2}}{x^{1/2}+a^{1/2}}+\dfrac{xa^{1/2}}{a^{1/2}-x^{1/2}}\right):\left(\dfrac{-1}{a^{-1/2}x^{-1/2}}\right)$

2.206. $\dfrac{a^{3/2}-b^{3/2}}{a^{1/2}-b^{1/2}}-\dfrac{a^{2/3}b^{1/2}+a^{1/2}b^{2/3}}{a^{1/6}+b^{1/6}}$

2.207. $\dfrac{a^{1/3}-a^{7/3}}{a^{1/3}-a^{4/3}}+a\cdot\dfrac{a^{-1/3}-a^{5/3}}{a^{2/3}-a^{-1/3}}$

2.208. $\dfrac{a^{4/3}-2ab^{1/3}+(ab)^{2/3}}{a^{2/3}-(ab)^{1/3}}+\dfrac{a^{2/3}b^{1/3}-a^{1/3}b^{2/3}}{a^{1/3}-b^{1/3}}$

2.209. $\left((ab)^{1/2}-\dfrac{ab}{a+(ab)^{1/2}}\right):\left(\dfrac{a-b}{(ab)^{1/2}}\right)^{-1}$

2.210. $\left(\dfrac{a^{5/6}-a^{1/3}b^{1/2}}{(a^{1/2}-b^{1/2})(a^{1/2}-b^{1/2})}+\dfrac{a^{1/3}}{a^{1/2}-b^{1/2}}\right):\left(\dfrac{1}{a^{5/6}}\right)^{-1}$

Сложность «1»

В задачах **2.211—2.220** выполнить действия:

2.211. $\left(\dfrac{1}{a-\sqrt{b}}+\dfrac{1}{a+\sqrt{b}}\right):\dfrac{a}{a^2-b}$

2.212. $\left(\dfrac{\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x}}{\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x}}+1\right):\dfrac{1}{\left(\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x}\right)\sqrt{a+x}}$

2.213. $\left(\sqrt{\dfrac{1+a}{1-a}}+\sqrt{\dfrac{1-a}{1+a}}\right):\sqrt{1-a^2}$

2.214. $\left(\dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{x}}{\sqrt{a+x}}-\dfrac{\sqrt{a+x}}{\sqrt{a}+\sqrt{x}}\right):\dfrac{1}{(\sqrt{a}+\sqrt{x})\sqrt{a+x}}$

2.215. $\left(\dfrac{1}{\sqrt{a}-\sqrt{a-b}}+\dfrac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{a-b}}\right):\sqrt{a}$

2.216. $\left(\dfrac{1+\sqrt{1-x^2}}{1-\sqrt{1-x^2}}+1\right):\left(1+\sqrt{1-x^2}\right)$

2.217. $\left(1+\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$

2.218. $\dfrac{a+\sqrt{a^2-ab}}{a-\sqrt{a^2-ab}}+\dfrac{a-\sqrt{a^2-ab}}{a+\sqrt{a^2-ab}}$

2.219. $\dfrac{x+2+\sqrt{x^2-4}}{x+2-\sqrt{x^2-4}}+\dfrac{x+2-\sqrt{x^2-4}}{x+2+\sqrt{x^2-4}}$

2.220. $\left(\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{x-a^2}}{\sqrt{x}+\sqrt{x-a^2}}-\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{x-a^2}}{\sqrt{x}-\sqrt{x-a^2}}\right)\dfrac{1}{\sqrt{x}\cdot\sqrt{x-a^2}}$

Сложность «1»

В задачах **2.221—2.230** упростить выражение и вычислить его при заданном значении параметра:

2.221. $\left(m\sqrt{m^3}+5\sqrt{m^3}+m\sqrt{18}+15\sqrt{2}\right):\dfrac{3m+15}{2\sqrt{m^3}-6\sqrt{2}}$ при $m=3$

2.222. $\dfrac{\sqrt[3]{n\sqrt{n}}+\sqrt{n\cdot\sqrt[3]{n}}}{4n\sqrt{n}\,(1+\sqrt[6]{n})}$ при $n=\dfrac{5}{64}$

2.223. $\left(\dfrac{\sqrt[6]{b^3}}{\sqrt[4]{9}}-1\right)\dfrac{\left(\sqrt[4]{b}+\sqrt[4]{3}\right)^2-2\left(\sqrt[4]{3b}\right)}{\sqrt{3}}$ при $b=0{,}6$

2.224. $\dfrac{m+1}{\sqrt{m}-1}\cdot\dfrac{\sqrt{m}-2}{m+2-3\cdot\sqrt{m}}\cdot(m+1-2\cdot\sqrt{m})$ при $m=48$

2.225. $\dfrac{(b^2-16)\left(\sqrt[3]{b}-\sqrt[3]{4}\right)}{\sqrt[3]{b^4}+\sqrt[3]{64b}-\sqrt[3]{4b^3}-\sqrt[3]{256}}$ при $b=0{,}25$

2.226. $\left(\sqrt[8]{a^2+5+2a\sqrt{5}}+\sqrt[4]{a+\sqrt{5}}\right)\cdot\sqrt[4]{a-\sqrt{5}}$ при $a=\sqrt{630}$

2.227. $\left(\dfrac{1}{\sqrt{1+m}}+\sqrt{1-m}\right):\left(\sqrt{(1-m^2)^{-1}}+1\right)$ при $m=0{,}36$

2.228. $\left(\dfrac{\sqrt{a}+2}{a+2\sqrt{a}+1}-\dfrac{\sqrt{a}-2}{a-1}\right)\dfrac{\sqrt{a}+1}{a^{1/2}}$ при $a=\dfrac{6}{7}$

2.229. $\left(\left(\dfrac{5\sqrt{b^3}}{b\left(\sqrt[3]{5}\right)}\right)^{-3/2}+\left(\dfrac{b\left(\sqrt[8]{125}\right)}{\sqrt{b}}\right)^{-2}\right):\left(\sqrt[4]{b}+\sqrt[4]{5}\right)$ при $b=\dfrac{1}{12}$

2.230. $\left(\dfrac{\left(\sqrt{3}\right)^{-8}}{4\left(\sqrt[3]{\sqrt{3a}}\right)^{-9}}-\left(\sqrt{3a}\right)^{-2}\right):\left(\dfrac{\left(a+\sqrt{2}\right)^2}{12a\left(a-\sqrt{2}\right)^{-2}}\right)$ при $a=\sqrt{7}$

Сложность «2»

В задачах **2.231—2.240** упростить выражение и вычислить его при заданном значении параметра:

2.231. $\dfrac{\sqrt{a^3}+a\sqrt{18}+6\sqrt{a}+2\sqrt{2}}{\sqrt{a^3}+2\sqrt{a}+a\sqrt{2}+\sqrt{8}}-1$ при $a=2$

2.232. $\left(\left(\sqrt{a^3 3^{-3}}-\sqrt{27a^{-3}}\right):\left(\dfrac{a^2+9}{3a}+1\right)\right)\dfrac{(a-3)^{-1}}{(6a^3)^{-1/2}}$ при $a=18\sqrt{2}$

2.233. $\dfrac{\sqrt{a^3}-2a-4\sqrt{a}+8}{\sqrt{a^3}-6a+12\sqrt{a}-8}-\dfrac{4}{\sqrt{a}+2}$ при $a=14$

2.234. $\dfrac{a^2-4}{a-2\sqrt{2a}+2}:\dfrac{a+\sqrt{8a}+2}{12}$ при $a=26$

2.235. $\left(\dfrac{4m\left(\sqrt[3]{m}+\sqrt{2}\right)}{m^2-8}\right):\left(\dfrac{1}{\left(\sqrt[3]{m}-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt[3]{m^4}+2\cdot\sqrt[3]{m^2}+4\right)}\right)$ при $m=7$

2.236. $\dfrac{\left(a-\sqrt{24a}+6\right)\left(\sqrt{a}+\sqrt{6}\right)}{a\sqrt{a}-2\sqrt{54}}:\dfrac{5}{a+\sqrt{6a}+6}$ при $a=20$

2.237. $\dfrac{a-\sqrt[3]{81a^2}+3\cdot\sqrt[3]{9a}-3}{\left(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{3}\right)^2}:\dfrac{2}{\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{3a}+\sqrt[3]{9}}$ при $a=27$

2.238. $\dfrac{\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{32a}+\sqrt[3]{16}}{\left(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{4}\right)^3\left(\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{4a}+\sqrt[3]{16}\right)}$ при $a=16$

2.239. $\left(\dfrac{\left(\sqrt{a}-\sqrt{5}\right)\left(a-\sqrt{5a}+5\right)}{a+5}\right):\left(\dfrac{a\sqrt{a}+\sqrt{125}}{\left(\sqrt{a}+\sqrt{5}\right)^2}\right)$ при $a=95$

2.240. $\dfrac{\left(a+4\sqrt{2a}+8\right)\left(\sqrt{a}-\sqrt{8}\right)}{a\sqrt{a}+8\sqrt{a}-2a\sqrt{2}-16\sqrt{2}}-1$ при $a=32$.

Раздел III

АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ И СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ

§ 7. РАЦИОНАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

1°. Рациональным уравнением называется уравнение вида $P(x)/Q(x)=0$, где $P(x)$ и $Q(x)$ — многочлены ($Q(x)\neq 0$). Решение рационального уравнения сводится к решению уравнения $P(x)=0$ и проверке того, что корни удовлетворяют условию $Q(x)\neq 0$.

2°. Корни квадратного уравнения общего вида $ax^2+bx+c=0$ находятся по формуле:

$$\boxed{x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}}$$

а корни приведенного квадратного уравнения $x^2 + px + q = 0$ — по формуле:

$$\boxed{x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}}$$

3°. Теорема Виета. *Если x_1 и x_2 — корни приведенного квадратного уравнения, то:*

$$\boxed{x_1 + x_2 = -p, \quad x_1 x_2 = q}$$

Если x_1 и x_2 — корни квадратного уравнения общего вида $ax^2 + bx + c = 0$, *то:*

$$\boxed{x_1 + x_2 = -b/a, \quad x_1 x_2 = c/a}$$

Из теоремы Виета следует, что справедливы следующие разложения квадратного трехчлена:

$$\boxed{\begin{gathered} x^2 + px + q = (x - x_1)(x - x_2) \\ ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2) \end{gathered}}$$

4°. Равносильность уравнений. Два уравнения $F(x) = 0$ и $\Phi(x) = 0$ называются ***равносильными***, если каждое решение первого уравнения есть решение второго и каждое решение второго уравнения есть решение первого. Если оба уравнения *не имеют решений*, то они ***равносильны***.

Сложность «0»

В задачах 3.001—3.010 решить уравнение:

3.001. $\frac{71-3x}{6x-9} = \frac{1}{3}$

3.002. $\frac{17}{5x} = 2 - \frac{7}{x}$

3.003. $\frac{25x+3}{3x+7} = 5$

3.004. $\frac{49-2x}{16x} - 0,5 = 0$

3.005. $\frac{8x}{36x-21} = \frac{1}{2}$

3.006. $\frac{9}{x} + \frac{13}{2x} = 2$

3.007. $\frac{4+x}{4x-2} + \frac{3}{4} = 0$

3.008. $\frac{12}{x} - \frac{5}{6x} - \frac{2}{3} = 0$

3.009. $\frac{5x}{10x-13} = \frac{3}{2}$

3.010. $\frac{17x+26}{4x+3} - 3 = 0$

Сложность «0»

В задачах **3.011—3.020** найти меньший корень уравнения:

3.011. $24x(x+1)=4x^2-7$

3.012. $61x(x+1)=31x^2-30$

3.013. $(x+15)(x+5)=-9$

3.014. $2x(7x+3)=6x^2-1$

3.015. $(10+x)(x+14)=-3$

3.016. $(2x+4)(x+4{,}5)=-2$

3.017. $27x(x+1)=17x^2-18$

3.018. $(x+6)(x+1)=-6$

3.019. $(x+12)(x+8)=-3$

3.020. $25x(3x+1)=50x^2+66$

Сложность «0»

В задачах **3.021—3.030** решить уравнение:

3.021. $\frac{2}{x}-15=8x$

3.022. $1-\frac{15}{x}=\frac{16}{x^2}$

3.023. $x-25=\frac{54}{x}$

3.024. $1-\frac{25}{x^2}=\frac{24}{x}$

3.025. $x-\frac{20}{x}=1$

3.026. $7-2x=\frac{3}{x}$

3.027. $4x-\frac{2}{x}=7$

3.028. $2+\frac{4}{x^2}=\frac{9}{x}$

3.029. $1+\frac{12}{x}=x$

3.030. $\frac{4}{x}+5=\frac{1}{x^2}$

Сложность «1»

В задачах **3.031—3.040** решить уравнение:

3.031. $\frac{ax-b}{a+b}+\frac{a+bx}{a-b}=\frac{(a+b)^2}{a^2-b^2}$

3.032. $\frac{5}{b+3}-\frac{x}{3-b}=\frac{6x}{b^2-9}$

3.033. $\frac{x}{a^2-a+1}-\frac{1}{2a+2}=\frac{2x-1}{2a^2-2a+2}+\frac{a-ax}{a^3+1}$

3.034. $\frac{x}{a^2}=\frac{1+x}{(1+a)^2}-\frac{1-a}{1+a}$

3.035. $\frac{a^2+1}{a^2-1}=1+\frac{a^2-x}{a+1}-\frac{a^2+x}{a-1}$

3.036. $\frac{x+k}{m+k}-\frac{mk}{(m+k)^2}=\frac{mk}{m^2-k^2}$

3.037. $\frac{1}{2ab^2}-\frac{3x}{2ab}=\frac{x}{a^2-ab}$

3.038. $\frac{a^2+x}{b^2-a^2}+\frac{a^2-x}{a^2+b^2}=\frac{2b^2x+2a^2+2b^2}{b^4-a^4}$

3.039. $\frac{(3n+1)x}{n}-\frac{3n}{n+1}=\frac{n^2}{(n+1)^3}+\frac{(2n+1)x}{n(n+1)^2}$

3.040. $\frac{x-1}{a-1}+\frac{2x-1}{a^4-1}+\frac{1-x}{a+1}=\frac{2a^2(1-x)}{1-a^4}$

Сложность «I»

В задачах **3.041—3.050** решить уравнение:

3.041. $3+\frac{27}{x}+x^2+\frac{81}{x^3}=0$

3.042. $4x^4+3x^3+32x+24=0$

3.043. $\frac{8}{x^4}-\frac{5}{x^3}-\frac{8}{x}+5=0$

3.044. $10x^3-15x^2+12x-18=0$

3.045. $12x+\frac{20}{x}-\frac{25}{x^2}-15=0$

3.046. $25x^4-9x^2+75-\frac{27}{x^2}=0$

3.047. $40+16x-\frac{2}{x^2}-\frac{5}{x^3}=0$

3.048. $10x^3+x^2-80-\frac{8}{x}=0$

3.049. $3x^3+5x+\frac{40}{x^2}+24=0$

3.050. $10+\frac{1}{2x^3}-\frac{5}{2x^2}-\frac{2}{x}=0$

Сложность «I»

В задачах **3.051—3.060** решить уравнение:

3.051. $(x+0{,}5)(x^2-9)=(2x+1)(x+3)^2$

3.052. $(x^2-0{,}01)(2x-5)=(x-2{,}5)(x+0{,}1)^2$

3.053. $(4x^2-9)(x-0{,}3)=(10x-3)(x-1{,}5)^2$

3.054. $5(x+0{,}4)(x^2-4)=(x+2)^2(10x+4)$

3.055. $(x-0{,}5)^2(3x+9)=(x+3)(4x^2-1)$

3.056. $(5x-1)(2x-5)^2=(4x^2-25)(x-0{,}2)$

3.057. $(x-1)^2(8x-9)=4(x^2-1)(x-1{,}125)$

3.058. $(2x+8)^2(13x-39)=26(4x^2-64)(x-3)$

3.059. $(2x-1)^2(5x-3)=(x-0{,}6)(16x^2-4)$

3.060. $(2x-1)(5x-2)^2=100(x^2-0{,}16)(x-0{,}5)$

Сложность «I»

В задачах **3.061—3.070** решить уравнение:

3.061. $\frac{x^3-8}{2x-4}=12x-18$

3.062. $\frac{x^4-256}{16-x^2}=2(7x+12)$

3.063. $\frac{8x^3+27}{4x+6}=5x+21$

3.064. $\frac{125x^3-216}{25x-30}=x+20{,}4$

3.065. $\frac{16x^4-81}{36-16x^2}=5x-12$

3.066. $\frac{x^3+64}{16+4x}=11-\frac{x}{4}$

3.067. $\frac{x^4-625}{25-x^2}=-(8x+90)$

3.068. $\frac{x^3-125}{x-5}=8x+35$

3.069. $\frac{27x^3+125}{3x+5} = -(5+48x)$

3.070. $\frac{16x^4-1}{16x^2-4} = 4x+2{,}5$

Сложность «2»

В задачах **3.071—3.080** решить уравнение:

3.071. $\frac{5x^2-7x+2}{4x^2+x-5} = \frac{(4x-5)^2}{16x^2-25}$

3.072. $\frac{3x^2+4x-4}{2x^2-x-10} = \frac{(2x+5)^2}{4x^2-25}$

3.073. $\frac{2x^2+10x+8}{4x^2+22x+24} = \frac{(4x-6)^2}{16x^2-36}$

3.074. $\frac{9x^2-42x-15}{4x^2-21x+5} = \frac{(4x+1)^2}{16x^2-1}$

3.075. $\frac{2x^2-3x-20}{6x^2-20x-16} = \frac{(6x-4)^2}{36x^2-16}$

3.076. $\frac{3x^2+10x+8}{8x^2+18x+4} = \frac{(8x-2)^2}{64x^2-4}$

3.077. $\frac{5x^2-17x+12}{3x^2-x-2} = \frac{(3x-2)^2}{9x^2-4}$

3.078. $\frac{x^2+x-12}{6x^2-10x-24} = \frac{(6x-8)^2}{36x^2-64}$

3.079. $\frac{3x^2+4x-4}{2x^2+5x+2} = \frac{(2x-1)^2}{4x^2-1}$

3.080. $\frac{2x^2-7x+6}{3x^2-4x-4} = \frac{(3x-2)^2}{9x^2-4}$

Сложность «3»

3.081. Найти значения p, при которых отношение корней уравнения $2x^2+(p-10)x+6=0$ равно 12.

3.082. При каких значения q один из корней уравнения $4x^2-(3+2q)x+2=0$ в 8 раз меньше другого?

3.083. Найти значение a, при котором один корень уравнения $2x^2-6x+1-a=0$ больше другого на 10.

3.084. Найти значения a и b, при которых корни уравнения $4x^2+a(x-1)+b=0$ удовлетворяют системе $\begin{cases} 2x_1+x_2=5 \\ x_1-x_2=1 \end{cases}$

3.085. Определить значение b, при котором корни уравнения $x^2-3x+2b+3=0$ удовлетворяют условию $5x_1+3x_2=23$.

3.086. Найти значение a, при котором один корень уравнения $x^2-6x-a+1=0$ меньше другого на 10.

3.087. Разность корней уравнения $25x^2-25x+c-2=0$ равна 0,2. Найти значение c.

3.088. Найти значения a, при которых один корень уравнения $x^2+x-a^2-2=0$ меньше другого на 5.

3.089. Найти значения b, если известно, что число b является корнем уравнения $2x^2-(1-3b)x+5b=0$.

3.090. Определить значения b, при которых одним из корней уравнения $8x^2+(2b+1)x+2b-1=0$ является число b.

Сложность «3»

В задачах **3.091—3.100** решить уравнение:

3.091. $\frac{x^2+2x+2}{x^2+2x+3}-\frac{1}{x^2+2x+2}=\frac{1}{6}$ **3.092.** $\frac{2x^2+5x+15}{2x^2+5x+3}-\frac{2x^2+5x+13}{2x^2+5x+5}=1$

3.093. $\frac{8x^2+4x+4}{4x^2+2x+3}-\frac{1}{2x^2+x+1}=\frac{1}{3}$ **3.094.** $6x^2+3x+1=-\frac{2x^2+x-5}{2x^2+x}$

3.095. $\frac{4x^2+4x-3}{x^2+x-1}-\frac{5x^2+5x}{3x^2+3x+4}=4$ **3.096.** $\frac{4x^2+10x+9}{2x^2+5x+4}+\frac{2x^2+5x+1}{6x^2+15x+8}=2$

3.097. $\frac{1}{5x^2+8x+5}+\frac{35x^2+56x+25}{20x^2+32x+28}=\frac{3}{4}$

3.098. $\frac{4x^2+7x+7}{8x^2+14x+10}+\frac{4x^2+7x+1}{12x^2+21x+13}=\frac{1}{2}$

3.099. $9x-6x^2-\frac{2x^2-3x-4}{2x^2-3x+1}=4$ **3.100.** $\frac{4x^2+2x+3}{2x^2+x+1}+\frac{2x^2+x-2}{6x^2+3x-1}=2$

Сложность «3»

В задачах **3.101—3.110** решить уравнение:

3.101. $\frac{19-2x}{x^2+5x+4}-\frac{2x+9}{x^2+3x+2}=\frac{4x}{x^2+6x+8}$

3.102. $\frac{2x}{x^2+x-2}+\frac{2}{3(x^2-4x+3)}=\frac{5}{3(x^2-x-6)}$

3.103. $\frac{7}{x^2-3x-4}+\frac{3x-6}{x^2-x-2}=\frac{1}{x+1}$ **3.104.** $\frac{3(2x^2-x-1)}{x^2+x-6}=1+\frac{4x}{x+3}$

3.105. $\frac{1-9x}{x^2+2x-3}+\frac{3x-1}{x-1}=\frac{2x}{x+3}$ **3.106.** $\frac{2(4x+13)}{x^2+8x+7}+\frac{2x+9}{x+7}=3$

3.107. $\frac{2x}{x+2}+\frac{2(11x+6)}{x^2-4x-12}=\frac{3x-1}{x-6}$ **3.108.** $\frac{3x-1}{x+3}-\frac{x^2-27x-10}{x^2-2x-15}=\frac{x+1}{x-5}$

3.109. $\frac{2x^2+15x+27}{2x^2+7x+3}+\frac{3x-1}{2x+1}=2$ **3.110.** $5-\frac{x^2-14x-51}{x^2-x-12}=\frac{3x}{x-4}$

Сложность «3»

В задачах **3.111—3.120** решить уравнение:

3.111. $\frac{n^2-k^2}{k^2+x^2-2kx}=1-\frac{2k}{x-k}$ **3.112.** $\frac{a+x-2b}{2a-b}-1=\frac{a-2b}{x}$

3.113. $\frac{x^2+1}{a^2x-2a}-\frac{x}{a}=\frac{1}{2-ax}$ **3.114.** $\frac{x^2}{ab-2b^2}=\frac{x}{bc}+\frac{a-b}{ac^2-2bc^2}$

3.115. $\frac{x^2}{b}-\frac{x}{b+a}=\frac{a(a-b)}{b(b+a)^2}$

3.116. $\frac{x}{k+1}-\frac{1}{k}=\frac{1}{kx(x+1)}$

3.117. $\frac{x}{n-1}-\frac{n+1}{k(n-1)}=\frac{1}{n+1}-\frac{1}{kx}$

3.118. $\frac{nx^2}{n^2+1}=x-\frac{n}{n^2+1}$

3.119. $\frac{x}{a+1}+\frac{1}{ax}=\frac{2}{a+1}+\frac{1}{a(a+1)}$

3.120. $\frac{x^2}{a^2+ab+1}+\frac{a}{(a+b)(a^2+ab+1)}=\frac{x}{a+b}$

Сложность «3»

В задачах **3.121—3.130** решить уравнение:

3.121. $x^4-2x^3-x^2-2x+1=0$

3.122. $2x^4+3x^3-x^2+3x+2=$

3.123. $7\left(x+\frac{1}{x}\right)-2\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)=9$

3.124. $x^2+\frac{4}{x^2}-8\left(x-\frac{2}{x}\right)=4$

3.125. $\frac{x}{x^2-x+1}-\frac{2x}{x^2+x+1}=-\frac{1}{12}$

3.126. $\frac{3x^2-1}{x}+\frac{3x}{3x^2-x-1}=-3$

3.127. $\frac{x^2-x+2}{x}+\frac{x^4+x^2+4}{x^2}=8$

3.128. $\frac{x}{x^2-x+1}+\frac{3x}{x^2+x+1}=2$

3.129. $\frac{3x^2-1}{x}+\frac{5x}{3x^2-x-1}=7$

3.130. $\frac{3x}{x^2-4x+1}-\frac{2x}{x^2+x+1}=\frac{8}{3}$

Сложность «3»

В задачах **3.131—3.140** решить уравнение:

3.131. $(x-3)(x-4)(x-7)(x-8)=60$

3.132. $(x+6)(x+7)(x+9)(x+10)=10$

3.133. $(x+3)(x+6)(x+9)(x+12)=45{,}5625$

3.134. $(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)=\frac{9}{16}$

3.135. $x(x+1)(x-1)(x-2)=-\frac{7}{16}$

3.136. $(12x-1)(6x-1)(4x-1)(3x-1)=5$

3.137. $x(x+1)(x+2)(x+3)=48$

3.138. $(x-1)x(x+1)(x+2)=3$

3.139. $(x+2)(x+5)(x+15)(x+18)=-360$

3.140. $\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{3}\right)\left(x+\frac{2}{3}\right)\left(x-\frac{3}{2}\right)=-\frac{1}{3}$

Сложность «3»

В задачах **3.141—3.150** решить уравнения в целых числах:

3.141. $y^2 - xy - 2x^2 - 13 = 0$

3.142. $y^2 - x^2 + 3 = 0$

3.143. $x^2 + xy - 5 = 0$

3.144. $x^2 - 2xy - 3y^2 + 11 = 0$

3.145. $x^2 - 3xy + 2y^2 - 4 = 0$

3.146. $4y^2 - x^2 + 5 = 0$

3.147. $x^2 + 2x - y^2 - 2 = 0$

3.148. $y^2 - 4x^2 - 2y + 4 = 0$

3.149. $x^2 + 2x - y^2 - 2y + 3 = 0$

3.150. $x^2 + 2x + 2(x + 1)y - 3y^2 + 4 = 0$

Сложность «3»

В задачах **3.151—3.160** решить уравнения в целых числах:

3.151. $x^2 - xy - y - 4 = 0$

3.152. $x^2 - xy + 2x + 2 = 0$

3.153. $y^2 - xy + x + 1 = 0$

3.154. $xy - 2x^2 + 5x - 2y - 3 = 0$

3.155. $3xy - x^2 + 3x - 6y = 3$

3.156. $2x^2 - 3xy + 4x - 3y = 0$

3.157. $x^2 + xy - 5x + 2y + 5 = 0$

3.158. $2y^2 + 2xy - 3y - 2x = 0$

3.159. $x^2 + xy - x - y - 7 = 0$

3.160. $xy - 2y^2 + x - 2y - 5 = 0$

Сложность «3»

В задачах **3.161—3.170** решить уравнение:

3.161. $x^2 + a^2 + 2x - 2a + 2 = 0$

3.162. $x^2 + a^2 - 4x + 2a + 5 = 0$

3.163. $2x^2 + 2a^2 + 12x + 8a + 26 = 0$

3.164. $2x^2 + 2a^2 - 2x + 6a + 5 = 0$

3.165. $4x^2 + 4a^2 - 8x - 4a + 5 = 0$

3.166. $x^2 + a^2 - 6x - 2a + 10 = 0$

3.167. $x^2 + a^2 - 10x + 4a + 29 = 0$

3.168. $3x^2 + 3a^2 - 12x - 12a + 24 = 0$

3.169. $4x^2 + 4a^2 - 8x + 32a + 68 = 0$

3.170. $2x^2 + 2a^2 - 12x - 12a + 36 = 0$

Сложность «3»

В задачах **3.171—3.180** найти все значения параметра a, при которых уравнение имеет единственное решение:

3.171. $ax^2 - 2x + \frac{1}{3} = 0$

3.172. $(a - 1)x^2 + x + 5 = 0$

3.173. $ax^2 + 2x + 1 = 0$

3.174. $(2 - a)x^2 - x - 4 = 0$

3.175. $2x - 5 - ax^2 = 0$

3.176. $(2a - 1)x^2 + 3x - 6 = 0$

3.177. $(2a + 4)x^2 - 4x + 1 = 0$

3.178. $6 - 2x - (2 - 3a)x^2 = 0$

3.179. $(a - 3)x^2 + 5x - 2 = 0$

3.180. $(2 - 3a)x^2 + 4 - 2x = 0$

Сложность «3»

В задачах **3.161—3.170** определить, при каких значениях параметра a заданные уравнения равносильны:

3.181. $ax - a + 2 - x = 0;$ $\quad ax - a - x - 2 = 0$

3.182. $2ax - 4x - a - 1 = 0;$ $\quad 4ax - 8x - a + 3 = 0$

3.183. $ax - a + 3x - 5 = 0;$ $\quad 2ax - a + 6x - 1 = 0$

3.184. $2ax + 2x - a + 2 = 0;$ $\quad 2ax - a + 2x - 3 = 0$

3.185. $2ax + 8x - a + 2 = 0;$ $\quad 2ax + 8x - a - 3 = 0$

3.186. $2ax - 2a + 3x + 4 = 0;$ $\quad 2ax + 3x - a + 1 = 0$

3.187. $2ax + 10x - 2a - 6 = 0;$ $\quad 2ax + 10x - a = 0$

3.188. $3ax - 6a - 21x + 2 = 0;$ $\quad 3ax - 3a - 21x - 4 = 0$

3.189. $2ax - 2a - x - 4 = 0;$ $\quad 2ax - 2a - x + 5 = 0$

3.180. $2ax - 2a - 5x - 4 = 0;$ $\quad 2ax - 2a - 5x + 1 = 0$

§ 8. СИСТЕМЫ РАЦИОНАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Сложность «0»

В задачах **3.171—3.180** решить систему уравнений:

3.191. $\begin{cases} 2x + 11y = -2 \\ x - 3y = -1 \end{cases}$

3.192. $\begin{cases} 15x + 2y = 2 \\ 13x - 3y = -3 \end{cases}$

3.193. $\begin{cases} 26x - 15y = -45 \\ 21x + 2y = 6 \end{cases}$

3.194. $\begin{cases} 18x + 23y = 46 \\ 3x - 11y = -22 \end{cases}$

3.195. $\begin{cases} 17x - 15y = -17 \\ 25x + 14y = -25 \end{cases}$

3.196. $\begin{cases} 2x + y = 4 \\ 3y - 2x = 4 \end{cases}$

3.197. $\begin{cases} 3x - y = 2 \\ 2x + 3y = 5 \end{cases}$

3.198. $\begin{cases} 3x + y = -2 \\ 2x + 3y = 1 \end{cases}$

3.199. $\begin{cases} 5x + 4y = 3 \\ 3x - 2y = -7 \end{cases}$

3.200. $\begin{cases} 7x - 2y = 1 \\ 5x + 3y = 14 \end{cases}$

Сложность «0»

В задачах **3.201—3.210** решить систему уравнений:

3.201. $\begin{cases} 7x+24y=65 \\ \dfrac{3}{4x+13}-\dfrac{1}{y}=0 \end{cases}$

3.202. $\begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{8}{191-35y}=0 \\ 19x+12y=22 \end{cases}$

3.203. $\begin{cases} \dfrac{5}{8x-11}=\dfrac{4}{y} \\ 15x+11y=74 \end{cases}$

3.204. $\begin{cases} 9x+26y=166 \\ \dfrac{2}{x}-\dfrac{13}{9y-19}=0 \end{cases}$

3.205. $\begin{cases} \dfrac{5}{y}=\dfrac{16}{3x+25} \\ 7x+21y=84 \end{cases}$

3.206. $\begin{cases} 10x-21y=-158 \\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{14}{13y-118}=0 \end{cases}$

3.207. $\begin{cases} \dfrac{1}{5x-14y+75}=1 \\ 9x+16y=114 \end{cases}$

3.208. $\begin{cases} \dfrac{3y-6x-25}{5x+8y}=1 \\ 8x+25y=110 \end{cases}$

3.209. $\begin{cases} 8x+15y=84 \\ \dfrac{5x+8y-57}{x-y}=10 \end{cases}$

3.210. $\begin{cases} 12x-27y=-147 \\ \dfrac{x+y}{x+2y-28}=\dfrac{1}{4} \end{cases}$

Сложность «1»

В задачах **3.211—3.220** решить систему уравнений:

3.211. $\begin{cases} 2y-3x=318 \\ \dfrac{x}{y}=0,(13) \end{cases}$

3.212. $\begin{cases} 2x-y=4 \\ \dfrac{y}{x}=1,(91) \end{cases}$

3.213. $\begin{cases} 5x-y=48 \\ \dfrac{x}{y}=0,(23) \end{cases}$

3.214. $\begin{cases} y-2x=74 \\ \dfrac{y}{x}=2,(37) \end{cases}$

3.215. $\begin{cases} y-6x=24 \\ \dfrac{x}{y}=0,1(5) \end{cases}$

3.216. $\begin{cases} y-5x=11 \\ \dfrac{y}{x}=5,1(2) \end{cases}$

3.217. $\begin{cases} 2x-y=21 \\ \dfrac{x}{y}=0,(53) \end{cases}$

3.218. $\begin{cases} y-4x=31 \\ \dfrac{y}{x}=4,(31) \end{cases}$

3.219. $\begin{cases} y - x = 55 \\ \dfrac{x}{y} = 0,8(7) \end{cases}$

3.220. $\begin{cases} 4x - y = 154 \\ \dfrac{y}{x} = 3,1(4) \end{cases}$

Сложность «1»

В задачах 3.221—3.230 решить систему уравнений:

3.221. $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x + 2y + z = 1 \\ x + 3y + 2z = 3 \end{cases}$

3.222. $\begin{cases} 4x - 7y + 8z = 0 \\ x - 2y - z = -3 \\ 6x + 2y + 3z = -9 \end{cases}$

3.223. $\begin{cases} 2x + 2y - z = 0 \\ 20x - 10y + z = 4 \\ 5x + 10y + 5z = 18 \end{cases}$

3.224. $\begin{cases} x + 8y - 2z = -10 \\ 3x - 2y + 5z = -4 \\ 5x + 2y + z = -12 \end{cases}$

3.225. $\begin{cases} 12x - 8y + 3z = 11 \\ 6x - 2y + z = 8 \\ 8x - 4y + 7z = 25 \end{cases}$

3.226. $\begin{cases} 8x - 4y + z = 3 \\ 2x - 3y - 3z = -13 \\ x + y + 2z = 9 \end{cases}$

3.227. $\begin{cases} x - 2y + 3z = 2 \\ 12x + 4y - z = 1 \\ x + 6y + 5z = 8 \end{cases}$

3.228. $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + 3y - 8z = -9 \\ 2x - 17y + 9z = 7 \end{cases}$

3.229. $\begin{cases} 2x + 3y - z = 2 \\ 4x - y + z = 3 \\ 2x + 2y - 3z = -3 \end{cases}$

3.230. $\begin{cases} 10x + 13y - z = 0 \\ 2x + 4y + z = 1,2 \\ x - 2y + 2z = 2,1 \end{cases}$

Сложность «1»

В задачах 3.231—3.240 найти целочисленные решения системы уравнений:

3.231. $\begin{cases} x^2 + xy + 3 = 0 \\ y - 3x - 7 = 0 \end{cases}$

3.232. $\begin{cases} y^2 - x^2 = 16 \\ x + y = 8 \end{cases}$

3.233. $\begin{cases} \dfrac{x + 3y}{y - 1} - \dfrac{y - x}{2x} = 2 \\ y - x = 4 \end{cases}$

3.234. $\begin{cases} x^2 - xy = -1 \\ y + 4x = 6 \end{cases}$

3.235. $\begin{cases} 2x^2 + xy - 14 = 0 \\ 3x - y - 3 = 0 \end{cases}$

3.236. $\begin{cases} x^2 + 4y^2 = 37 \\ x + y = 4 \end{cases}$

3.237. $\begin{cases} x^2-2y^2=2 \\ 2x+y=-3 \end{cases}$

3.238. $\begin{cases} y^2-3x^2=-2 \\ x+2y=1 \end{cases}$

3.239. $\begin{cases} x^2+2xy=-3 \\ 2x-y=-4 \end{cases}$

3.240. $\begin{cases} 2x^2+3y^2=14 \\ x+2y=5 \end{cases}$

Сложность «2»

В задачах **3.241—3.250** найти целочисленные решения системы уравнений:

3.241. $\begin{cases} 3x^2-5xy-6x+10y=0 \\ 7x+6y=32 \end{cases}$

3.242. $\begin{cases} 8x+12y+2xy+3y^2=0 \\ 7x+2y=-43 \end{cases}$

3.243. $\begin{cases} 4x^2+3xy-4x-3y=0 \\ 5x+3y=17 \end{cases}$

3.244. $\begin{cases} 5y-2x-15xy+6x^2=0 \\ 4x-15y=10 \end{cases}$

3.245. $\begin{cases} 4x^2-3xy+8x-6y=0 \\ 3x-11y=-17 \end{cases}$

3.246. $\begin{cases} 4x-3y+12xy-9y^2=0 \\ 5x+6y=78 \end{cases}$

3.247. $\begin{cases} 4x^2+6xy-3y-2x=0 \\ 9x+6y=-15 \end{cases}$

3.248. $\begin{cases} 2y^2+5xy-15x-6y=0 \\ 8y-7x=31 \end{cases}$

3.249. $\begin{cases} 9x^2+6xy-3x-2y=0 \\ 3x+8y=36 \end{cases}$

3.250. $\begin{cases} 10x-2y+5xy-y^2=0 \\ 3x-13y=11 \end{cases}$

Сложность «2»

В задачах **3.251—3.260** решить систему уравнений:

3.251. $\begin{cases} x^2y-3x-9xy+27=0 \\ \dfrac{3(x+y)-28}{x-9}=2 \end{cases}$

3.252. $\begin{cases} 3x^2y-2xy-6x+4=0 \\ \dfrac{12x+3y-17}{3x-2}=1 \end{cases}$

3.253. $\begin{cases} x^2y+9x-9xy-81=0 \\ \dfrac{2x+3y-15}{x-9}=1 \end{cases}$

3.254. $\begin{cases} 3xy^2+15y+5xy+25=0 \\ \dfrac{3x+12y+11}{3y+5}=1 \end{cases}$

3.255. $\begin{cases} x^2y-11xy-11x+121=0 \\ \dfrac{3x+y-34}{x-11}=2 \end{cases}$

3.256. $\begin{cases} 3xy^2-9y-xy+3=0 \\ \dfrac{3x+12y-31}{3y-1}=1 \end{cases}$

3.257. $\begin{cases} xy^2 + 2xy + 8y + 16 = 0 \\ \dfrac{x+5y+6}{y+2} = 4 \end{cases}$

3.258. $\begin{cases} xy^2 - xy - 3y + 3 = 0 \\ \dfrac{x+4y-7}{y-1} = 3 \end{cases}$

3.259. $\begin{cases} x^2y + 5x - 3xy - 15 = 0 \\ \dfrac{4x+3y-7}{x-3} = 3 \end{cases}$

3.260. $\begin{cases} xy^2 + 4y + 4xy + 16 = 0 \\ \dfrac{x+2y+7}{y+4} = 1 \end{cases}$

Сложность «2»

В задачах **3.261—3.270** решить систему уравнений:

3.261. $\begin{cases} \dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x} = \dfrac{25}{12} \\ x^2 - y^2 = 7 \end{cases}$

3.262. $\begin{cases} \dfrac{x+y}{x-y} + \dfrac{x-y}{x+y} = \dfrac{26}{5} \\ xy = 6 \end{cases}$

3.263. $\begin{cases} \dfrac{x}{y} - \dfrac{y}{x} = \dfrac{5}{6} \\ x^2 - y^2 = 5 \end{cases}$

3.264. $\begin{cases} \dfrac{x+y}{x-y} + \dfrac{x-y}{x+y} = \dfrac{10}{3} \\ x^2 + y^2 = 5 \end{cases}$

3.265. $\begin{cases} \dfrac{x+y}{x-y} + 6\dfrac{x-y}{x+y} = 5 \\ xy = 2 \end{cases}$

3.266. $\begin{cases} 4\dfrac{y}{x} + \dfrac{x}{y} = 5 \\ xy = 4 \end{cases}$

3.267. $\begin{cases} 3\dfrac{x}{y} - \dfrac{y}{x} = -2 \\ x^2 - y^2 = -8 \end{cases}$

3.268. $\begin{cases} \dfrac{x+2y}{x-2y} - 3\dfrac{x-2y}{x+2y} = 2 \\ xy = 4 \end{cases}$

3.269. $\begin{cases} \dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x} = \dfrac{13}{6} \\ x^2 + xy - y^2 = 1 \end{cases}$

3.270. $\begin{cases} \dfrac{y+x}{y-x} + 5\dfrac{y-x}{y+x} = 6 \\ x^2 + y^2 = 13 \end{cases}$

Сложность «2»

В задачах **3.271—3.280** решить систему уравнений:

3.281. $\begin{cases} x^2 + 3xy = 54 \\ 4y^2 + xy = 115 \end{cases}$

3.282. $\begin{cases} 2y^2 + xy - x^2 = 0 \\ x^2 - xy - y^2 + 3x + 7y + 3 = 0 \end{cases}$

3.283. $\begin{cases} x^2 + 2y^2 = 17 \\ x^2 - 2xy = -3 \end{cases}$

3.284. $\begin{cases} x^2 - 4xy + y^2 = 3 \\ y^2 - 3xy = 2 \end{cases}$

3.285. $\begin{cases} 2x^2 - 3xy + y^2 = 3 \\ x^2 + 2xy - 2y^2 = 6 \end{cases}$

3.286. $\begin{cases} 3x^2 + xy - 2x + y - 5 = 0 \\ 2x^2 - xy - 3x - y - 5 = 0 \end{cases}$

3.287. $\begin{cases} x^2 + y^2 + x - 3y = 2 \\ x^2 + y^2 - 5x - y = 2 \end{cases}$

3.288. $\begin{cases} x^2 + y^2 + x + y = 18 \\ xy + x^2 + y^2 = 12 \end{cases}$

3.289. $\begin{cases} 3x^2 - 2xy + 5y^2 = 35 \\ x^2 - 2y^2 = 1 \end{cases}$

3.280. $\begin{cases} 2x^2 + 2y^2 - 5xy = 0 \\ x^2 + y^2 - 2xy - 2x + 2y = 0 \end{cases}$

Сложность «3»

В задачах **3.281—3.290** найти наибольшее значение параметра a, при котором система уравнений имеет четыре решения:

3.281. $\begin{cases} |x| + |y| = 1 \\ x^2 + y^2 = a^2 \end{cases}$

3.282. $\begin{cases} |x| + |y| = a \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases}$

3.283. $\begin{cases} |x-1| + |y| = a \\ (x-1)^2 + y^2 = 1 \end{cases}$

3.284. $\begin{cases} |x| + |y-1| = 9 \\ x^2 + (y-1)^2 = a^2 \end{cases}$

3.285. $\begin{cases} |x-2| + |y+1| = a \\ (x-2)^2 + (y+1)^2 = 16 \end{cases}$

3.286. $\begin{cases} |x+2| + |y-4| = 0,5 \\ (x+2)^2 + (y-4)^2 = a^2 \end{cases}$

3.287. $\begin{cases} |x+3| + |y-3| = a \\ (x+3)^2 + (y-3)^2 = 1 \end{cases}$

3.288. $\begin{cases} |x-1| + |y| = 2 \\ (x-1)^2 + y^2 = a^2 \end{cases}$

3.289. $\begin{cases} |x+1| + |y+2| = 1,5 \\ (x+1)^2 + (y+2)^2 = a^2 \end{cases}$

3.290. $\begin{cases} |x-0,5| + |y+0,5| = 1 \\ (x-0,5)^2 + (y+0,5)^2 = a^2 \end{cases}$

§ 9. УРАВНЕНИЯ И СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ, СОДЕРЖАЩИЕ НЕИЗВЕСТНЫЕ ПОД ЗНАКОМ АБСОЛЮТНОЙ ВЕЛИЧИНЫ

1) $|x| = a \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = a, x \geq 0 \\ x = -a, x < 0 \end{array} \right.$;

2) $|x| = |b| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = b \\ x = -b \end{array} \right.$.

Сложность «0»

В задачах **3.291—3.300** решить уравнение:

3.291. $|5 - 4x| = 1$

3.292. $|2 - 5x| = 16$

3.293. $|5x - 3| = 4$

3.294. $|4x - 1| = 7$

3.295. $|3x - 3| = 6$

3.296. $|5x + 4| = 10$

3.297. $|10x - 2| = 4$

3.298. $|7 - 5x| = 13$

3.299. $|8x - 3| = 21$

3.300. $|5x + 2| = 4$

Сложность «1»

В задачах **3.301—3.310** найти целочисленные решения уравнения:

3.301. $x^2 - 3x + 2|x - 2| = 0$

3.302. $x^2 + 2 - |x - 3| - 5x = 0$

3.303. $x^2 + x - |x + 3| - 11 = 0$

3.304. $x^2 - 3x - |x - 2| + 1 = 0$

3.305. $x^2 - 4x - |x + 1| - 11 = 0$

3.306. $x^2 + 4x - |x + 5| - 19 = 0$

3.307. $x^2 - 4x + |x - 3| - 7 = 0$

3.308. $x^2 - 5x + |x - 4| + 1 = 0$

3.309. $x^2 + 2x - |x + 3| - 21 = 0$

3.310. $x^2 - 9x - |x - 5| + 21 = 0$

Сложность «2»

В задачах **3.311—3.320** решить уравнение:

3.311. $|2x - 1| + 6x = |2x - 4| + 15$

3.312. $|x - 2| + 3x = |x - 5| + 18$

3.313. $|x + 1| - 8x = |x - 5| + 4$

3.314. $|x + 3| - 7x = |x + 6| + 11$

3.315. $|x + 4| + 2x = |x + 1| - 7$

3.316. $|1 - x| + 4x = |x| + 15$

3.317. $|2 - x| - x = |2x - 1| - 21$

3.318. $|x - 5| + 3x = |2x - 4| + 11$

3.319. $|x - 0{,}5| - 2x = |2x + 1| - 12$

3.320. $|x + 1{,}5| - 6x = |x - 7| - 7{,}5$

Сложность «3»

В задачах **3.321—3.330** решить уравнение:

3.321. $|x + 2| - |x - 3| + |x - 1| = 4$

3.322. $|x - 2| + |x + 4| - |x - 3| = 5$

3.323. $|x - 1| + |x + 2| - |x + 1| = 2$

3.324. $|x - 2| - |x - 3| + |x + 3| = 1$

3.325. $|x - 1| - |x - 4| + |x + 1| = 2$

3.326. $|x - 2| - |x - 1| + |x + 2| = 5$

3.327. $|x - 2| - |x - 1| + |x + 1| = 3$

3.328. $|x + 2| - |x - 3| + |x - 1| = 1$

3.329. $|x + 5| - |x - 3| + |x - 1| = 4$

3.330. $|x + 2| - |x - 3| - |x - 2| = 3$

Сложность «3»

В задачах **3.331—3.340** определить, при каких значениях параметра a уравнение имеет ровно три различных действительных корня:

3.331. $|x^2 - 2x - 3| = a$

3.332. $|x^2 - 3x + 2| = a$

3.333. $|5 + 2x - x^2| = a$

3.334. $|2x^2 - 6x + 1| = a$

3.335. $|4x^2 + 10x - 3| = 0{,}5a$

3.336. $|1 - x - x^2| = a$

3.337. $|0{,}5x^2 + x - 1| = -a$

3.338. $|5 + 2x - x^2| = -a$

3.339. $|3x^2 + 6x + 3| = -0{,}5a$

3.340. $|2 - 3x - x^2| = 5a$

Сложность «3»

В задачах **3.341—3.350** найти все значения параметра a, при которых уравнение имеет ровно три различных действительных корня:

3.341. $x^2 - 6|x| + 5 = a$

3.342. $x^2 - 3|x| + 2 = a$

3.343. $x^2 - 7|x| + 10 = a$

3.344. $x^2 - 9|x| + 18 = a$

3.345. $x^2 - 3|x| = a$

3.346. $x^2 - 5|x| + 4 = a$

3.347. $x^2 - 6|x| + 8 = a$

3.348. $x^2 - 10|x| + 21 = a$

3.349. $x^2 - 8|x| + 12 = a$

3.350. $x^2 - 7|x| + 12 = a$

Сложность «3»

В задачах **3.351—3.360** найти, при каких значениях параметра a уравнение имеет ровно три различных действительных корня:

3.351. $|x^2 - 2ax| = a$

3.352. $|x^2 + ax| = 2a$

3.353. $|x^2 - 6ax| = 81a$

3.354. $|x^2 + 5ax| = 10a$

3.355. $|x^2 + 3ax| = \frac{9}{16}a$

3.356. $|x^2 - 8ax| = 16a$

3.357. $|x^2 + 4ax| = 6a$

3.358. $|x^2 + 10ax| = 100a$

3.359. $|x^2 + 7ax| = \frac{49}{64}a$

3.360. $|x^2 + 2ax| = 4a$

Сложность «2»

В задачах **3.361—3.370** решить систему уравнений:

3.361. $\begin{cases} |y-10| - |x+6| = 10 \\ \dfrac{y-30}{x-4} = 2 \end{cases}$

3.362. $\begin{cases} |2x+1| + |y-2| = 4 \\ \dfrac{y+0{,}4}{x+1{,}3} = 3 \end{cases}$

3.363. $\begin{cases} 2|x+2|-5|y+10|=20 \\ \dfrac{y+2}{x-28}=\dfrac{4}{15} \end{cases}$

3.364. $\begin{cases} |4x-3|+|9-2y|=2 \\ \dfrac{y-4}{2x-1}=1 \end{cases}$

3.365. $\begin{cases} 2|x-3|-5\,|y-4|=10 \\ \dfrac{x-13}{y-6}=5 \end{cases}$

3.366. $\begin{cases} \left|\dfrac{8x}{3}+2\right|+|y+0,1|=\dfrac{4}{3} \\ \dfrac{y+0,9}{2x+1,9}=2 \end{cases}$

3.367. $\begin{cases} 2|x-1|-|3-y|=2 \\ \dfrac{x-4}{y-7}=\dfrac{3}{4} \end{cases}$

3.368. $\begin{cases} 0,2\cdot|5x+1|+|13-6y|=9 \\ \dfrac{19-5x}{3y-4}=8 \end{cases}$

3.369. $\begin{cases} |0,5x+1|+\dfrac{1}{4}|2y-3|=1 \\ \dfrac{x+1}{2y-5}=\dfrac{1}{2} \end{cases}$

3.370. $\begin{cases} |2x+7|+\dfrac{1}{7}|y-7|=6 \\ \dfrac{y+14}{x+5}=14 \end{cases}$

Сложность «2»

В задачах 3.371—3.380 решить систему уравнений:

3.371. $\begin{cases} 2|y|-7|x|+7,04=0 \\ \dfrac{3-5y}{\sqrt{-x-1}}=-2\sqrt{-x-1} \end{cases}$

3.372. $\begin{cases} 2|x+3|+11|y|=17,2 \\ \dfrac{3y-2,6}{\sqrt{x+2}}=\sqrt{x+2} \end{cases}$

3.373. $\begin{cases} 3|y|-2|x|=2,9 \\ \dfrac{2x+13,5}{\sqrt{-y-5}}=-\sqrt{-y-5} \end{cases}$

3.374. $\begin{cases} 5\sqrt{-x-0,8}=\dfrac{-6y-3,3}{\sqrt{-x-0,8}} \\ 3|x|-|2y+1|=6,7 \end{cases}$

3.375. $\begin{cases} |3x|+|y|=29,9 \\ \dfrac{-2x-5}{\sqrt{-y-2}}=5\sqrt{-y-2} \end{cases}$

3.376. $\begin{cases} \dfrac{2y-11,3}{\sqrt{x-4}}=3\sqrt{x-4} \\ |x-3,1|+|3,1-y|=7,7 \end{cases}$

3.377. $\begin{cases} |x|+|y+7|=11,4 \\ \dfrac{3y+18,3}{\sqrt{-x-8}}=2\sqrt{-x-8} \end{cases}$

3.378. $\begin{cases} \dfrac{1-5y}{\sqrt{-x-4}}=-\sqrt{-x-4} \\ 7|x|-4|y+1|=28,16 \end{cases}$

3.379. $\begin{cases} 3|y| - |x+1,5| = 2,5 \\ \dfrac{2x+7}{\sqrt{-y-1}} = -3\sqrt{-y-1} \end{cases}$

3.380. $\begin{cases} \dfrac{5-4y}{\sqrt{x-2}} = -\dfrac{9}{2}\sqrt{x-2} \\ |2x+3| - |y| = 14,5 \end{cases}$

Сложность «2»

В задачах **3.381—3.390** решить систему уравнений:

3.381. $\begin{cases} 2 \cdot |x+1| = 6+2y \\ |y+3| + 4x = -10 \end{cases}$

3.382. $\begin{cases} |x+5| = 3y-4 \\ |3y-4| = 2x+8 \end{cases}$

3.383. $\begin{cases} 3 \cdot |x-5| + 4 = y \\ |y-3| = 4x-12 \end{cases}$

3.384. $\begin{cases} 3 \cdot |x-5| = y-4 \\ |7-y| = 15-3x \end{cases}$

3.385. $\begin{cases} 3 \cdot |x+5| + 3 = y \\ |y-2| - 4x = 28 \end{cases}$

3.386. $\begin{cases} 4 \cdot |3-x| = y-3 \\ |y-2| = 11(x-1) \end{cases}$

3.387. $\begin{cases} |y+0,5| + x = -1 \\ |x+4| = 2y+1 \end{cases}$

3.388. $\begin{cases} |y-5| + x = 3 \\ |x-1| + 5 = y \end{cases}$

3.389. $\begin{cases} |2-y| - \dfrac{x}{3} = 1 \\ |x-3| = \dfrac{y}{2} - 2 \end{cases}$

3.390. $\begin{cases} \left|\dfrac{x}{5} + \dfrac{2}{5}\right| - 0,5 = \dfrac{y}{7} \\ |y-0,1| + 4 = 3x \end{cases}$

Сложность «3»

В задачах **3.391—3.400** решить систему уравнений:

3.391. $\begin{cases} \left|\dfrac{y}{2} + 1\right| = 2x+4 \\ \left|x + \dfrac{1}{2}\right| = \dfrac{5}{2} - y \end{cases}$

3.392. $\begin{cases} \left|x + \dfrac{1}{2}\right| = 5-y \\ |y-2| = 3-2x \end{cases}$

3.393. $\begin{cases} 2 \cdot |x+2| = y+2 \\ |y-1| = 5-2x \end{cases}$

3.394. $\begin{cases} |0,2x-1| = y-2 \\ |2y+2| = 8+x \end{cases}$

3.395. $\begin{cases} |x-0,1| = 3,6 + \dfrac{y}{2} \\ |y-1| = 4x+28 \end{cases}$

3.396. $\begin{cases} |2x+0,2| = 2y-0,2 \\ |y-0,2| = -11x \end{cases}$

3.397. $\begin{cases} |0,2x-2| + 1 = y \\ |2y+4| + x = 7 \end{cases}$

3.398. $\begin{cases} |y+3| = 4x+8 \\ |2x+2| = 7-2y \end{cases}$

3.399. $\begin{cases} |x-0,5|=6-y \\ |y+1|=5-2x \end{cases}$

3.400. $\begin{cases} |x-1,1|+y=6,6 \\ |y+0,4|=6,2-2x \end{cases}$

Сложность «3»

В задачах 3.401—3.410 решить систему уравнений:

3.401. $\begin{cases} |x+2|-12x-y+1=0 \\ |y-1|+13x-\dfrac{y}{3}-1=0 \end{cases}$

3.402. $\begin{cases} |y+2|-10x-\dfrac{y}{2}+2=0 \\ |x-2|+12x-y-1=0 \end{cases}$

3.403. $\begin{cases} |y-3|+4x-2y+2=0 \\ |x+2|-8x-2y+26=0 \end{cases}$

3.404. $\begin{cases} |y+1|-9x-\dfrac{2}{3}y+7=0 \\ |x-1|+4x-y-1=0 \end{cases}$

3.405. $\begin{cases} |x-2|+6x-\dfrac{4}{5}y-8=0 \\ |y+1|-3x-y+5=0 \end{cases}$

3.406. $\begin{cases} |x-1|+4x-\dfrac{y}{2}-16=0 \\ |y+1|-x-2y+9=0 \end{cases}$

3.407. $\begin{cases} |x+2|-3x-\dfrac{2}{3}y-24=0 \\ |y+1|-\dfrac{3}{4}x-2y-12,5=0 \end{cases}$

3.408. $\begin{cases} |x-1|+x-\dfrac{3}{4}y+2=0 \\ |y+1|-\dfrac{2}{3}x-\dfrac{1}{4}y-6=0 \end{cases}$

3.409. $\begin{cases} |x+3|-2x-\dfrac{1}{3}y-3=0 \\ |y-3|+x-\dfrac{2}{3}y+3=0 \end{cases}$

3.410. $\begin{cases} |x-2|+\dfrac{2}{5}x-y+1=0 \\ |y+2|-x-\dfrac{4}{3}y+5=0 \end{cases}$

§ 10. ИРРАЦИОНАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ

Сложность «0»

В задачах **3.411—3.420** решить уравнение:

3.411. $\sqrt{x+1+\sqrt{2}}=\sqrt[4]{2}$

3.412. $\sqrt{\sqrt{3}-x}=\sqrt[4]{3}$

3.413. $\sqrt{x+2\sqrt{2}}=\sqrt{2\sqrt{2}}$

3.414. $\sqrt{x-2\sqrt{3}-1}=\sqrt{3}-1$

3.415. $\sqrt{3x+4\sqrt{5}}=\sqrt{5}+2$

3.416. $\sqrt{6\sqrt{3}-x}=\sqrt{3}+3$

3.417. $\sqrt{x+7+2\sqrt{6}}=\sqrt{3}+\sqrt{2}$

3.418. $\sqrt{2x-2\sqrt{10}+4}=\sqrt{5}-\sqrt{2}$

3.419. $\sqrt{2\sqrt{14}-x}=\sqrt{7}+\sqrt{2}$

3.420. $\sqrt{2\cdot\sqrt[4]{2}+2x+\sqrt{2}}=\sqrt[4]{2}+1$

Сложность «0»

В задачах **3.421—3.430** решить уравнение:

3.421. $\sqrt{\frac{9-5x}{3-8x}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$

3.422. $\sqrt{\frac{4-x}{x+2}}=\frac{1}{\sqrt{3}}$

3.423. $\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}=3$

3.424. $\sqrt{\frac{19-2x}{2-x}}=\sqrt{\frac{3}{2}}$

3.425. $\sqrt{\frac{2+x}{2x+1}}=\sqrt{3}$

3.426. $\sqrt{\frac{x+3}{x+4}}=\frac{1}{\sqrt{5}}$

3.427. $\sqrt{\frac{x-4}{2-3x}}=1$

3.428. $\sqrt{\frac{x}{x+1}}-\frac{1}{\sqrt{6}}=0$

3.429. $\sqrt{\frac{6-2x}{5+x}}=\sqrt{2}$

3.430. $\sqrt{\frac{2x-7}{x+6}}=\sqrt{\frac{5}{2}}$

Сложность «0»

В задачах **3.431—3.440** решить уравнение:

3.431. $\sqrt{\frac{1}{1-x}+\frac{1}{x}}=\frac{2}{\sqrt{1-x}}$

3.432. $\sqrt{\frac{1}{x-2}-\frac{3}{2x}}=\frac{1}{\sqrt{2x}}$

3.433. $\sqrt{2-\frac{x}{x+1}}=\frac{4}{\sqrt{x+1}}$

3.434. $\sqrt{\frac{2}{x+3}-\frac{1}{x+1}}=\sqrt{\frac{3}{x+3}}$

3.435. $\sqrt{\frac{x+1}{x-3}-\frac{x}{x+2}}=\frac{1}{\sqrt{x+2}}$

3.436. $\sqrt{\frac{x}{1-x}+\frac{1+x}{x}}=\frac{2}{\sqrt{x}}$

3.437. $\sqrt{\frac{1}{x-1}+\frac{1}{2}}=\frac{3}{\sqrt{x-1}}$

3.438. $\sqrt{\frac{1}{2x}-\frac{1}{2x+1}}=\frac{1}{\sqrt{3x}}$

3.439. $\sqrt{\frac{2x}{x^2-1}}=\frac{2}{\sqrt{x+1}}$

3.440. $\sqrt{\frac{31-x}{9-x^2}}=\frac{3}{\sqrt{3-x}}$

Сложность «1»

В задачах **3.441—3.450** решить уравнение:

3.441. $\sqrt{x+2}=2+\sqrt{x-6}$

3.442. $\sqrt{x}+\sqrt{25-x}=5$

3.443. $2+\sqrt{x-7}=\sqrt{x+1}$

3.444. $\sqrt{x}+\sqrt{16-x}=4$

3.445. $\sqrt{x+20}=3+\sqrt{x-1}$

3.446. $\sqrt{22-x}=2+\sqrt{10-x}$

3.447. $2\sqrt{x+18}=15-\sqrt{4x-3}$

3.448. $\sqrt{2x+2}=1-\sqrt{2x+1}$

3.449. $\sqrt{x}+2=\sqrt{x+4}$

3.450. $2\sqrt{1-x}=\sqrt{16-4x}-2$

Сложность «1»

В задачах **3.451—3.460** решить уравнение:

3.451. $(x^2+4x)\sqrt{x-3}=0$

3.452. $(x^2-1)\sqrt{2x+1}=0$

3.453. $(x^2+x)\sqrt{x-1}=0$

3.454. $(x^2-4x)\sqrt{1-x}=0$

3.455. $(16-x^2)\sqrt{3+x}=0$

3.456. $(x^2-4)\sqrt{x-1}=0$

3.457. $(x^2+3x)\sqrt{2+x}=0$

3.458. $(9-x^2)\sqrt{2+x}=0$

3.459. $(x^2-x)\sqrt{x-2}=0$

3.460. $(x^2-2x)\sqrt{x-1}=0$

Сложность «1»

В задачах **3.461—3.470** решить уравнение:

3.461. $\sqrt{x+1}=11-x$

3.462. $\sqrt{4-x}=x+2$

3.463. $\sqrt{12-x}=x$

3.464. $\sqrt{7-x}=x-1$

3.465. $x-5=\sqrt{x+1}$

3.466. $\sqrt{2x-7}=x-21$

3.467. $\sqrt{1+5x}=1-x$

3.468. $2\sqrt{x+5}=x+2$

3.469. $4\sqrt{x+6}=x+1$

3.470. $\sqrt{x-2}=x-4$

Сложность «2»

В задачах **3.471—3.480** решить уравнение:

3.471. $2\sqrt{x+1}-\frac{4}{\sqrt{x+1}}+7=0$

3.472. $10\sqrt{x+3}+17=\frac{6}{\sqrt{x+3}}$

3.473. $\frac{4}{5x+25}=\frac{1}{1-2\sqrt{x+5}}$

3.474. $4\sqrt{x-5}=\frac{13}{\sqrt{x-5}}-9$

3.475. $25\sqrt{x-3}-22=\frac{3}{\sqrt{x-3}}$

3.476. $5\sqrt{x}+9\cdot\sqrt[4]{x}-2=0$

3.477. $2x^3-x\sqrt{x}-120=0$

3.478. $\frac{16+9\sqrt{x}}{25x}=1$

3.479. $10x-\sqrt{2x+1}=1$

3.480. $2\sqrt{x+6}=5x+23$

Сложность «2»

В задачах **3.481—3.490** решить уравнение:

3.481. $\frac{8}{\sqrt{10-x}}-\sqrt{10-x}=2$

3.482. $\sqrt{x+3}+\frac{4}{\sqrt{x+3}+3}=2$

3.483. $\frac{3}{\sqrt{3-x}+1}+2\sqrt{3-x}=5$

3.484. $\sqrt{\frac{2-x}{2+x}}-4\sqrt{\frac{2+x}{2-x}}=-3$

3.485. $\sqrt{\frac{2x+1}{x-1}}-2\sqrt{\frac{x-1}{2x+1}}=1$

3.486. $\sqrt{\frac{x+1}{1-x}}-\sqrt{\frac{1-x}{x+1}}=\frac{3}{2}$

3.487. $\sqrt{\frac{3-x}{2+x}}-3\sqrt{\frac{2+x}{3-x}}=2$

3.488. $\frac{4}{\sqrt{x}+2}+\frac{\sqrt{x}-3}{2}=2$

3.489. $\sqrt{\frac{2-x}{x-1}}-7\sqrt{\frac{x-1}{2-x}}=6$

3.490. $\frac{5}{\sqrt{x-1}}-2\sqrt{x-1}=3$

Сложность «2»

В задачах **3.491—3.500** решить уравнение:

3.491. $\sqrt{|x-4|}=x-4$

3.492. $\sqrt{|2x-3|}=2x-3$

3.493. $\sqrt{|x+1|}=x+1$

3.494. $\sqrt{|1-2x|}=1-2x$

3.495. $\sqrt{|x-3|}=x-3$

3.496. $\sqrt{|5-2x|}=5-2x$

3.497. $\sqrt{|x-1|}=x-1$

3.498. $\sqrt{|x-2|}=x-2$

3.499. $\sqrt{|x-6|}=x-6$

3.500. $\sqrt{|7-2x|}=2x-7$

Сложность «2»

В задачах **3.501—3.510** решить уравнение:

3.501. $\sqrt{|x-7|}=x-1$

3.502. $\sqrt{|x-10|}=x+2$

3.503. $\sqrt{|x-5|}=x+1$

3.504. $\sqrt{|x-8|}=x-2$

3.505. $\sqrt{|x-15|} = x-3$

3.506. $\sqrt{|x-17|} = x+3$

3.507. $\sqrt{|2x-32|} = x-4$

3.508. $\sqrt{|3x-9|} = x+3$

3.509. $\sqrt{|x-16|} = x-4$

3.510. $\sqrt{\left|\frac{x}{2}+4\right|} = x-2$

Сложность «3»

В задачах **3.511—3.520** решить уравнение:

3.511. $\sqrt{4x^2-1}+x=|x-2|$

3.512. $\sqrt{1-x^2}-x=|2x-1|$

3.513. $\sqrt{4-x^2}-2x=|2-x|$

3.514. $\sqrt{x^2-3}+|x-1|=x$

3.515. $\sqrt{x^2+x+1}=x+|2x-1|$

3.516. $\sqrt{x^2-8x}=x-|x-3|$

3.517. $\sqrt{2x^2-3x+1}=|x+1|-x$

3.518. $\sqrt{x^2+3x+3}=\frac{x}{2}+\left|\frac{x}{2}-1\right|$

3.519. $\sqrt{1-x-x^2}=x-|x-1|$

3.520. $\sqrt{1-2x+4x^2}=x+|x+1|$

Сложность «3»

В задачах **3.521—3.530** определить, при каких значениях параметра уравнение имеет единственное решение:

3.521. $\sqrt{x+a}=x+1$

3.522. $\sqrt{x+1}=x-a$

3.523. $\sqrt{a-x}=2-x$

3.524. $\sqrt{2-x}=a-x$

3.525. $\sqrt{x-a}=1-x$

3.526. $\sqrt{a-x}=2+x$

3.527. $\sqrt{x+1}=a-x$

3.528. $\sqrt{a+2x}=x-1$

3.529. $\sqrt{x-a}=0,5x$

3.530. $\sqrt{x+a}=0,5x+1$

Сложность «2»

В задачах **3.531—3.540** решить систему уравнений:

3.531. $\begin{cases} \sqrt{x}+\sqrt{x+y}=4 \\ y-x=7 \end{cases}$

3.532. $\begin{cases} \sqrt{2x+y+1}-\sqrt{x+y}=1 \\ 3x+2y=4 \end{cases}$

3.533. $\begin{cases} \sqrt{x}-\sqrt{y}=3 \\ x+y=17 \end{cases}$

3.534. $\begin{cases} \sqrt{x+y}+\sqrt{x-y}=3 \\ x+y=4 \end{cases}$

3.535. $\begin{cases} \sqrt{x}+\sqrt{y}=(3/2)\sqrt{xy} \\ x+y=5 \end{cases}$

3.536. $\begin{cases} \sqrt{x-y}+\sqrt{x+y+1}=3 \\ x-y=1 \end{cases}$

3.537. $\begin{cases} \sqrt{x} - \sqrt{y} = 0,5\sqrt{xy} \\ x+y=5 \end{cases}$

3.538. $\begin{cases} \sqrt{x-y+4} - \sqrt{x+y} = 1 \\ 2x+y=1,5 \end{cases}$

3.539. $\begin{cases} \sqrt{x+y} + \sqrt{x-y} = 6 \\ x+2y=37 \end{cases}$

3.540. $\begin{cases} \sqrt{2x+y} - \sqrt{y-x} = 1 \\ x+y=3 \end{cases}$

Сложность «3»

В задачах **3.541—3.550** найти целочисленные решения системы уравнений:

3.541. $\begin{cases} \sqrt{2x+y+2} = 3 \\ \sqrt{x+2y+5} = y-x \end{cases}$

3.542. $\begin{cases} \sqrt{x+3y+1} = 2 \\ \sqrt{2x-y+2} = 7y-6 \end{cases}$

3.543. $\begin{cases} \sqrt{y-x+5} = 3 \\ \sqrt{x+y-5} = 11-2y \end{cases}$

3.544. $\begin{cases} \sqrt{x+y+1} = 3 \\ \sqrt{3x-y+8} = 2y-12 \end{cases}$

3.545. $\begin{cases} \sqrt{x+9y+7} = 6 \\ \sqrt{2x-y} = 4y-11 \end{cases}$

3.546. $\begin{cases} \sqrt{3y-x+8} = 4 \\ \sqrt{2y-x+4} = 6x-3 \end{cases}$

3.547. $\begin{cases} \sqrt{2y+3x+2} = 4 \\ \sqrt{4y-2x-3} = 3x-3 \end{cases}$

3.548. $\begin{cases} \sqrt{3x+5y+3} = 4 \\ \sqrt{x+y+1} = 2y-2 \end{cases}$

3.549. $\begin{cases} \sqrt{2y+9x+4} = 5 \\ \sqrt{3y-2x} = 3x+1 \end{cases}$

3.550. $\begin{cases} \sqrt{5y-x+11} = 6 \\ \sqrt{2y+x-1} = 2x-6 \end{cases}$

Сложность «3»

В задачах **3.551—3.560** решить систему уравнений:

3.551. $\begin{cases} \sqrt{\frac{x}{y}} + \sqrt{\frac{y}{x}} = \frac{5}{2} \\ x+y=10 \end{cases}$

3.552. $\begin{cases} \sqrt{\frac{x}{y}} - \sqrt{\frac{y}{x}} = \frac{3}{2} \\ x-y=3 \end{cases}$

3.553. $\begin{cases} \sqrt{\frac{2x-1}{y+2}} + \sqrt{\frac{y+2}{2x-1}} = 2 \\ x+y=6 \end{cases}$

3.554. $\begin{cases} \sqrt{\frac{y}{x}} - 2\sqrt{\frac{x}{y}} = 1 \\ x+y=40 \end{cases}$

3.555. $\begin{cases} \sqrt{\frac{3x-2y}{2x}} + \sqrt{\frac{2x}{3x-2y}} = 2 \\ x-y=5 \end{cases}$

3.556. $\begin{cases} \sqrt{\frac{x+1}{y}} + \sqrt{\frac{y}{x+1}} = 2 \\ x+y=11 \end{cases}$

3.557. $\begin{cases} \sqrt{\frac{x+1}{y+2}} - \sqrt{\frac{y+2}{x+1}} = \frac{3}{2} \\ x-2y=13 \end{cases}$

3.558. $\begin{cases} \sqrt{\frac{x+y}{2x-1}} + \sqrt{\frac{2x-1}{x+y}} = \frac{5}{2} \\ x+y=1 \end{cases}$

3.559. $\begin{cases} \sqrt{\frac{x-y}{x+y}} + \sqrt{\frac{x+y}{x-y}} = \frac{10}{3} \\ x+y=3 \end{cases}$

3.560. $\begin{cases} \sqrt{\frac{3x}{x+y}} - 2 + \sqrt{\frac{x+y}{3x}} = 0 \\ y+2x=4 \end{cases}$

§ 11. ЗАДАЧИ НА СОСТАВЛЕНИЕ УРАВНЕНИЙ

Сложность «0»

3.561. Скорый поезд за час проходит 60 км, а пассажирский — 40 км. Определить расстояние между двумя городами, если известно, что скорый поезд проходит это расстояние на 2 ч 15 мин быстрее пассажирского.

3.562. Из двух городов, расстояние между которыми 135 км, выехали одновременно навстречу друг другу два велосипедиста. Скорость одного из них равна 12 км/ч, а другого — 15 км/ч. Через сколько часов расстояние между ними в первый раз составит 27 км?

3.563. Велосипедист должен проехать путь из пункта A в пункт B за определенный срок. Если он будет ехать со скоростью 12 км/ч, то опоздает на 0,5 ч, если же поедет со скоростью 15 км/ч, то приедет в пункт B на 12 мин раньше срока. Определить расстояние между пунктами A и B.

3.564. Расстояние между двумя станциями пассажирский поезд проходит на 45 мин быстрее, чем товарный. Определить это расстояние, если известно, что скорость пассажирского поезда равна 48 км/ч, а скорость товарного — 36 км/ч.

3.565. Из двух городов, расстояние между которыми 2400 км, вылетели одновременно навстречу друг другу два самолета и встретились через 4 ч. Определить скорость второго самолета, если скорость первого равна 350 км/ч.

3.566. Проехав за час половину пути, машинист увеличил скорость электропоезда на 15 км/ч и прошел вторую половину пути за 45 мин. С какой скоростью шел электропоезд первую половину пути?

3.567. Два велосипедиста отправились одновременно из пунктов A и B навстречу друг другу и встретились через 2 ч. Определить скорость движения первого велосипедиста, если расстояние между пунктами A и B равно 42 км, а скорость второго велосипедиста на 3 км/ч меньше скорости первого.

3.568. Из двух городов, расстояние между которыми 150 км, одновременно выехали навстречу друг другу велосипедист и мотоциклист. Скорость велосипедиста в 5 раз меньше скорости мотоциклиста. Сколько километров проедет каждый из них до встречи?

3.569. От двух пристаней, расстояние между которыми 250 км, вышли навстречу друг другу «Ракета» на подводных крыльях со скоростью 50 км/ч и теплоход со скоростью 30 км/ч. Теплоход вышел на 3 ч раньше, чем «Ракета». Через сколько часов после выхода «Ракеты» произойдет встреча?

3.570. Из пункта *A* в пункт *C* вышла грузовая машина со скоростью 35 км/ч. Одновременно с ней в том же направлении из пункта *B*, отстоящего от *A* на 150 км, вышла легковая машина со скоростью 60 км/ч. Через сколько часов легковая машина догонит грузовую?

Сложность «1»

3.571. На хрустальную люстру подняли цену на 45%, а затем еще на 20%. На сколько процентов увеличилась цена люстры после двух повышений?

3.572. Цену на телефонный аппарат повышали дважды. После второго повышения аппарат стал стоить в 6 раз дороже, чем в начале. На сколько процентов повысили цену во второй раз, если в первый раз цена была повышена на 50%?

3.573. На ковер повысили цену на 10%, а затем еще на 15%. На сколько процентов больше стал стоить ковер в результате обоих повышений цены?

3.574. Цену на словарь повышали дважды. После второго повышения словарь стал стоить в два раза дороже, чем вначале. На сколько процентов повысили цену в первый раз, если во второй раз цена была повышена на 25%?

3.575. Цену на калькулятор сначала повысили на 25%, а потом еще на 65%. Во сколько раз увеличилась цена на калькулятор?

3.576. На автомобиль подняли цену сначала на 100%, а затем еще на 150%. Какой процент от теперешней цены автомобиля составляет его первоначальная цена?

3.577. На столовый сервиз сначала повысили цену на 25%, а затем еще на 20%. Во сколько раз увеличилась в итоге цена на сервиз?

3.578. На телевизор цена была повышена на 100%, а затем еще на 20%. На сколько процентов в итоге повысили цену?

3.579. На мебельный гарнитур повышали цену дважды. На сколько процентов повысили цену на гарнитур во второй раз, если каждый раз повышали цену на одинаковое число процентов, а после второго повышения гарнитур стоил в 1,44 раза больше, чем до первого повышения?

3.580. Цветной телевизор два месяца назад стоил на 20% дешевле, чем месяц назад, когда он стоил на 10% дешевле, чем сейчас. На сколько процентов дешевле стоил телевизор два месяца назад, чем сейчас?

Сложность «I»

3.581. Сколько граммов воды надо добавить к 100 г 30%-ной соляной кислоты, чтобы получить 10%-ную кислоту?

3.582. Сколько килограммов воды надо выпарить из 100 кг массы, содержащей 90% воды, чтобы получить массу, содержащую 80% воды?

3.583. Известно, что 5% первого числа и 4% второго составляют в сумме 44, а 4% первого числа и 5% второго составляют в сумме 46. Найти эти числа.

3.584. Сумма двух чисел равна 2490. Найти эти числа, если 8,5% одного из них равны 6,5% другого.

3.585. Известно, что 30% числа *A* на 10 больше, чем 20% числа *B*, а 30% числа *B* на 35 больше, чем 20% числа *A*. Найти числа *A* и *B*.

3.586. Токарь и его ученик должны были изготовить за смену 65 деталей. Благодаря тому, что токарь перевыполнил план на 10%, а ученик — на 20%, они изготовили 74 детали. Сколько деталей по плану должны были изготовить за смену токарь и сколько — его ученик?

3.587. Если *А* даст 40% своих денег, а *Б* — 45% имеющихся у него денег, то общая сумма составит 215 тыс. руб. Если же *А* даст 45% имеющихся у него денег, а *Б* — 40% своих денег, то общая сумма составит 21[illegible] тыс. руб. Сколько тыс. руб. у *А* и *Б* в отдельности?

3.588. Морская вода содержит 5% соли. Сколько килограммов пресной воды нужно добавить к 30 кг морской воды, чтобы концентрация соли составляла 1,5%?

3.589. Смешали 30%-ный раствор соляной кислоты с 10%-ным и получили 600 г 15%-ного раствора. Сколько граммов каждого раствора было взято?

3.590. Кусок сплава меди и цинка массой 36 кг содержит 45% меди. Какую массу меди нужно добавить к этому куску, чтобы полученный сплав содержал 60% меди?

Сложность «I»

3.591. Бассейн наполняется двумя трубами за 6 ч. Одна первая труба наполняет его на 5 ч быстрее, чем одна вторая. За какое время каждая труба, действуя отдельно, может наполнить бассейн?

3.592. Два трактора различной мощности, работая совместно, вспахали поле за 12 ч. Если бы сначала работал только один трактор и вспахал бы половину поля, а затем один второй закончил бы работу, то поле было бы вспахано за 25 ч. За какое время каждый трактор, работая отдельно, может вспахать все поле?

3.593. Два подъемных крана, работая вместе, разгрузили баржу за 7,5 ч. За какое время может разгрузить баржу каждый из них, работая отдельно, если один может разгрузить ее на 8 ч быстрее, чем другой?

3.594. Два экскаватора вырыли котлован за 24 дня. Первый экскаватор мог бы выполнить эту работу в 1,5 раза быстрее, чем второй. За сколько дней первый экскаватор мог бы выполнить эту работу?

3.595. Если одновременно открыть два крана, то бассейн наполнится за 4 ч 30 мин. Если же наполнить половину бассейна через один кран, а другую половину — через другой, то для наполнения бассейна потребуется 12 ч. За какое время наполняет бассейн каждый кран?

3.596. Двое мастеров, работая вместе, выполняют некоторое задание за 30 дней. После шестидневной совместной работы один из них, работая отдельно, может окончить это задание за 40 дней. За сколько дней каждый из них, работая отдельно, может выполнить задание?

3.597. Две трубы, открытые одновременно, наполняют бассейн за 5 ч. Если расход воды через первую трубу увеличить в 2 раза, а через вторую трубу уменьшить в 2 раза, то бассейн наполнится за 4 ч. За какое время наполняет бассейн первая труба?

3.598. Две машинистки, работая совместно, перепечатывают рукопись за 3 ч. За какое время может сделать это каждая из них в отдельности, если первая может перепечатать рукопись на 3,2 ч быстрее, чем вторая?

3.599. Два крана, открытые одновременно, могут наполнить 5/6 ванны за 18 мин. За какое время наполнит ванну каждый из них, если один наполняет ванну на 18 мин быстрее другого?

3.600. Первая труба наполняет бак на 2 ч дольше, а вторая — на 4,5 ч дольше, чем наполняют этот бак обе трубы, открытые одновременно. Сколько времени потребуется, чтобы наполнить бак через одну первую трубу?

Сложность «2»

3.601. Поезд должен пройти 54 км. Пройдя 14 км, он был задержан на 10 мин у светофора. Увеличив первоначальную скорость на 10 км/ч, он прибыл на место назначения с опозданием на 2 мин. Определить первоначальную скорость.

3.602. Две автомашины выехали одновременно из одного и того же пункта в одном и том же направлении: одна со скоростью — 50 км/ч, другая — 40 км/ч. Спустя полчаса из того же пункта в том же направлении выехала третья машина, которая обогнала первую машину на 1 ч 30 мин позже, чем вторую. Найти скорость третьей машины.

3.603. Турист шел из пункта *А* в пункт *В* со скоростью 6 км/ч, а затем из пункта *В* в пункт *С* со скоростью 4 км/ч. Сколько километров всего прошел турист, если известно, что расстояние от *А* до *В* на 24 км больше, чем от *В* до *С*, и что средняя скорость движения туриста оказалась равной 5,25 км/ч?

3.604. Пароход должен был пройти 72 км с определенной скоростью. Первую половину пути он шел со скоростью на 3 км/ч меньшей, а вторую — на 3 км/ч большей, чем было запланировано. На весь путь пароход затратил 5 ч. На сколько минут опоздал пароход?

3.605. Из двух городов A и B одновременно вышли навстречу друг другу два пешехода. Когда они встретились, то рассчитали, что первому потребуется еще 4 ч 30 мин, чтобы дойти до города B, а второму еще 2 ч, чтобы дойти до города A. Определить скорости пешеходов, если расстояние между A и B равно 30 км.

3.606. Теплоход прошел по течению реки 96 км и столько же против течения, затратив на весь путь 10 ч. Скорость течения реки равна 4 км/ч. Определить скорость теплохода в стоячей воде.

3.607. Из двух городов навстречу друг другу вышли два поезда. Первый шел со скоростью 54 км/ч, а второй, выйдя на 2 ч позже первого, — со скоростью 75 км/ч и до встречи прошел на 102 км больше первого. Каково расстояние между городами?

3.608. Из города A в город B, расстояние между которыми 10 км, отправился пешеход. Через 30 мин после него из A в B отправился велосипедист, скорость которого на 6 км/ч больше скорости пешехода. Велосипедист, обогнав пешехода и доехав до города B, возвратился обратно в A и приехал туда в тот момент, когда пешеход пришел в город B. Определить скорость пешехода.

3.609. Два поезда отправились одновременно из A и B навстречу друг другу. Скорость первого поезда на 10 км/ч больше скорости второго. Поезда встретились в 28 км от середины расстояния AB. Если бы первый поезд отправился из A на 45 мин позже второго, то они встретились бы на середине расстояния AB. Найти расстояние AB и скорости обоих поездов.

3.610. Турист проехал 160 км, причем 5/8 этого пути он ехал на автомашине, а остальную часть — на катере. Скорость катера на 20 км/ч меньше скорости автомашины. На автомашине турист ехал на 15 мин больше времени, чем на катере. Чему равны скорости катера и автомашины?

Сложность «3»

3.611. В банк положен вклад из расчета 3% годовых. Какой доход (в процентах) принесет вклад через 4 года?

3.612. Население некоторой страны увеличивается ежегодно на 5%. На сколько процентов увеличится население за 5 лет?

3.613. Количество бактерий в колбе увеличивается каждый час на 4%. Сколько процентов бактерий должна содержать порция, взятая из колбы через 3 ч, чтобы в колбе осталось первоначальное число бактерий?

3.614. Пятилетний план развития отрасли расчитан на ежегодный прирост производительности труда на 5%. На сколько процентов повысится производительность труда в отрасли за первые три года пятилетки?

3.615. Прирост продукции на заводе по сравнению с предыдущим годом составлял 5%, а за второй год по сравнению с первым — 3%. Каким оказался процент прироста продукции за все три года, если процент прироста продукции за третий год по сравнению со вторым был равен 2%?

3.616. Рост кристалла в год составляет по отношению к его массе 4%. Найти массу кристалла через 4 года, если первоначально она была равна 10 г

3.617. Банк начисляет ежегодно 3% от суммы вклада. Найти наименьшее число лет, за которое вклад вырастет более чем на 10%.

3.618. В банк положен вклад из расчета 10% годовых. Через два года со счета была снята сумма, составляющая 21% от суммы первоначального вклада. Через какое наименьшее число лет после этого сумма вклада окажется больше первоначальной в 1,4 раза?

3.619. Население города ежегодно увеличивается на 1/50 наличного числа жителей. Через какое наименьшее количество лет население города увеличится не менее чем на 10%?

3.620. В банк положен вклад из расчета 8% годовых. Через год вкладчик положил на счет сумму, составляющую 20% первоначального вклада, а еще через три года снял весь вклад. Какая сумма (в процентах к первоначальному вкладу) оказалась на счету вкладчика?

Раздел IV

ЛОГАРИФМЫ. ПОКАЗАТЕЛЬНЫЕ И ЛОГАРИФМИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ

Свойства показательной функции $y = a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$

1°. Область определения функции — множество всех действительных чисел.

2°. Область значений функции — множество всех положительных действительных чисел: $y = a^x > 0$ для любого действительного значения x.

3°. При $a > 1$ функция возрастает: если $x_1 < x_2$, то $a^{x_1} < a^{x_2}$.

При $0<a<1$ функция убывает: если $x_1 < x_2$, то $a^{x_1} > a^{x_2}$.

4°. Если $a^{x_1} = a^{x_2}$, то $x_1 = x_2$.

Свойства логарифмической функции $y = \log_a x$, $a > 0$, $a \neq 1$

1°. Область определения функции — множество всех положительных действительных чисел.

2°. Область значений функции — множество всех действительных чисел.

3°. При $a > 1$ функция возрастает: если $x_2 > x_1 > 0$, то $\log_a x_2 > \log_a x_1$.

При $0 < a < 1$ функция убывает: если $x_2 > x_1 > 0$, то $\log_a x_2 < \log_a x_1$.

Свойства логарифмов:

1°. Определение логарифма. *Логарифмом* числа b по основанию a называется число $c = \log_a b$ такое, что $a^c = b$; при этом должно быть $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$.

2°. Основное логарифмическое тождество:

$$\boxed{\text{Если } b > 0, \text{ то } b = a^{\log_a b}}$$

3°. $\log_a a = 1$; 4°. $\log_a 1 = 0$

5°а. $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$; $x > 0$, $y > 0$, $a > 0$, $a \neq 1$

5°б. $\log_a(xy) = \log_a|x| + \log_a|y|$; $x \neq 0$, $y \neq 0$, $xy > 0$, $a > 0$, $a \neq 1$

6°а. $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$; $x > 0$, $y > 0$, $a > 0$, $a \neq 1$

6°б. $\log_a \frac{x}{y} = \log_a|x| - \log_a|y|$; $x \neq 0$, $y \neq 0$, $\frac{x}{y} > 0$, $a > 0$, $a \neq 1$

7°. $\log_a(x^k) = k \log_a x$; $x > 0$, $a > 0$, $a \neq 1$

8°. Формула перехода к новому основанию логарифма:

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}; \quad a > 0,\ b > 0,\ c > 0,\ a \neq 1,\ c \neq 1$$

9°. $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$; $a > 0$, $b > 0$, $a \neq 1$, $b \neq 1$

10°. $\log_{a^k} b^k = \log_a b$, $a > 0$, $b > 0$, $a \neq 1$, k — любое действительное число.

§ 12. ЛОГАРИФМЫ

Сложность «0»

В задачах **4.001—4.010** вычислить:

4.001. $\log_2 0{,}25$

4.002. $\log_{1/9} 3$

4.003. $\log_3 \frac{1}{27}$

4.004. $\log_{1/3} 3\sqrt{3}$

4.005. $\log_{36} 6$

4.006. $\log_{25} 125$

4.007. $\log_4 \frac{1}{32}$

4.008. $\log_{27} 729$

4.009. $\log_{\sqrt{6}} \frac{1}{6}$

4.010. $\log_{1/16} \frac{1}{4}$

Сложность «0»

В задачах **4.011—4.020** вычислить:

4.011. $\log^2_3 9$

4.012. $\log^3_2 8$

4.013. $\sqrt{\log_3 81}$

4.014. $\log^2_{0,5} 4$

4.015. $\sqrt{\lg 10000}$

4.016. $\log^4_3 \frac{1}{9}$

4.017. $\sqrt[3]{\log_2 256}$

4.018. $\log^2_{1/3} \frac{1}{27}$

4.019. $\log^3_{1/32} 4$

4.020. $\sqrt{\left(-2\log_3 \frac{1}{9}\right)}$

Сложность «0»

В задачах **4.021—4.030** вычислить:

4.021. $\log_2 27 - 2 \cdot \log_2 3 + \log_2 \frac{2}{3}$

4.022. $\log_6 34 - \log_6 17 + \log_6 18$

4.023. $\log_2 39 - \log_2 13 - \log_2 24$

4.024. $\log_3 21 + \log_3 2 - \log_3 14$

4.025. $\log_4 91 - \log_4 13 + \log_4 \frac{2}{7}$

4.026. $\log_3 63 - \log_3 9 + \frac{1}{2}\log_3 \frac{27}{49}$

4.027. $\log_2 3 - \log_2 30 + \log_2 5$

4.028. $\log_4 3 - \log_4 2 + \log_4 \frac{2}{3}$

4.029. $\log_3 4 - 4 \cdot \log_3 2 + \log_3 \frac{4}{9}$

4.030. $\log_5 150 - \log_5 3 + \log_5 \frac{1}{2}$

Сложность «0»

В задачах **4.031—4.040** вычислить:

4.031. $2^{\log_{\sqrt{2}} 5}$

4.032. $6^{\log_{1/\sqrt{6}} 2}$

4.033. $7^{\log_{\sqrt{7}} 4}$

4.034. $3^{\log_3 (\sqrt{3})^8}$

4.035. $4^{\log_2 \sqrt{7}}$

4.036. $2^{\log_4 9}$

4.037. $3^{\log_{27} 125}$

4.038. $\left(\frac{1}{4}\right)^{\log_{1/8} 27}$

4.039. $5^{\log_{1/5} 2}$

4.040. $6^{\log (\sqrt[3]{6})^2}$

Сложность «0»

В задачах **4.041—4.050** вычислить:

4.041. $\log_{\sqrt{2}} \log_{1/3} \frac{1}{9}$

4.042. $\log_9 \log_4 \left(\sqrt[3]{4}\right)$

4.043. $\log^3_{16} \log_3 81$

4.044. $\log_{3/2} \log_{25} 125$

4.045. $\log_{16/9}\log_{27}81$

4.046. $\log_{1/2}\log_2 4$

4.047. $\log_2\log_{\sqrt{3}}9$

4.048. $\log_4^2\log_{1/7}\frac{1}{49}$

4.049. $\log_{1/9}\log_2 8$

4.050. $\log_2\log_3\left(\sqrt[4]{3}\right)$

Сложность «0»

В задачах **4.051—4.060** вычислить:

4.051. $27^{\frac{1}{3\log_{16}81}}$

4.052. $3^{\frac{3}{\log_{(\sqrt[4]{6})}3}}$

4.053. $\left(\sqrt{7}\right)^{\frac{2}{\log_{25}7}}$

4.054. $25^{\frac{1}{2\log_{49}25}}$

4.055. $4^{-\frac{2}{\log_5 4}}$

4.056. $2^{\frac{4}{\log_{(\sqrt[4]{3})}2}}$

4.057. $25^{\frac{1}{\log_6 5}}$

4.058. $7^{\frac{2}{\log_8 7}}$

4.059. $81^{\frac{1}{\log_4 9}}$

4.060. $3^{\frac{4}{\log_7 9}}$

Сложность «1»

В задачах **4.061—4.070** вычислить:

4.061. $\log_{1/4}(\log_2 3\cdot\log_3 4)$

4.062. $0,8(1+9^{\log_3 8})^{\log_{65}5}$

4.063. $49^{1-\log_7 14}+5^{-\log_5 4}$

4.064. $\frac{3}{7}(\log_2 16+27^{\log_3 2})^{\log_{12}49}$

4.065. $32^{\log_4 3-0.1\log_2 3}$

4.066. $10^{2-\lg 2}-25^{\log_5 4}$

4.067. $\log_3 64\cdot\log_2\frac{1}{27}$

4.068. $\log_2\left(\log_{\sqrt{2}}9\cdot\log_{\sqrt{3}}2\right)$

4.069. $81^{-\log_{1/2}3\;\log_{1/3}4+2,5}$

4.070. $0,7\left(2+\left(\sqrt{3}\right)^{\log_3(1/16)}\right)^{\log_{9/4}3}$

Сложность «2»

В задачах **4.071—4.080** вычислить:

4.071. $\dfrac{\log_2^2 10+\log_2 10\cdot\log_2 5-2\log_2^2 5}{\log_2 10+2\log_2 5}$

4.072. $\dfrac{\lg^2 5-2\lg 5\cdot\lg 2-3\lg^2 2}{2(\lg 5-3\lg 2)}$

4.073. $\dfrac{2\log_2^2 3-\log_2^2 12-\log_2 3\cdot\log_2 12}{2\log_2 3+\log_2 12}$

4.074. $\dfrac{3\log_3^2 45-2\log_3 45\cdot\log_3 5-\log_3^2 5}{3\log_3 45+\log_3 5}$

4.075. $\dfrac{\log_4^2 12+3\log_4^2(1/3)+4\log_4 12\cdot\log_4(1/3)}{\log_4 12+3\log_4(1/3)}$

4.076. $\dfrac{\log_5^2 7\sqrt{5}+2\log_5^2 7-3\log_5 7\sqrt{5}\cdot\log_5 7}{\log_5 7\sqrt{5}-\log_5 49}$

4.077. $\dfrac{5\log_7 14\cdot\log_7 4-2\log_7^2 14-2\log_7^2 4}{2\log_7 4-\log_7 14}$

4.078. $\dfrac{4\log_3 12+\log_3^2 4+2\log_3^2 12-3\log_3 4\cdot\log_3 12-2\log_3 4}{\log_3 4-2\log_3 12}$

4.079. $\dfrac{\log_5^2 15-\log_5^2 3+2\log_5 15+2\log_5 3}{\log_5 15+\log_5 3}$

4.080. $\dfrac{\log_2^2 18-4\log_2^2 3+3\log_2 18+6\log_2 3}{\log_2 18+2\log_2 3}$

Сложность «2»

В задачах **4.081—4.090** найти числовое значение данного выражения при указанном условии:

4.081. $3\log_{\sqrt{a}/b}\left(\dfrac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt{b}}\right)+\log_{\sqrt{a}/b} b$ при $\log_b a=3$

4.082. $\log_{\sqrt{ab}}\left(\dfrac{\sqrt{b}}{\sqrt[4]{a}}\right)+\log_{\sqrt{ab}}(a\sqrt{a})$ при $\log_a b=4$

4.083. $\log_{\sqrt{b}/a}\left(\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\right)+\log_{\sqrt{b}/a}\left(\dfrac{1}{\sqrt[4]{a}}\right)$ при $\log_b a=3$

4.084. $(-\log_{a/b}\sqrt{a}+\log_{a^2/b^2} b+\log_b a^2)$ при $\log_b a=5$

4.085. $\log_{\sqrt{a}}\sqrt{b}-\log_{\sqrt{b}}\sqrt{a}+\log_a\left(\sqrt[4]{ab}\right)$ при $\log_a b=0{,}5$

4.086. $\log_{a/\sqrt{b}}\left(\dfrac{\sqrt[5]{a}}{b}\right)+9\log_{a/\sqrt{b}}\sqrt{b}$ при $\log_a b=3$

4.087. $4\log_{\sqrt{ab}}\left(\dfrac{\sqrt{a}}{b}\right)+3\log_{\sqrt{ab}} b^2-\dfrac{2}{\log_b a}$ при $\log_a b=6$

4.088. $\log_{(\sqrt[3]{ab})}\left(\frac{b}{\sqrt[3]{a}}\right)-\frac{2}{\log_{(\sqrt[3]{a})}\left(\sqrt[3]{ab}\right)}+5\log_b\left(\sqrt[5]{b}\right)$ при $\log_a b=7$

4.089. $\log_{b\sqrt{a}}\left(\frac{\sqrt{a}}{b}\right)+\log_{b\sqrt{a}}b^2-\frac{3}{2}\log_a b^2$ при $\log_a b=8$

4.090. $\log_{\sqrt{a}/b}\sqrt{ab}-\frac{1}{\log_{\sqrt{b^3}}(\sqrt{a}/b)}+3\log_b\sqrt{a}$ при $\log_a b=5$

Сложность «2»

В задачах **4.091—4.100** вычислить:

4.091. $\left(3^{1+\frac{1}{2\log_4 3}}+8^{\frac{1}{3\log_4 2}}+1\right)^{0,5}$

4.092. $9^{\log_{\sqrt{3}}\left(\sqrt[4]{3}\right)}+3\cdot 2^{\log_2^2 3}-3^{\log_2 3}\cdot\log_2 8$

4.093. $4^{\log_2 3}\cdot 3^{\log_3^2 2}-9\cdot 2^{\log_3 2}+2^{\log_4 9}$

4.094. $5^{\frac{1}{\log_3 5}}\cdot 5^{\log_5^2 4}-3\cdot 4^{\log_5 4}+\lg 0,01$

4.095. $2^{\frac{1}{2\log_5 2}}\cdot 5^{\log_5^2 2}-\sqrt{5}\cdot 2^{\log_5 2}-(1/3)^{\log_3 25}$

4.096. $10^{\frac{2}{\log_2 10}}\cdot 2^{\log_2^2 6}-4\cdot 6^{\log_2 6}+\left(\sqrt{2}\right)^{\log_2 16}$

4.097. $7^{\frac{1}{2\log_3 7}}\cdot 7^{\log_7^2 8}-\sqrt{3}\cdot 8^{\log_7 8}+\left(\sqrt{7}\right)^{\log_7 9}$

4.098. $\frac{\left(3^{\log^2_{\sqrt{3}}2}-4^{\log_{\sqrt{3}}2}\right)^2-1}{2}$

4.099. $\left(2^{\frac{\log_2 5}{\log_5 2}}-5^{\frac{1}{\log_5 2}}+5^{\log_5 25}\right)^{0,5}$

4.100. $\left(3^{2+\frac{\log_3 4}{\log_4 3}}-9\cdot 4^{\frac{1}{\log_4 3}}+4^{1+\log_4 25}\right)^{0,5}$

Сложность «3»

В задачах **4.101—4.110** вычислить:

4.101. $(\log_2 3+\log_3 16+4)(\log_2 3-2\log_{12}3)\log_3 2-\log_2 3$

4.102. $(\log_2 5+\log_5 2+2)(\log_2 5-\lg 5)\log_5 2-\log_2 5$

4.103. $(\log_2 7 + \log_7 16 + 4)(\log_2 7 - 2\log_{28} 7)\log_7 2 - \log_2 7$

4.104. $(\log_2 9 + \log_9 2 + 2)(\log_2 9 - \log_{18} 9)\log_9 2 - \log_2 9$

4.105. $(\log_3 4 + 9\log_4 3 + 6)(\log_3 4 - 3\log_{108} 4)\log_4 3 - \log_3 4$

4.106. $(\log_5 4 + \log_4 5 + 2)(\log_5 4 - \log_{20} 4)\log_4 5 - \log_5 4$

4.107. $(\log_3 6 + \log_6 81 + 4)(\log_3 6 - \log_{54} 36)\log_6 3 - \log_3 6$

4.108. $(\log_3 2 + \log_2 81 + 4)(\log_3 2 - 2\log_{18} 2)\log_2 3 - \log_3 2$

4.109. $(\log_3 7 + \log_7 3 + 2)(\log_3 7 - \log_{21} 7)\log_7 3 - \log_3 7$

4.110. $(\log_4 6 + \log_6 4 + 2)(\log_4 6 - \log_{24} 6)\log_6 4 - \log_4 6$

§ 13. ПОКАЗАТЕЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ

1) $a^x = a^b \Leftrightarrow x = b,\ a > 0,\ a \neq 1;$
2) $a^x = c \Leftrightarrow x = \log_a c,\ c > 0,\ a > 0,\ a \neq 1.$

Сложность «0»

В задачах **4.111—4.120** решить уравнение:

4.111. $\left(\frac{49}{16}\right)^{x+1} = \left(\frac{4}{7}\right)^9$

4.112. $\left(\frac{3}{5}\right)^{2x} = \left(\frac{25}{9}\right)^{-3}$

4.113. $\left(\frac{16}{9}\right)^{x-1} = \left(\frac{3}{4}\right)^8$

4.114. $\left(\frac{4}{3}\right)^{3x} = \left(\frac{27}{64}\right)^{-7}$

4.115. $(0{,}5)^{5x} = 8^{-3}$

4.116. $(0{,}8)^{x+2} = (1{,}25)^{-4}$

4.117. $\left(\frac{4}{9}\right)^{x} = \left(\frac{3}{2}\right)^{-5}$

4.118. $\left(\frac{5}{6}\right)^{4x} = \left(\frac{36}{25}\right)^{-13}$

4.119. $16^{x-3} = (0{,}25)^{-3}$

4.120. $(4{,}5)^{3x} = \left(\frac{4}{81}\right)^{12}$

Сложность «0»

В задачах **4.121—4.130** решить уравнение:

4.121. $2^{x-1} = 2\sqrt{2}$

4.122. $5^{2-x} = 125$

4.123. $3^{2x+5} = \frac{1}{3}$

4.124. $4^{3-x} = 2$

4.125. $7^{x-5} = \sqrt{7}$

4.126. $8^{-x+4} = 2\sqrt{2}$

4.127. $9^{x+2} = 27$

4.128. $6^{x+1} = \frac{1}{36}$

4.129. $7^{x-7} = 49\sqrt{7}$

4.130. $10^{1-(x/3)} = \sqrt[3]{100}$

Сложность «0»

В задачах **4.131—4.140** решить уравнение:

4.131. $\sqrt[3]{5^{2x-3}} = \frac{5}{\sqrt[4]{5}}$

4.132. $\sqrt{10^{2x+6}} = \frac{10}{\sqrt[4]{10}}$

4.133. $\sqrt[7]{36^{x-5}} = \frac{6}{\sqrt[5]{6}}$

4.134. $\sqrt[3]{8^{x-1}} = \frac{2}{\sqrt{2}}$

4.135. $\sqrt[4]{9^{x+5}} = \frac{27}{\sqrt[5]{3}}$

4.136. $\sqrt[3]{25^{2x-1}} = \frac{5}{\sqrt{5}}$

4.137. $\sqrt[5]{4^{x+4}} = \frac{8}{\sqrt{2}}$

4.138. $\sqrt[3]{7^{4x+3}} = \frac{49}{\sqrt{7}}$

4.139. $\sqrt[4]{2^{5x-2}} = \frac{4}{\sqrt{2}}$

4.140. $\sqrt{3^{2x+1}} = \frac{9}{\sqrt[5]{3}}$

Сложность «0»

В задачах **4.141—4.150** решить уравнение:

4.141. $2^x + 5 \cdot 2^{x-1} = 7 \cdot 2^{-5}$

4.142. $5^{x+2} - 12 \cdot 5^{x-1} = 565$

4.143. $4^{x-1} + 11 \cdot 4^{x-2} = 15 \cdot 2^{-4}$

4.144. $7^x + 5 \cdot 7^{x-2} = 378$

4.145. $7 \cdot 6^x - 6^{x+1} = 6^{-2}$

4.146. $3^{x+3} + 8 \cdot 3^{x+2} = 33$

4.147. $7 \cdot 2^{x+1} + 5 \cdot 2^{x-3} = 468$

4.148. $5^x - 9 \cdot 5^{x-3} = 580$

4.149. $2 \cdot 6^x + 3 \cdot 6^{x+3} = 325 \cdot 3^{-1}$

4.150. $3^{x+2} - 15 \cdot 3^{x-2} = 22 \cdot 3^{-4}$

Сложность «0»

В задачах **4.151—4.160** решить уравнение:

4.151. $\left(\frac{28}{5}\right)^{28x^2-5} = \left(\frac{5}{28}\right)^{5x^2-127}$

4.152. $\left(\frac{19}{7}\right)^{19x^2-3} = \left(\frac{7}{19}\right)^{3x^2-19}$

4.153. $\left(\frac{21}{6}\right)^{29x^2-8x} = \left(\frac{6}{21}\right)^{8x^2-29x}$

4.154. $\left(\frac{37}{5}\right)^{71(\sqrt{x})-3} = \left(\frac{5}{37}\right)^{3(\sqrt{x}}$

4.155. $\left(\frac{33}{34}\right)^{33\sqrt{x-1}-10} = \left(\frac{34}{33}\right)^{12\sqrt{x-1}-12,5}$

4.156. $\left(\frac{14}{5}\right)^{(28/\sqrt{x})-5} = \left(\frac{5}{14}\right)^{(5/\sqrt{x})-160}$

4.157. $\left(\frac{51}{7}\right)^{(19/\sqrt{x+1})-3} = \left(\frac{7}{51}\right)^{(3/\sqrt{x+1})-107}$

4.158. $\left(\frac{25}{2}\right)^{25x-4x^2} = \left(\frac{2}{25}\right)^{4x-6x^2}$

4.159. $\left(\frac{9}{23}\right)^{-21x+x^2} = \left(\frac{23}{9}\right)^{19x+1}$ **4.160.** $\left(\frac{3}{17}\right)^{x+\left(1/\sqrt{x}\right)} = \left(\frac{17}{3}\right)^{\left(2/\sqrt{x}\right)-x-}$

Сложность «0»

В задачах **4.161—4.170** решить уравнение:

4.161. $7^{x-1} - 6^{2-2x} = 0$

4.162. $5^{3x} - 7^{-2x} = 0$

4.163. $2^{x-2} - 3^{4-2x} = 0$

4.164. $3^{2x-8} - 2^{x-4} = 0$

4.165. $(1/3)^{x+2} - 5^{2x+4} = 0$

4.166. $(1/2)^{2x-1} - 5^{1-2x} = 0$

4.167. $(1/4) \cdot 3^{2x} - 4^{5x-1} = 0$

4.168. $16^{(x/6)+0,5} - 4 \cdot 5^x = 0$

4.169. $5^{-2x} - 36^x = 0$

4.170. $(1/4)^{3x-2} - 6^{x-(2/3)} = 0$

Сложность «1»

В задачах **4.171—4.180** решить уравнение:

4.171. $8 \cdot 3^x = 243 \cdot 2^{x-2}$

4.172. $\sqrt{17^{x-1}} = 102 \cdot 6^{x-4}$

4.173. $2{,}5 \cdot 4^x = 8 \cdot 5^{x-1}$

4.174. $3 \cdot 7^x \cdot 5^{1-x} = 7 \cdot 3^x$

4.175. $\sqrt{7^{x+1}} = 105 \cdot 15^{-x}$

4.176. $3^{-2x+1} = 1944 \cdot 2^{2x+1}$

4.177. $5^{-x+1} = 1625 \cdot 13^{-x-3}$

4.178. $\sqrt[3]{2^{2x+8}} = 152 \cdot 19^{2x-2}$

4.179. $35 \cdot 7^{2x-4} = 25^{x-1}$

4.180. $3 \cdot \sqrt{1{,}5} \cdot 3^{x-1} = 2^{3x+1}$

Сложность «1»

В задачах **4.181—4.190** решить уравнение:

4.181. $9^x - 75 \cdot 3^{x-1} - 54 = 0$

4.182. $4^{x+1} + 15 \cdot 2^{x-1} - 1 = 0$

4.183. $25^x + 175 \cdot 5^{x-2} - 60 = 0$

4.184. $49^{x+1} + 55 \cdot 7^{x+1} - 56 = 0$

4.185. $4^{x+2} + 30 \cdot 2^{x-1} - 1 = 0$

4.186. $100^x - 70 \cdot 10^{x-1} - 30 = 0$

4.187. $25^x - 120 \cdot 5^{x-1} - 25 = 0$

4.188. $9^{x+1} + 26 \cdot 3^x - 3 = 0$

4.189. $4^x - 30 \cdot 2^{x-1} - 16 = 0$

4.190. $25^{x+1} + 49 \cdot 5^x - 2 = 0$

Сложность «1»

В задачах **4.191—4.200** решить уравнение:

4.191. $2^{3x+10} - 3^{3x+9} + 3^{3x+7} + 2^{3x+9} = 0$

4.192. $2^{2x+8} + 5^{2x+7} + 2^{2x+10} - 5^{2x+8} = 0$

4.193. $3^x - 2 \cdot 3^{x-2} - 7^{x-2} - 2 \cdot 7^{x-3} = 0$

4.194. $2^{4x+3} - 2^{4x} - 7^{4x-1} - 7^{4x-2} = 0$

4.195. $3 \cdot 5^{-(2x+2)} - 2^{2-2x} + 5^{-(2x+1)} - 2^{-2x} = 0$

4.196. $2\cdot 2^{3x}+3^{3x-2}+4\cdot 2^{3x-2}-3^{3x}=0$

4.197. $5\cdot 7^{x-1}+4\cdot 3^{x}+3^{x+1}-2\cdot 7^{x}=0$

4.198. $4\cdot 6^{x-1}-5^{x}-5^{x-1}+6^{x-2}=0$

4.199. $5^{2x-1}+2^{2x}-5^{2x}+2^{2x+2}=0$

4.200. $4\cdot 3^{4x}-2^{4x-1}-3^{4x+1}-2^{4x}=0$

Сложность «2»

В задачах **4.201—4.210** решить уравнение:

4.201. $2^{1-x}+\left(\frac{1}{2}\right)^{x+3}-\frac{1}{2^{x+4}}-\frac{1}{\sqrt{4^{x+5}}}=130$

4.202. $3^{x+1}+\left(\frac{1}{3}\right)^{1-x}-\sqrt{9^{x-2}}-\frac{1}{\sqrt{9^{3-x}}}=258$

4.203. $\left(\frac{1}{5}\right)^{x}+5^{-(x+1)}-\frac{1}{\sqrt{25^{x+2}}}-725=0$

4.204. $6^{2x+1}+\left(\frac{1}{6}\right)^{1-2x}-36^{x-1}=1326$

4.205. $\left(\frac{1}{2}\right)^{2-x}+2^{x-3}=80+\sqrt{4^{x-4}}$

4.206. $\left(\frac{1}{7}\right)^{1-4x}+7^{4x}+49^{2x-1}-399=0$

4.207. $\left(\frac{1}{4}\right)^{2x}+4^{1-2x}+4^{-(2x+1)}-\frac{1}{\sqrt{16^{2x+2}}}=1328$

4.208. $5^{4x+1}+\left(\frac{1}{5}\right)^{1-4x}+25^{2x}-\frac{1}{5^{2-4x}}=770$

4.209. $\left(\frac{1}{3}\right)^{2-x}+3^{x-3}=\sqrt{\frac{1}{9^{4-x}}}+297$

4.210. $2^{-(x+4)}-\sqrt{\frac{1}{4^{x+5}}}=72-\left(\frac{1}{2}\right)^{x+2}$

Сложность «2»

В задачах **4.211—4.220** решить уравнение:

4.211. $9\cdot 5^{2/\sqrt{x}}+2\cdot 15^{1/\sqrt{x}}+75\cdot 3^{2/\sqrt{x}}=0$

4.212. $3\cdot 16^{x}+2\cdot 81^{x}=5\cdot 36^{x}$

4.213. $5\cdot 4^{x^2}+3\cdot 10^{x^2}-2\cdot 25^{x^2}=0$

4.214. $64\cdot 9^{x}-84\cdot 12^{x}+27\cdot 16^{x}=0$

4.215. $4^{x^2}+6^{x^2}=2\cdot 9^{x^2}$

4.216. $5\cdot 9^{\sqrt{x+2}}+22\cdot 15^{\sqrt{x+2}}-15\cdot 25^{\sqrt{x+2}}=0$

4.217. $4 \cdot 25^x - 9 \cdot 20^x + 5 \cdot 16^x = 0$

4.218. $2 \cdot 7^{4/x} - 14^{2/x} - 21 \cdot 2^{4/x} = 0$

4.219. $9 \cdot 16^x + 2 \cdot 12^x - 32 \cdot 9^x = 0$

4.220. $3 \cdot 2^{2/x} + 6^{1/x} - 2 \cdot 3^{2/x} = 0$

Сложность «2»

В задачах **4.221—4.230** решить уравнение:

4.221. $\sqrt{5^x - 1} = 7 - 5^x$

4.222. $4\sqrt{4^{(3/x)-1} - 1} = 12 - 4^{3/x}$

4.223. $\sqrt{6^x - 2} = 8 - 6^x$

4.224. $3\sqrt{3^{x-1} - 5} = 33 - 3^x$

4.225. $\sqrt{3^x - 5} = 11 - 3^x$

4.226. $\sqrt{2^{x+1} - 7} = 9 - 2 \cdot 2^x$

4.227. $\sqrt{5^x - 25} = 35 - 5^{x-1}$

4.228. $\sqrt{4^{3/x} - 1} = 3 - 4^{3/x}$

4.229. $\sqrt{6^{x+2} - 2} = 8 - 36 \cdot 6^x$

4.230. $\sqrt{2^x - 7} = 9 - 2^x$

Сложность «2»

В задачах **4.231—4.240** определить графически число корней уравнения.

4.231. $2^x = 2 - x$

4.232. $\left(\frac{1}{4}\right)^x - 1 = \frac{1}{x}$

4.233. $5^x = 4 - x^2$

4.234. $x^3 = \left(\frac{1}{3}\right)^x + 1$

4.235. $\left(\frac{1}{2}\right)^x = \frac{1}{4} - x^2$

4.236. $6^x - 1 = -2x$

4.237. $2^x = 1 + \frac{1}{x}$

4.238. $10^x = \sqrt{x+2}$

4.239. $3^x = (x + 1)^2$

4.240. $4^{0,5x-1} = -1 - x$

Сложность «3»

В задачах **4.241—4.250** решить уравнение:

4.241. $4^x - 7 \cdot 2^{\frac{x-3}{2}} = 2^{-x}$

4.242. $9^{-(x/6)+0,25} + 2 \cdot 3^{-(2x/3)} = 3^{0,5-x}$

4.243. $6 \cdot 5^{2x+3} - 5 \cdot 5^{\frac{x+3}{2}} = 5^{-x}$

4.244. $7 \cdot 2^{-(5x/3)-1,5} + 2^{-2x} = 4^{-(2x/3)}$

4.245. $4 \cdot 4^{x-2} - 7 \cdot 2^{\frac{x-1}{2}} = 2^4 \cdot 2^{-x}$

4.246. $5^{-(x/3)} - 5^{-x} = 4 \cdot 5^{-(2x/3)-0,5}$

4.247. $6^{4x} - 6^{-x} = 5 \cdot 6^{\frac{3x-1}{2}}$

4.248. $7^{-x+1,5} - 7^{1,5-1,5x} = 342 \cdot 7^{-(5x/4)}$

4.249. $\sqrt{3} \cdot 81^x - 3^{\frac{1-2x}{2}} = 26 \cdot 3^{\frac{3x-2}{2}}$

4.250. $2^{\frac{2x+3}{6}} - 2^{\frac{-2x+1}{2}} = 2^{-(x/3)}$

Сложность «3»

В задачах **4.251—4.260** определить, при каких целых значениях a уравнение имеет два различных действительных корня:

4.251. $4^x - 4 \cdot 2^x = a$

4.252. $2 \cdot 3^{2x} - 3^{x+1} = a$

4.253. $2^{-2x-2} - 2^{-x+2} = 4a$

4.254. $3 \cdot 25^x - 5^{x+1} = 2a$

4.255. $7 \cdot 9^{-x} - 2 \cdot 3^{-x+1} = 0{,}5a$

4.256. $5^{2x+1} - 5^{x+1} = a/3$

4.257. $2^{2x+1} - 2^{x+2} = a$

4.258. $9^x - 3^{x+1} = \frac{3}{2}a$

4.259. $81^{-x} - 9^{0.5-x} = -a$

4.260. $7^{2x} - 7^{x+1} = -7a$

Сложность «1»

В задачах **4.261—4.270** решить систему уравнений:

4.261. $\begin{cases} 3^y \cdot 2^x = 972 \\ y - x = 3 \end{cases}$

4.262. $\begin{cases} 4^{x+y} = 128 \\ 5^{3y-2x-3} = 1 \end{cases}$

4.263. $\begin{cases} 2^y \cdot 8^{-x} = 8\sqrt{2} \\ y + 3x = 1/2 \end{cases}$

4.264. $\begin{cases} 3^{-x} \cdot 2^y = 4/9 \\ x + y = 4 \end{cases}$

4.265. $\begin{cases} 5^{\sqrt{x}} \cdot 3^{\sqrt{y}} = 15\sqrt{3} \\ \sqrt{x} - \sqrt{y} = -0,5 \end{cases}$

4.266. $\begin{cases} 3^x \cdot 2^y = 576 \\ y - x = 4 \end{cases}$

4.267. $\begin{cases} 3^{1/x} \cdot 2^y = 324 \\ (1/x) - y = 2 \end{cases}$

4.268. $\begin{cases} 7^x \cdot 2^{1/y} = 4\sqrt{7} \\ x - (1/y) = -1,5 \end{cases}$

4.269. $\begin{cases} 3^{-x} \cdot 2^y = 1152 \\ x + y = 5 \end{cases}$

4.270. $\begin{cases} 4^{y-1} \cdot 5^x = 6400 \\ y - x = 3 \end{cases}$

Сложность «2»

В задачах **4.271—4.280** решить систему уравнений:

4.271. $\begin{cases} 3^x \cdot 25^y = 5625 \\ 5^x \cdot 9^y = 2025 \end{cases}$

4.272. $\begin{cases} 3^{2x} - 2^y = 725 \\ 3^x - 2^{0.5y} = 25 \end{cases}$

4.273. $\begin{cases} 3^x \cdot 7^y = 63 \\ 3^x + 7^y = 16 \end{cases}$

4.274. $\begin{cases} 3 \cdot 2^x + 2 \cdot 3^y = 2,75 \\ 2^x - 3^y = -0,75 \end{cases}$

4.275. $\begin{cases} 2^x \cdot 9^y = 648 \\ 3^x \cdot 4^y = 432 \end{cases}$

4.276. $\begin{cases} 2^x + 3^y = 73/9 \\ 2^x \cdot 3^y = 8/9 \end{cases}$

4.277. $\begin{cases} 3^x - 2^{y/2} = 7 \\ 3^{2x} - 2^y = 77 \end{cases}$

4.278. $\begin{cases} 64^{2x} + 64^{2y} = 12 \\ 64^{x+y} = 4\sqrt{2} \end{cases}$

4.279. $\begin{cases} 2^x \cdot 3^y = 12 \\ 2^y \cdot 3^x = 18 \end{cases}$

4.280. $\begin{cases} 3^x - 2^{2y} = 77 \\ 3^{0,5x} - 2^y = 7 \end{cases}$

§ 14. ЛОГАРИФМИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ И СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ

$$\boxed{\begin{array}{l} 1)\ \log_a x = c \Leftrightarrow x = a^c,\ x > 0,\ a > 0,\ a \neq 1; \\ 2)\ \log_a x = \log_a b \Leftrightarrow x = b,\ x > 0,\ a > 0,\ a \neq 1. \end{array}}$$

Сложность «0»

В задачах **4.281—4.290** решить уравнение:

4.281. $\log_4 2x = \frac{1}{2}$ **4.282.** $\log_{1/4} x = -2$ **4.283.** $\log_{\sqrt{2}} x = 2$

4.284. $\log_3 3x = 2$ **4.285.** $\log_6 \frac{x}{3} = -1$ **4.286.** $\log_2 \frac{x}{2} = -2$

4.287. $\log_{1/2} \frac{2}{3} x = 0$ **4.288.** $\log_3 \frac{5x}{2} = 1$ **4.289.** $\log_{27} 4x = \frac{1}{3}$

4.290. $\log_4 \frac{x}{5} = \frac{1}{2}$

Сложность «0»

В задачах **4.291—4.300** решить уравнение:

4.291. $\log_{0,5}(3x + 1) = -2$ **4.292.** $\log_3(2 - x) = 2$

4.293. $\log_{\sqrt{2}}(x + 1) = 2$ **4.294.** $\log_{0,2}(x + 3) = -1$

4.295. $\log_{0,1}(x + 10) = -2$ **4.296.** $\log_{400}(x + 1) = 0,5$

4.297. $\log_{\sqrt{3}}(1 - 2x) = 4$ **4.298.** $\log_{0,25}(x + 30) = -2$

4.299. $\log_{\sqrt{7}}(x + 1) = 4$ **4.300.** $\log_{\sqrt{11}}(x + 12) = 2$

Сложность «0»

В задачах **4.301—4.310** решить уравнение:

4.301. $\log_2 \sqrt{x - 1} = 1$ **4.302.** $\log_{1/3} \sqrt[3]{x + 1} = -1$

4.303. $\log_{1/2}(x + 5) = -2$ **4.304.** $\log_{0,1}(3x - 2) = -1$

4.305. $\log_{2/5} \frac{1}{2x - 3} = 1$ **4.306.** $\log_{3/4} \frac{2x - 1}{x + 2} = 1$

4.307. $\log_2 \frac{1}{\sqrt{x-1}} = -1$

4.308. $\log_{0,8}\left(\sqrt{\frac{x-1}{2x+1}}\right) = 0$

4.309. $\log_{\sqrt{2}} \frac{1}{4x+1} = 0$

4.310. $\log_{1/\sqrt{3}} \sqrt{1-x} = -1$

Сложность «0»

В задачах 4.311—4.320 решить уравнение:

4.311. $\log_{\frac{12-x}{x}} 3 - 1 = 0$

4.312. $\log_{8-x} 11 - 0,5 = 0$

4.313. $\log_{\frac{1}{(10-x)^2}} 5 - \frac{1}{3} = 0$

4.314. $\log_{2x+3} 0,25 + 2 = 0$

4.315. $\log_{\sqrt{x+1}} \frac{1}{9} + 4 = 0$

4.316. $\log_{\frac{x+1}{x-1}} 2 - 1 = 0$

4.317. $\log_{5-x} 4 - \frac{1}{3} = 0$

4.318. $\log_{\frac{36}{13-x}} 6 - 0,5 = 0$

4.319. $\log_{(7-x)^2} 2 - \frac{1}{5} = 0$

4.320. $\log_{\sqrt{15-x}} 9 - 2 = 0$

Сложность «0»

В задачах 4.321—4.330 решить уравнение:

4.321. $\log_{16}(2 + \log_2(3 + x)) = 0$

4.322. $\log_{1/2}(3 - \log_3(x - 2)) = 0$

4.323. $\log_2(\log_{1/2}(2x - 1) + \log_2 4) = 1$

4.324. $\log_{32}\left(\log_{\sqrt{3}} 9 - \log_2(x+4)\right) = 0$

4.325. $\log_{1/3}(1 + \log_2(x-5)) = -1$

4.326. $\log_{100}(\log_{1/3}(2x + 4) + 2) = 0$

4.327. $\log_{1/25}(1,5 - \log_4(x - 4)) = 0$

4.328. $\log_{1/4}(\log_{1/2} 2 + \log_2(1 - x)) = -1$

4.329. $\log_2\left(\log_3 \sqrt{3} - \log_{1/9}(x+2)\right) = 0$

4.330. $\log_3(\log_{1/4} 4 + \log_2(x + 1)) = 1$

Сложность «1»

В задачах 4.331—4.340 решить уравнение:

4.331. $\log_2(x^2 + 4x + 11) = \log_{0,5} 0,125$

4.332. $\log_3(2x^2 + 5x + 6) = \lg 100$

4.333. $\log_5(4x^2 - 3x - 0,8) = \log_2 0,5$

4.334. $\log_{0,5}(5x^2 + 9x + 2) = \log_3 \frac{1}{9}$

4.335. $\log_4(3x^2 - 3x - 5,75) = \log_{0,5} 2$

4.336. $\log_5(-2x^2-6x+1)=3^{\lg 1}$

4.337. $\log_{10}(-3x^2-15x-8)=(\log_3 9)^{\log_2 1}$

4.338. $\log_{0,25}(7x^2+7x+16)=\lg 0{,}01$

4.339. $\log_{0,2}(-4x^2+8x+5)=3^{\lg 1}-\lg 100$

4.340. $\log_{1/3}(12-x^2)=\dfrac{2^{\log_2 3}}{\lg 0{,}001}$

Сложность «I»

В задачах **4.341—4.350** решить уравнение:

4.341. $\log_{x+1}(3x^2+2x-1)=2$

4.342. $\log_{x-2}(2x^2-13x+18)=1$

4.343. $\log_{\sqrt{x+5}}(3x^2+16x+5)=4$

4.344. $\log_{1/\sqrt{x-1}}(x^3-2x^2-x+2)=-6$

4.345. $\log_{\sqrt{x-4}}(3x^2-28x+64)=4$

4.346. $\log_{\sqrt{1-x}}(2x^2-3x-1)=4$

4.347. $\log_{1/(x+2)}(2x^2+6x-4)=-2$

4.348. $\log_{\sqrt[3]{x}}(3x^2-6x)=6$

4.349. $\log_{\sqrt[3]{x+3}}(x^3+10x^2+31x+30)=9$

4.350. $\log_{\sqrt[3]{x}}(x^3+x^2-4x)=6$

Сложность «I»

В задачах **4.351—4.360** решить уравнение:

4.351. $\log_3\left(\sqrt{2}\,(x+5)\right)=\dfrac{1}{\log_4 81}$

4.352. $\log_{\sqrt{2}} 9\cdot\log_3\left(\sqrt[4]{2}\,(x-2)\right)=1$

4.353. $\log_3\dfrac{x-5}{4}=\log_{1/3}\dfrac{1}{4}$

4.354. $\lg 56=\lg 2\cdot\log_2 7-3\lg(x+4)$

4.355. $\log_8 10=\dfrac{\log_{1/3}(x-7)}{\log_3 8}$

4.356. $10^{\frac{1}{0,5+\log_4 5}}=\log_2(6-x)$

4.357. $2^{\log_4 9}=\log_{1/\sqrt[3]{2}}(4-2x)$

4.358. $\log_{1/2}x=\log_3\dfrac{1}{27}$

4.359. $\log_3(x-1)=2^{1/\log_3 2}$

4.360. $\log_2\left(\sqrt[3]{x+1}\right)=\log_8 16$

Сложность «I»

В задачах **4.361—4.370** решить уравнение:

4.361. $\log_{1/3}27+\log_3(2x-3)=\log_{1/9}(2x-3)$

4.362. $\log_2(x-1)^2=\log_{1/\sqrt{2}}(4(x-1))+\log_{\sqrt{2}}16$

4.363. $\log_9(x+1)+\log_{\sqrt{3}}\dfrac{1}{x+1}=\log_{1/9}27$

4.364. $\log_{1/2} x + 2\log_2 x = 1$

4.365. $\log_{2/3}(x-1) + 3\log_{3/2}(x-1) = 2$

4.366. $\log_{\sqrt{2}}(x+1) + 2\log_2(x+1) = 4$

4.367. $\log_{1/3}\sqrt{1-x} + \log_3(1-x) = 0,5$

4.368. $\log_2\frac{1}{2x-1} + 2\log_{1/4}(2x-1) = -2$

4.369. $\log_{1/\sqrt{3}} x - 2\log_3\sqrt{x} = \log_3\frac{1}{27}$

4.370. $\log_{1/\sqrt{2}}(3x-4) + 3\log_8(3x-4) = \log_2 0,5$

Сложность «1»

В задачах **4.371—4.380** решить уравнение:

4.371. $\log_6(x-1) - \log_6\frac{1}{16} + 3\log_6\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right) = 0,5\log_6(2x+4)^2$

4.372. $\lg 5 + \lg(x+10) - 1 = \lg(21x-20) - \lg(2x-1)$

4.373. $\log_5(x-2) - 2\log_5\frac{1}{\sqrt{x+1}} = \log_5(x+13)$

4.374. $\log_2(x-1) - 2 = \log_2(3x-7) - \log_2(x+1)$

4.375. $0,5\log_{1/4}(x+1)^2 - \log_{1/4}\frac{1}{x} = \log_{1/4}\left(2-\frac{x}{4}\right) - 1$

4.376. $\log_{1/2}(x-3) + 1 = \log_{1/2}(3x-7) - \log_{1/2}(x+3)$

4.377. $\frac{1}{2}\log_3 x^2 + 3\log_3\left(\sqrt[3]{x-2}\right) = \frac{1}{3}\log_3 8 - \log_3\frac{1}{x+6}$

4.378. $\log_4 x - \log_4\frac{1}{2x-1} = \log_4(3x-2)$

4.379. $\lg x - \lg\frac{1}{x-1} = \lg 2 + 3\lg\left(\sqrt[3]{x+2}\right)$

4.380. $\log_5 2 + \log_5 x + 2\log_5\sqrt{x-1} = \log_5(5x-3)$

Сложность «1»

В задачах **4.381—4.390** решить уравнение:

4.381. $\log_4(x(x-5)) + \log_4\frac{x-5}{x} = 0$

4.382. $\lg(x(x-3)) - \lg\frac{x-3}{4x} = 0$

4.383. $\log_{0,1}(x(x+9)) + \log_{0,1}\frac{x+9}{x} = 0$

4.384. $\log_{1/5}(x(x-5)) - \log_{1/5}\frac{256(x-5)}{x} = 0$

4.385. $\log_{0,24}(x(x-18)) + \log_{0.24}\frac{x-18}{256x} = 0$

4.386. $\log_{1/2}(x(x-5)) - \log_{1/2}\frac{9(x-5)}{x} = 0$

4.387. $\log_{27}(x(x-3)) + \log_{27}\frac{x-3}{x} = 0$

4.388. $\log_{16\sqrt{2}}(x(x-5)) + \log_{16\sqrt{2}}\frac{x-5}{9x} = 0$

4.389. $\log_2(x(2-x)) + \log_2\frac{x}{2-x} = 0$

4.390. $\log_3((x+2)(5-x)) - \log_3\frac{5-x}{x+2} = 0$

Сложность «1»

В задачах **4.391—4.400** решить уравнение:

4.391. $\log_2^2 x - 3\log_2 x + 5 = 3^{\log_3 9}$

4.392. $\frac{\lg x}{2\lg x + 1} + \frac{2\lg x + 1}{\lg x} = 2$

4.393. $\lg x - 2\lg 100 + 4(\lg x)^{-1} = 0$

4.394. $\log_2^2 x^3 - 144\log_2\sqrt{x} - 81 = 0$

4.395. $\frac{2\log_2^2 x - 1}{\log_2^2 x + 2\log_2 x + 2} = 1$

4.396. $\log_2{}^2 x + 3 = 2\log_2 x^2$

4.397. $\lg^2 10x = \lg 10\,000$

4.398. $\lg^2\frac{x}{10} = 3^{\log_3 4}$

4.399. $\log^2{}_2 x - \log_2 x^3 = 4$

4.400. $3\lg x^2 - \lg^2 x = 9$

Сложность «2»

В задачах **4.401—4.410** решить уравнение:

4.401. $\log_3 x + \log_x 9 = 3$

4.402. $\log_4 x + \log_x\frac{1}{16} = 1$

4.403. $\lg 1000x = 4\log_x 10$

4.404. $1 + \log_2 32 + \log_{0.5} x - 9\log_x 2 = 0$

4.405. $\log_3 x + 16\log_x 3 = 5 - \lg 0{,}001$

4.406. $\log_4(x+1) + 8\log_{x+1} 2 - \log_2 8 = \frac{1}{2}\log_{\sqrt{3}} 3$

4.407. $4\log_{25}(x-1) - \log_3 27 + 2\log_{x-1} 5 = 1$

4.408. $16\cdot\log_{1-3x} 2 + \log_2(1-3x) + \log_3\frac{1}{27} = 5$

4.409. $\log_3\frac{4x}{3} + \log_{4x} 3 = 2^{\lg 1}$

4.410. $2\cdot\log_{\sqrt{3}} 3 - \log_5 x - 4\log_x 5 = 0$

Сложность «2»

В задачах **4.411—4.420** определить графически число корней уравнения:

4.411. $1 - x = \log_2 x$

4.412. $x^2 - 4 = \log_4 x$

4.413. $x^2 + 2 = \log_3 x$

4.414. $\log_{1/3} x = 2x - 2$

4.415. $\log_{1/2} x = 2^x$

4.416. $3 - x^2 = \sqrt{3}\,\log_2 x$

4.417. $x^3 = \log_{1/4} x$

4.418. $x(x - 2) = -\log_{1/2} x$

4.419. $x(x - 3) = \log_{1/2}(x - 1)$

4.420. $x^2 + 4 = \log_4 x$

Сложность «3»

В задачах **4.421—4.430** решить уравнение:

4.421. $2^{\log_3 x^2} \cdot 5^{\log_3 x} = 400$

4.422. $\lg\sqrt{2^{x(13-x)}} + 11 \cdot \lg 5 = 11$

4.423. $5^{\log_4(x+3)-\log_4(x-1)} = (0,2)^{-2+\log_4 8}$

4.424. $3^{\frac{1}{\log_4 9}} = x^{0,5\log_{\sqrt{x}}(x^2-x)}$

4.425. $\log_{x/16} 2 + 2\log_{x/2} 2 \cdot \log_{x/4} 2 = 0$

4.426. $\sqrt{\log_x \sqrt{10x}} = -\log_x 10$

4.427. $\log_{2x+1}(5 + 8x - 4x^2) + \log_{5-2x}(1 + 4x + 4x^2) = 4$

4.428. $\dfrac{1 + \log_{x+1}(x-3)}{\log_{x+1} 3} = \log_3(2x-3)$

4.429. $\sqrt{x^{\log_2\sqrt{x}}} = 2$

4.430. $\log_x 4x = \sqrt{\log_x 4x^3}$

Сложность «3»

В задачах **4.431—4.440** решить уравнение:

4.431. $\frac{4}{3}\log_3^2(5x-6)^3 - \log_3(5x-6)^3 \cdot \log_3 x^6 = -6 \cdot \log_3^2 \frac{1}{x}$

4.432. $\lg 2 + \lg(4^{x-2} + 1) = \lg 6 + \lg\left(2^{x-2} + \frac{5}{3}\right)$

4.433. $\frac{1}{4}\log_5^2(2x+3)^2 + 8\log_5^2\sqrt{x} = \log_5(2x+3)^3 \cdot \log_5 x$

4.434. $2 \cdot \lg 2 + \lg(5^{\sqrt{x}} + 1) = 2 + \lg(5^{1-\sqrt{x}} + 5)$

4.435. $-0,5 \cdot \log_3\left(3^{x^2-13x+28} + \frac{2}{9}\right) = 2^{\log_2 0.5}$

4.436. $\sqrt{2 - \log_x 4} \cdot \log_2 x = -2\sqrt{3}$

4.437. $\log_5(4^x - 6) - \log_5(2^x - 2) = 1$

4.438. $\log_{\frac{x+3}{x-3}} 4=2\left(\log_{1/2}(x-3)-\log_{\sqrt{2}/2}\sqrt{x+3}\right)$

4.439. $\dfrac{1}{\log_3(x+1)}=\dfrac{1}{2\cdot\log_9\sqrt{x^2-6x+9}}$ **4.440.** $\log_5\sqrt{3x+4}\cdot\log_x 5=1$

Сложность «3»

В задачах **4.441—4.450** решить уравнение:

4.441. $11\cdot4^{\log_4^2(x-1)}-3(x-1)^{\log_4(x-1)^2}=-4$

4.442. $100^{\lg^2x}-9x^{\lg x}=10$ **4.443.** $4^{\log_4^2(x+2)}+2(x+2)^{\log_4\sqrt{x+2}}=8$

4.444. $2^{\log_2^2x}+x^{\log_2x^2}=6$ **4.445.** $5^{2\log_5^2x}-4x^{\log_5x}=5$

4.446. $x^{2\log_3x}+3^{\frac{\log_3x}{\log_x3}}-6=0$ **4.447.** $9\cdot10^{\frac{1}{\log_x^2 10}}+x^{2\lg x}-190=0$

4.448. $2\cdot16^{\log_4^2 2x}-7\cdot4^{\frac{\log_4 2x}{2\log_{2x}2}}=4$

4.449. $4^{\log_2^2 4x}+3\cdot(4x)^{\log_2 4x}=10$

4.450. $\left(4\cdot\sqrt[4]{2}\right)^{\log_2^2\left(\sqrt[3]{x^2}\right)}+x^{2\log_2x}=272$

Сложность «3»

В задачах **4.451—4.460** определить графически число корней уравнения:

4.451. $\left|\log_2x\right|=(0,5)^x-0,5$ **4.452.** $\left|x^2-4\right|=\log_{1/2}(x-1)$

4.453. $\log_2(x+1)=-|x|+1$ **4.454.** $\log_3x=|x|+1$

4.455. $\dfrac{1}{|x|}=\log_4x$ **4.456.** $|x(x-2)|=\left|\log_2x\right|$

4.457. $\log_2|x|=-0,5|x|$ **4.458.** $x^2=\log_{1/5}|x|$

4.459. $x^2+\dfrac{3}{4}=\left|\log_{1/2}x\right|$ **4.460.** $x-2=\log_2|x-4|$

Сложность «3»

В задачах **4.461—4.470** решить уравнение:

4.461. $x^{\frac{\log_5\log_5x}{\log_5x}}=\log_5 14$ **4.462.** $25^{\frac{\log_3\log_3 25}{\log_3 25}}=2\log_3x$

4.463. $\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{\log_5 \log_{1/4} x}{\log_{1/25} 3}} = \log^2_{1/4} 5$

4.464. $6^{\frac{\log_2 \log_8 x}{\log_{1/2} 6}} = \log_6 8$

4.465. $4^{\frac{\log_{\sqrt{2}} \log_7 x}{\log_2 4}} = \log^2_7 4$

4.466. $5^{\frac{\log_{1/3} \log_3 x}{\log_3 5}} = \log_5 \frac{1}{3}$

4.467. $2^{\frac{\log_{1/3} \log_7 x}{\log_3 2}} = \sqrt{\log_7 x}$

4.468. $3^{\frac{\log_{1/\sqrt{2}} \log_{1/5} x}{\log_2 3}} = \frac{1}{(\log_{1/5} 25)^2}$

4.469. $\sqrt{2}^{\frac{\log_{1/3} \log_6 x}{\log_3 2}} = \sqrt{\log_6 x}$

4.470. $0,25^{\frac{\log_{12} \log_8 x}{\log_{1/12} 4}} = \log_{1/8} 10$

Сложность «3»

В задачах **4.471—4.480** решить уравнение:

4.471. $|x|^{\lg|x|} = 10^4$

4.472. $|2x+1|^{\log_2|2x+1|} = 16$

4.473. $\left|2+\frac{x}{9}\right|^{\log_3\left|\frac{18+x}{9}\right|} = 81$

4.474. $\left|\frac{x}{5}+0,2\right|^{\log_5\left|\frac{x+1}{5}\right|} = 625$

4.475. $\left|\frac{x+54}{27}\right|^{\log_3|(x/27)+2|} = 27^3$

4.476. $|3x+2|^{\log_{\sqrt{2}}|3x+2|} = 4$

4.477. $|5x+4|^{\log_{3\sqrt{5}}|5x+4|} = 125$

4.478. $\left|\frac{4x}{9}+1\right|^{\log_{\sqrt{3}}\left|\frac{4x+9}{9}\right|} = 9$

4.479. $|2x+3|^{\log_{1/\sqrt{2}}|2x+3|} = 0,25$

4.480. $|4x-0,1|^{\log_{\sqrt{5}}|4x-0,1|} = 25$

Сложность «1»

В задачах **4.481—4.490** решить систему уравнений:

4.481. $\begin{cases} \log_3 2x - \log_3(2/y) = 1 \\ 4x - y = 1 \end{cases}$

4.482. $\begin{cases} \log_2 x + \log_2 y = 4 \\ y - x = 6 \end{cases}$

4.483. $\begin{cases} \log_2 2x + \log_2(y/2) = -1 \\ x - y = -(7/4) \end{cases}$

4.484. $\begin{cases} \log_2 x + \log_2(y-1) = 3 \\ 2x - y = -1 \end{cases}$

4.485. $\begin{cases} \log_3 x + \log_3 y = 3 \\ y - x = 6 \end{cases}$

4.486. $\begin{cases} \log_2(x/3) + \log_2 y = 2 \\ 2x - y = 2 \end{cases}$

4.487. $\begin{cases} \log_3 x - \log_3(1/y) = 2 \\ y - x = 8 \end{cases}$

4.488. $\begin{cases} \lg 5x + \lg y = 1 \\ y - 4x = 2 \end{cases}$

4.489. $\begin{cases} \log_4 x + \log_4 y = 3 \\ x - y = -12 \end{cases}$

4.490. $\begin{cases} \log_7 7x + \log_7 y = 2 \\ y - 5x = 2 \end{cases}$

Сложность «2»

В задачах **4.491—4.500** решить систему уравнений:

4.491. $\begin{cases} \log_2 x - \log_4 y = 0 \\ \log_4 x + \log_2 y = 1 \end{cases}$

4.492. $\begin{cases} \log_3 x + \log_3 y = 5 \\ \log_3 x - \log_3 y = 7 \end{cases}$

4.493. $\begin{cases} \log_3 (x - y) = 1 \\ \log_4 x - \log_4 y = 2 \end{cases}$

4.494. $\begin{cases} \log_2 x + \log_2 y = 4 \\ 2\lg x - \lg y + \lg 2 = 0 \end{cases}$

4.495. $\begin{cases} \lg (x + y) = \lg 2 + \lg 5 \\ \lg (x - y) + \lg (x + y) = 2 - \lg 5 \end{cases}$

4.496. $\begin{cases} \lg x + \lg y = \lg 99 \\ \lg (x + y) - \lg (x - y) = 1 \end{cases}$

4.497. $\begin{cases} \lg (x^2 + y^2) = \lg 12 + 1 \\ \lg (x + y) + \lg (x - y) = \lg 8 \end{cases}$

4.498. $\begin{cases} \log_4 x + \log_4 y = 2 \\ \log_2 x - \log_2 y = 4 \end{cases}$

4.499. $\begin{cases} \log_2 (x^2 + y^2) = 5 \\ \log_2 x + \log_2 y = 4 \end{cases}$

4.500. $\begin{cases} \lg x (\lg x + \lg y) = 2 \\ \lg x - \lg y = 3 \end{cases}$

Сложность «2»

В задачах **4.501—4.510** решить систему уравнений:

4.501. $\begin{cases} x + \log_2 y = y + \log_2 x \\ x \log_2 32 + \log_2 x = 2y + \log_2 y \end{cases}$

4.502. $\begin{cases} 3x + \log_4 y = y + \log_4 x \\ 2x + \log_4 x = (y/4) + \log_4 y \end{cases}$

4.503. $\begin{cases} 8x + 3 \cdot 2^y = 4y + 4 \cdot 3^x \\ 16x + 4 \cdot 3^x = 8y + 3 \cdot 2^y \end{cases}$

4.504. $\begin{cases} 192x + 25 \cdot 2^y = 64 \cdot 5^x + 64y \\ 384x + 64 \cdot 5^x = 25 \cdot 2^y + 128y \end{cases}$

4.505. $\begin{cases} 2x + 5 \cdot 10^y = 10 \cdot 5^x + 2y \\ x + 2 \cdot 5^x = y + 10^y \end{cases}$

4.506. $\begin{cases} 4,5x + \lg 0,5y = 0,5y + \lg 0,5x \\ x + \lg 0,5x = 0,05y + \lg 0,5y \end{cases}$

4.507. $\begin{cases} 3x + 3^y = 3y + 2^x \\ 5x + 4 \cdot 2^x = 5y + 4 \cdot 3^y \end{cases}$

4.508. $\begin{cases} 6,5x + \log_7 y = y + \log_7 x \\ (29/2)x + \log_7 x = 2y + \log_7 y \end{cases}$

4.509. $\begin{cases} x + \log_{1/2} y = \log_{1/2} x - 0,5y \\ \log_{1/2} x - 7x = \log_{1/2} y - 2,5y \end{cases}$

4.510. $\begin{cases} y + 3^{-x+2} = 2x + 2^{-y+4} \\ 5y + 2^{-y+4} = 3^{-x+2} + 10x \end{cases}$

Сложность «3»

В задачах **4.511—4.520** решить систему уравнений:

4.511. $\begin{cases} \log_4 x = y - 1 \\ x^{y/6} = 4 \end{cases}$

4.512. $\begin{cases} y^{1/x} = 10 \\ \lg y = 1/x \end{cases}$

4.513. $\begin{cases} x^y = 3 \\ \log_3 x - 2 + y = 0 \end{cases}$

4.514. $\begin{cases} y^x = 27 \\ \log_3 y = 3x^2 \end{cases}$

4.515. $\begin{cases} y^{x+5} = 10^{-6} \\ x - \lg y = 2 \end{cases}$

4.516. $\begin{cases} x^{1/y} = 4 \\ \log_2 x - 3 = -1/y \end{cases}$

4.517. $\begin{cases} y^x = 9 \\ x - \log_3 y = 1 \end{cases}$

4.518. $\begin{cases} x^y = 8 \\ \log_2 x = 2y + 1 \end{cases}$

4.519. $\begin{cases} y^{\sqrt{x}} = 16 \\ \sqrt{x} - 2\log_2 y = 2 \end{cases}$

4.520. $\begin{cases} x^y = 10x \\ y + \lg x = 3 \end{cases}$

Раздел V

НЕРАВЕНСТВА

§ 15. РАЦИОНАЛЬНЫЕ НЕРАВЕНСТВА И СИСТЕМЫ НЕРАВЕНСТВ

Сложность «0»

В задачах **5.001—5.010** найти наибольшее целое x, удовлетворяющее неравенству:

5.001. $\frac{2x+1}{3} - \frac{3x-1}{2} > 1$

5.002. $\frac{9x+2}{10} - \frac{10x-2}{9} > 2$

5.003. $\frac{8x+4}{11} - \frac{9x-5}{10} > 2$

5.004. $\frac{7x+3}{8} - \frac{6x-2}{5} > 1,5$

5.005. $\frac{7x+1}{9} - \frac{4x-5}{5} > 1$

5.006. $\frac{3x-5}{4} - \frac{5x-8}{6} > \frac{1}{6}$

5.007. $\frac{5x-2}{8} - \frac{3x-1}{4} > -\frac{2}{3}$

5.008. $\frac{4x-3}{3} - \frac{8x-2}{5} > -\frac{8}{7}$

5.009. $\frac{6x-2}{7} - \frac{7x-2}{8} > -\frac{4}{3}$

5.010. $\frac{5x-1}{4} - \frac{8x-3}{5} > -\frac{3}{2}$

Сложность «0»

В задачах **5.011—5.020** найти целочисленные решения системы неравенств:

5.011. $\begin{cases} 13-2x>0 \\ 3x-9>0 \end{cases}$

5.012. $\begin{cases} -2-5x>0 \\ 2x+3>0 \end{cases}$

5.013. $\begin{cases} 3x-2>0 \\ 3-x>0 \end{cases}$

5.014. $\begin{cases} -13+3x<0 \\ 3-x<0 \end{cases}$

5.015. $\begin{cases} 2x-5<0 \\ 3x+4>0 \end{cases}$

5.016. $\begin{cases} 3x+13>0 \\ 5x+12<0 \end{cases}$

5.017. $\begin{cases} 3x-8<0 \\ 2x>3 \end{cases}$

5.018. $\begin{cases} 2x-21>0 \\ 3x-40<0 \end{cases}$

5.019. $\begin{cases} 3x+2>0 \\ 2-5x>0 \end{cases}$

5.020. $\begin{cases} 17-4x<0 \\ 10x-67<0 \end{cases}$

Сложность «0»

В задачах **5.021—5.030** найти целочисленные решения неравенства:

5.021. $\frac{6x-5}{4x+1}<0$

5.022. $\frac{2x-3}{x+1}<0$

5.023. $\frac{2-3x}{2x+5}>0$

5.024. $\frac{7x-12}{1-6x}>0$

5.025. $\frac{4x+3}{2-0,5x}>0$

5.026. $\frac{3-5x}{1+0,5x}>0$

5.027. $\frac{0,6x+1}{5x+2}<0$

5.028. $\frac{0,5-x}{6-2x}<0$

5.029. $\frac{2-2x}{2x+3,45}>0$

5.030. $\frac{7x-15}{3x+3}<0$

Сложность «0»

В задачах **5.031—5.040** найти целочисленные решения неравенства:

5.031. $2x^2-9x+4<0$

5.032. $x^2-6x+5<0$

5.033. $2x^2-3x-2<0$

5.034. $x^2-5x+4<0$

5.035. $2x^2-5x+2<0$

5.036. $x^2-2x-3<0$

5.037. $2x^2-5x-3<0$

5.038. $x^2-4x+3<0$

5.039. $2x^2-7x+3<0$

5.040. $x^2-x-2<0$

Сложность «0»

В задачах **5.041—5.050** решить неравенство:

5.041. $\frac{1}{x} > \frac{1}{3}$

5.042. $\frac{2}{2x+3} > \frac{1}{4}$

5.043. $\frac{3}{x} > \frac{1}{2}$

5.044. $\frac{2}{x-1} > \frac{1}{7}$

5.045. $\frac{1}{x} > \frac{1}{5}$

5.046. $\frac{13}{x+1} > \frac{1}{2}$

5.047. $\frac{3}{x} > \frac{1}{4}$

5.048. $\frac{3}{x-2} > \frac{1}{8}$

5.049. $\frac{4}{x} > \frac{1}{4}$

5.050. $\frac{4}{x+3} > \frac{1}{5}$

Сложность «1»

В задачах **5.051—5.060** решить неравенство:

5.051. $\frac{7}{x} - \frac{x}{7} > 0$

5.052. $\frac{x}{2} < \frac{8}{x}$

5.053. $\frac{9}{x} > \frac{x}{4}$

5.054. $\frac{x}{11} - \frac{11}{x} < 0$

5.055. $x < \frac{64}{x}$

5.056. $\frac{3}{x} > \frac{x}{27}$

5.057. $\frac{x}{20} - \frac{5}{x} < 0$

5.058. $\frac{36}{x} > \frac{x}{4}$

5.059. $\frac{x}{4} < \frac{1}{x}$

5.060. $\frac{x}{9} - \frac{1}{x} < 0$

Сложность «1»

В задачах **5.061—5.070** решить неравенство:

5.061. $\frac{5}{x} - \frac{3}{3-x} < 0$

5.062. $\frac{3}{5-x} > \frac{4}{x}$

5.063. $\frac{3}{x} + \frac{1}{x-7} < 0$

5.064. $\frac{2}{x} - \frac{5}{6-x} < 0$

5.065. $\frac{4}{6-x} > \frac{6}{x}$

5.066. $\frac{3}{x} + \frac{7}{x-4} < 0$

5.067. $\frac{5}{x} < \frac{4}{9-x}$

5.068. $\frac{2}{10-x} - \frac{7}{x} > 0$

5.069. $\frac{10}{x} + \frac{12}{x-2} < 0$

5.070. $\frac{4}{x-5} < -\frac{5}{x}$

Сложность «2»

В задачах **5.071—5.080** решить неравенство:

5.071. $\frac{3x+2}{x^2+x-2}<-1$

5.072. $\frac{6}{x^2-x-6}<-1$

5.073. $\frac{x+5}{x^2-1}>1$

5.074. $\frac{3-9x}{x^2-1}>2$

5.075. $\frac{2x-7}{x^2+2x-8}>1$

5.076. $\frac{7x+1}{x^2+4x+3}>1$

5.077. $\frac{5x+1}{x^2-3x-4}<-1$

5.078. $\frac{5x+3}{x^2+x-2}>1$

5.079. $\frac{19x-2}{x^2+5x+4}>2$

5.080. $\frac{19x+53}{x^2-4x+3}<-1$

Сложность «2»

В задачах **5.081—5.090** решить неравенство:

5.081. $\frac{x^2+4x-1}{x^2+4x+3}\le\frac{1}{x+1}$

5.082. $\frac{x^2-x+6}{x^2-3x+2}\ge\frac{2x}{x-2}$

5.083. $\frac{x^2-5x+11}{x^2-x-2}+\frac{7}{x+1}\le 0$

5.084. $\frac{x^2-7x-2}{x^2+3x+2}-\frac{2x-8}{x+2}\ge 0$

5.085. $\frac{x^2+3x+54}{x^2-8x+15}+\frac{8}{x-5}\le 0$

5.086. $\frac{x^2-5x+64}{x^2-11x+30}\le\frac{10}{5-x}$

5.087. $\frac{2x^2-14x+6}{x^2-4x+3}\ge\frac{3x-8}{x-3}$

5.088. $\frac{5x^2-33x+42}{x^2-8x+15}\le\frac{4x}{x-3}$

5.089. $\frac{x^2+13x+24}{2+x-x^2}\ge\frac{4}{2-x}$

5.090. $\frac{2x^2-7x+41}{x^2+7x+12}\le\frac{x+2}{x+4}$

Сложность «3»

В задачах **5.091—5.100** решить неравенство:

5.091. $(x^2-3x-2)(x^2-3x+1)<10$

5.092. $(x^2+3x+1)(x^2+3x+3)<35$

5.093. $(x^2-2x+1)(x^2-2x+3)<3$

5.094. $(x^2-x)(x^2-x-2)<120$

5.095. $(x^2+x-2)(x^2+x)<24$

5.096. $(x^2+2x)(x^2+2x-3)<40$

5.097. $(x^2+4x-5)(x^2+4x+3)<105$

5.098. $(x^2-3x)(x^2-3x+2)<24$

5.099. $(x^2+3x+2)(x^2+3x+4)<48$

5.100. $(x^2-2x)(x^2-2x+5)<24$

Сложность «3»

В задачах **5.101—5.110** найти наибольшее значение параметра a, при котором неравенство верно для любого действительного x:

5.101. $3x^2 - 18x - 3 \geq a$

5.102. $2x^2 - 4x - 2 \geq a$

5.103. $2x^2 + 4x - 4 \geq a$

5.104. $4x^2 - 8x - 1 \geq a$

5.105. $2x^2 - 6x - 1,5 \geq a$

5.106. $3x^2 + 9x - 0,25 \geq a$

5.107. $x^2 - 10x - 5 \geq a$

5.108. $2x^2 - 2x - 0,5 \geq a$

5.109. $3x^2 + 24x - 1 \geq a$

5.110. $2x^2 + 20x - 4 \geq a$

Сложность «3»

В задачах **5.111—5.120** найти целочисленные решения системы неравенств:

5.111. $\begin{cases} x+y<2,5 \\ x-y>-3 \\ y-1>0 \end{cases}$

5.112. $\begin{cases} 2x+y-7<0 \\ 2x-y+3>0 \\ y>3 \end{cases}$

5.113. $\begin{cases} 6x+y<5,5 \\ 6x-y+6,5>0 \\ y>4 \end{cases}$

5.114. $\begin{cases} x+y-3<0 \\ x-y+2,5>0 \\ y>1 \end{cases}$

5.115. $\begin{cases} 7x+y<7 \\ 7x-y+7>0 \\ y>5 \end{cases}$

5.116. $\begin{cases} 8x+y<8 \\ 8x-y+8>0 \\ y>6 \end{cases}$

5.117. $\begin{cases} 9x+y-9<0 \\ 9x-y+9>0 \\ y>7 \end{cases}$

5.118. $\begin{cases} x+y-3<0 \\ x-y+3>0 \\ y>1 \end{cases}$

5.119. $\begin{cases} 2x+y-8<0 \\ 2x-y+4>0 \\ y>4 \end{cases}$

5.120. $\begin{cases} 10x+y-10<0 \\ 10x-y+10>0 \\ y>8 \end{cases}$

§ 16. НЕРАВЕНСТВА, СОДЕРЖАЩИЕ НЕИЗВЕСТНЫЕ ПОД ЗНАКОМ АБСОЛЮТНОЙ ВЕЛИЧИНЫ

1) $\sqrt{f(x)} < g(x) \Leftrightarrow 0 \leq f(x) < g^2(x);$

2) $\sqrt{f(x)} > g(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) > g^2(x) \\ g(x) \geq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) < 0 \end{cases} \end{array} \right.$

Сложность «0»

В задачах **5.121—5.130** решить неравенство:

5.121. $|0,5-x|<3$ **5.122.** $|x-3|<1$ **5.123.** $|2x-5|<3$

5.124. $|5-0,5x|<1$ **5.125.** $|2-4x|<7$ **5.126.** $|1-5x|<1$

5.127. $|7+x|<2$ **5.128.** $|3-2x|<4$ **5.129.** $|4+2x|<5$

5.130. $|1,5-3x|<3$

Сложность «1»

В задачах **5.131—5.140** найти наибольшее целое x, удовлетворяющее неравенству:

5.131. $|5x-3|>6x-2$ **5.132.** $|x-3|>2x$

5.133. $|4x+2|>5x+3$ **5.134.** $|2x-2|>3x+2$

5.135. $|6x-5|>7x-8$ **5.136.** $|3x+4|>5x$

5.137. $|0,5x+1|>x-5$ **5.138.** $|2+x|>3x-3$

5.139. $|0,25x+1|>x-5$ **5.140.** $|1,5x+3|>2x+0,5$

Сложность «1»

В задачах **5.141—5.150** найти наименьшее целое x, удовлетворяющее неравенству:

5.141. $\frac{2x+5}{|x+1|}>1$ **5.142.** $\frac{3x-4}{|x-3|}>2$ **5.143.** $\frac{2x+5}{|x+2|}>1$

5.144. $\frac{3x+11}{|x+3|}>2$ **5.145.** $\frac{x-2}{|x-3|}>1$ **5.146.** $\frac{x+1}{|2x-3|}>2,5$

5.147. $\frac{4x-3}{|3x-3|}>1$ **5.148.** $\frac{x+2,5}{|1-2x|}>3$ **5.149.** $\frac{3x+1}{|2-x|}>7$

5.150. $\frac{4+x}{|1+x|}>3$

Сложность «2»

В задачах **5.151—5.160** решить неравенство:

5.151. $\frac{-2}{|x|+1}\geq|x|-2$ **5.152.** $\frac{5}{|3-x|+4}>|3-x|$

5.153. $\frac{3}{|x-1|+1}>|x-1|-1$ **5.154.** $\frac{-60}{|x|+7}>|x|-9$

5.155. $\frac{5}{|x+2|+2}>|x+2|-2$ **5.156.** $\frac{5}{|x+1|+3}<-2|x+1|+5$

5.157. $\frac{88}{|x+3|+6}<-2|x+3|+15$ **5.158.** $\frac{2}{|2x+1|+1}\leq-|2x+1|+2$

5.159. $\frac{4}{|2x+3|+3}>|2x+3|$ **5.160.** $\frac{6}{|x+2|+5}>|x+2|$

§ 17. ИРРАЦИОНАЛЬНЫЕ НЕРАВЕНСТВА

Сложность «1»

В задачах **5.161—5.170** найти наименьшее целое x, удовлетворяющее неравенству:

5.161. $\sqrt{x} > 2$ **5.162.** $\sqrt{2-2x} < 1$ **5.163.** $\sqrt{x+3} > 2$

5.164. $\sqrt{x-8} > 3$ **5.165.** $0,25\sqrt{x-2} > 2$ **5.166.** $\sqrt{x+1} > \sqrt{2}$

5.167. $\sqrt{6-2x} < \sqrt{5}$ **5.168.** $\sqrt{19+2x} > 3$ **5.169.** $\sqrt{2x-7} > 1$

5.170. $\sqrt{2-4x} < 4$

Сложность «1»

В задачах **5.171—5.180** решить неравенство:

5.171. $\sqrt{4+2x} < 1,5$ **5.172.** $\sqrt{x-0,5} < 1$ **5.173.** $\sqrt{2x+3} < 2$

5.174. $\sqrt{3x-6} < 3$ **5.175.** $\sqrt{x-3} < 2$ **5.176.** $\sqrt{0,5x-1} < 0,5$

5.177. $\sqrt{4x-1} < 3$ **5.178.** $\sqrt{0,2x+1} < 2$ **5.179.** $\sqrt{x+2} < 0,5$

5.180. $\sqrt{x+1} < 1$

Сложность «2»

В задачах **5.181—5.190** решить неравенство:

5.181. $\sqrt{14-x} > 2-x$ **5.182.** $2\sqrt{x-1} > x-4$

5.183. $\sqrt{24-5x} > -x$ **5.184.** $\sqrt{9x-20} > x$

5.185. $\sqrt{x+6} > x$ **5.186.** $\sqrt{2x-1} > x-2$

5.187. $\sqrt{x+78} > x+6$ **5.188.** $\sqrt{x+61} > x+5$

5.189. $\sqrt{x+1} > x-1$ **5.190.** $2\sqrt{x+48} > x$

§ 18. ПОКАЗАТЕЛЬНЫЕ НЕРАВЕНСТВА

***a, b, c* — действительные числа.**

$$1)\ a^x > c \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x > \log_a c,\ a > 1,\ c > 0 \\ x < \log_a c,\ 0 < a < 1,\ c > 0 \end{array}\right.;$$

$$2)\ a^x < c \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x < \log_a c,\ a > 1 \\ x > \log_a c,\ 0 < a < 1 \end{array}\right.;$$

$$3)\ a^x > a^b \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x > b, a > 1 \\ x < b, 0 < a < 1 \end{array} \right. ;$$

$$4)\ a^x < a^b \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x < b, a > 1 \\ x > b, 0 < a < 1 \end{array} \right. ;$$

Сложность «0»

В задачах **5.191—5.200** найти наименьшее целое x, удовлетворяющее неравенству:

5.191. $2^{-x} < \sqrt{2}$ **5.192.** $\left(\frac{1}{7}\right)^{-x/3} > 7$ **5.193.** $4^{-x/2} < 8$

5.194. $\left(\frac{1}{3}\right)^{-x/2} > \sqrt{3}$ **5.195.** $\left(\frac{1}{4}\right)^{-3x} > \sqrt{2}$ **5.196.** $9^{x/5} > \frac{1}{\sqrt{3}}$

5.197. $10^{2x/7} > 0{,}1$ **5.198.** $\left(\frac{1}{5}\right)^{x/3} < 25$ **5.199.** $\left(\frac{1}{6}\right)^{2x/15} < \sqrt[5]{6}$

5.200. $2^{x/2} > 8$

Сложность «0»

В задачах **5.201—5.210** найти наибольшее целое x, удовлетворяющее неравенству:

5.201. $3^{2x} < \sqrt[3]{3}$ **5.202.** $4^{x/3} < 16$ **5.203.** $8^{x+2} < \frac{1}{8}$

5.204. $\left(\frac{1}{2}\right)^{-x} < 4$ **5.205.** $\left(\frac{1}{9}\right)^{x/5} > 3$ **5.206.** $5^{x/4} < 25$

5.207. $\left(\frac{1}{6}\right)^{-x/3} < 6$ **5.208.** $2^{2x/3} < \frac{1}{2}$ **5.209.** $4^{3x/5} < \frac{1}{\sqrt[3]{4}}$

5.210. $9^{-2x/7} > \frac{1}{3}$

Сложность «1»

В задачах **5.211—5.220** найти наибольшее целое x, удовлетворяющее неравенству:

5.211. $3 \cdot 5^{x+1} + 6 \cdot 5^{-(x+1)} < \frac{81}{5^{x+1}}$ **5.212.** $162 \cdot 3^{5-x} - 2 \cdot 3^{x-5} > 0$

5.213. $4 \cdot 3^{x+4} + 19 \cdot 3^{-(x+4)} < \frac{31}{3^{x+4}}$ **5.214.** $54 \cdot 3^{3-x} - 2 \cdot 3^{x-3} > 0$

5.215. $163 \cdot 2^{-x} - 5 \cdot 2^x > \frac{3}{2^x}$ **5.216.** $3 \cdot 5^{x+3} - 75 \cdot 5^{-(x+3)} < 0$

5.217. $2 \cdot 3^x + \frac{7}{3^x} < 61 \cdot 3^{-x}$ **5.218.** $7 \cdot 2^{x+4} - 448 \cdot 2^{-x-4} < 0$

5.219. $\frac{81}{6^x} - 2 \cdot 6^x > 9 \cdot 6^{-x}$ **5.220.** $5 \cdot 4^{x+2} - \frac{80}{4^{x+2}} < 0$

Сложность «I»

В задачах **5.221—5.230** найти наименьшее целое x, удовлетворяющее неравенству:

5.221. $2^{2x} - 15 \cdot 11^x < 11^x - 15 \cdot 2^{2x+3}$

5.222. $6 \cdot 5^x - 6^x < 4 \cdot 6^{x+1} - 6 \cdot 5^{x+1}$

5.223. $5^{\frac{x}{2}+1} - 6 \cdot 3^{x-1} < \frac{2}{3} \cdot 5^{\frac{x}{2}+1} - 3^{x-1}$

5.224. $3 \cdot 5^{2x} - 15 \cdot 2^{2x+1} + 5^{2x} + 5 \cdot 2^{2x} > 0$

5.225. $2^{x+2} + 10 \cdot 11^{x+1} < 11^{x+2} + 2^{x+1}$

5.226. $2 \cdot 3^{x+1} - 9 \cdot 2^{x+1} > 9 \cdot 2^x - 2 \cdot 3^x$

5.227. $5 \cdot 3^x - 2^{x+3} > 3^x + 2^x$

5.228. $2^{2x} + 2^{2x-1} > \sqrt{3} \cdot 3^x + 3^{x-0,5}$

5.229. $10 \cdot 3^{x+2} - 4 \cdot 10^{x+2} < 3^{x+4} - 3 \cdot 10^{x+2}$

5.230. $5^{x+2} - 5^{x+1} > 2^{x+2} + 2^{x+4}$

Сложность «I»

В задачах **5.231—5.240** решить неравенство:

5.231. $3^x (3^x + 3^{1-x} - 4) < 0$

5.232. $0,1^{x+1} (0,1^x + 0,1^{-x-1} - 11) < 0$

5.233. $0,2^x (5^{-x} + 5^{x+1} - 6) < 0$

5.234. $5^x (5^x + 5^{4-x} - 130) < 0$

5.235. $6^x\left(\left(\frac{1}{6}\right)^{-x} + 6^{2-x} - 37\right) \le 0$

5.236. $7^{2x} (7^{x+1} + 7^{-x} - 8) \le 0$

5.237. $4^x (2^x + 2^{5-x} - 12) \le 0$

5.238. $2^{-x} (0,5^x + 2^{x+3} - 6) < 0$

5.239. $3^x (3^x + 3^{3-x} - 28) < 0$

5.240. $2^x (2^x + 2^{3-x} - 6) \le 0$

Сложность «I»

В задачах **5.241—5.250** решить неравенство:

5.241. $2^{2x-1} - 3 \cdot 2^{x-1} + 1 < 0$

5.242. $25^x < 6 \cdot 5^x - 5$

5.243. $7^x - 8 \cdot 7^{x/2} + 7 < 0$

5.244. $5^{4x-1} + 1 < 6 \cdot 5^{2x-1}$

5.245. $3^{2x+1} + 1 < 4 \cdot 3^x$

5.246. $2^{2x+2} + 2 < 9 \cdot 2^x$

5.247. $2^{2x+3} + 2 < 2^{x+4} + 2^x$

5.248. $5^{2x+1} + 5 < 5^{x+2} + 5^x$

5.249. $5^{2x+1} < 6 \cdot 5^x - 1$

5.250. $3^{8x} - 4 \cdot 3^{4x} < -3$

Сложность «1»

В задачах **5.251—5.260** решить неравенство:

5.251. $\left(\frac{3}{4}\right)^{6x+10-x^2} < \frac{27}{64}$

5.252. $\left(\frac{1}{3}\right)^{x^2+2x} > \left(\frac{1}{9}\right)^{16-x}$

5.253. $\left(\frac{1}{2}\right)^{2x-1} < \left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-2x-1}$

5.254. $\left(\frac{1}{2}\right)^{x} < \left(\frac{1}{4}\right)^{x^2}$

5.255. $\left(\frac{3}{10}\right)^{2x^2-3x+6} > \frac{243}{100\,000}$

5.256. $\left(\frac{2}{5}\right)^{-25x^2+20x+10} < \frac{25}{4}$

5.257. $0,8^{\frac{x(x-3)}{2}} > 0,64$

5.258. $\left(\frac{2}{7}\right)^{3(x-(1/3))} < \left(\frac{4}{49}\right)^{x^2}$

5.259. $\left(\frac{1}{64}\right)^{3,5x+3} > \left(\frac{1}{8}\right)^{-x^2}$

5.260. $\left(\frac{1}{3}\right)^{x^2-2x} > \left(\frac{1}{9}\right)^{x+16}$

Сложность «1»

В задачах **5.261—5.270** решить неравенство:

5.261. $\left(\frac{2}{5}\right)^{\frac{6-5x}{2+5x}} > \frac{25}{4}$

5.262. $\left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{2x+1}{1-x}} > \left(\frac{1}{5}\right)^{-3}$

5.263. $(0,2)^{\frac{3x-3}{x-2}} > \frac{1}{5}$

5.264. $\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{x-1}{x}} > \sqrt{27}$

5.265. $0,5^{\frac{x+1}{x-1}} < \frac{1}{32}$

5.266. $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{x}+1} < \frac{1}{8}$

5.267. $\left(\frac{3}{7}\right)^{\frac{x-1}{x+5}} > \frac{7}{3}$

5.268. $\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{x-2}{3-3x}} > \frac{9}{4}$

5.269. $\left(\frac{1}{6}\right)^{\frac{x}{1+2x}} > 36$

5.270. $\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{x+1}{x-2}} > \frac{\sqrt{3}}{2}$

Сложность «2»

В задачах **5.271—5.280** решить неравенство:

5.271. $\frac{6^{\sqrt{x}}}{x+1} > 6^{\sqrt{x}-1}$

5.272. $\frac{5^{\sqrt{x}}}{x} > 5^{\sqrt{x}+2}$

5.263. $\frac{2^{\sqrt{x-1}}}{4x} > 2^{\sqrt{x-1}-3}$

5.264. $\frac{3^{\sqrt{x-3}}}{3x+3} > 3^{\sqrt{x-3}-3}$

5.275. $\frac{3^{\sqrt{x}+1}}{x} > 3^{\sqrt{x}-1}$

5.276. $\frac{5^{\sqrt{x-1}}}{5x} > 5^{\sqrt{x-1}-2}$

5.277. $\frac{7^{\sqrt{x}+2}}{x} > 7^{\sqrt{x}+1}$

5.278. $\frac{4^{\sqrt{x-2}+1}}{16x} > 4^{\sqrt{x-2}-2}$

5.279. $\frac{10^{\sqrt{x-1}+2}}{x+1} > 10^{\sqrt{x-1}+1}$

5.280. $\frac{4^{\sqrt{x}+1}}{x} > 2^{2\left(\sqrt{x}-1\right)}$

Сложность «3»

В задачах **5.281—5.290** решить неравенство:

5.281. $3^{\sqrt{x}} - 2 < 3^{1-\sqrt{x}}$

5.282. $3^{\sqrt{x-1}+1} - 8 < 3^{1-\sqrt{x-1}}$

5.283. $6^{\sqrt{x-2}} - 2 < \frac{24}{6^{\sqrt{x-2}}}$

5.284. $2^{\sqrt{x+1}} - 6 < 2^{4-\sqrt{x+1}}$

5.285. $2^{\sqrt{x-3}+1} - 6 < 2^{3-\sqrt{x-3}}$

5.286. $11^{\sqrt{x}} - 10 < \frac{11}{11^{\sqrt{x}}}$

5.287. $3^{\sqrt{x+2}} - 8 < 3^{2-\sqrt{x+2}}$

5.288. $2^{2\sqrt{x+0.5}} + 2^{3-2\sqrt{x+0.5}} < 6$

5.289. $2^{\sqrt{x-1.5}} + 2^{1-\sqrt{x-1.5}} < 6$

5.290. $8^{\sqrt{2x-1}} - 8^{1-\sqrt{2x-1}} < 7$

Сложность «3»

В задачах **5.291—5.300** решить неравенство:

5.291. $(x-0,5)^{x^2-0,25} < 1$

5.292. $(x-2)^{x^2-4} < 1$

5.293. $(x+0,2)^{x^2-0,04} < 1$

5.294. $(x-2)^{x^2-1} < 1$

5.295. $(x-4)^{x^2-9} < 1$

5.296. $(x+0,5)^{x^2-4} < 1$

5.297. $(x-1)^{x^2-1} < 1$

5.298. $(x+1)^{x^2-9} < 1$

5.299. $(x+3)^{x^2-16} < 1$

5.300. $(x-3)^{x^2-9} < 1$

Сложность «3»

В задачах **5.301—5.310** решить неравенство:

5.301. $\frac{x^2-2}{2^{2\sqrt{x}}} \le 4^{0.5-\sqrt{x}}$

5.302. $x^2 \cdot 27^{\sqrt{x}} \le 3^{3\left(\sqrt{x}+\frac{2}{3}\right)}$

5.303. $x^2 \cdot 4^{\sqrt{x}} \le 4^{\sqrt{x}+1}$

5.304. $x^2 \cdot 9^{\sqrt{x}} \le 3^{2\left(\sqrt{x}+2\right)}$

5.305. $(x^2-5x) \cdot 2^{\sqrt{x}} \le 0,5^{-3-\sqrt{x}} - 2^{\sqrt{x}+1}$

5.306. $0,125^{\sqrt{x}} \ge \frac{x^2}{8^{\sqrt{x}}}$

5.307. $4^{\sqrt{x}} \ge x^2 \cdot 2^{2\left(\sqrt{x}+2\right)}$

5.308. $\frac{x^2}{4^{\sqrt{x}}} \le 2^{2\left(2-\sqrt{x}\right)}$

5.309. $0,04^{\sqrt{x}} \ge \frac{x^2}{25^{\sqrt{x}}}$

5.310. $\frac{x^2-x}{2^{\sqrt{x}}} < 0,5^{\sqrt{x}-1}$

§ 19. ЛОГАРИФМИЧЕСКИЕ НЕРАВЕНСТВА

$$1)\ \log_a x > \log_a b \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x > b, b > 0, a > 1 \\ 0 < x < b, 0 < a < 1 \end{array}\right.;$$

$$2)\ \log_a x < \log_a b \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 0 < x < b, a > 1, b > 0 \\ x > b, 0 < a < 1, b > 0 \end{array}\right.;$$

$$3)\ \log_a x > c \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x > a^c, a > 1 \\ 0 < x < a^c, 0 < a < 1 \end{array}\right.;$$

$$4)\ \log_a x < c \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 0 < x < a^c, a > 1 \\ x > a^c, 0 < a < 1 \end{array}\right..$$

Сложность «0»

В задачах **5.311—5.320** найти наименьшее целое x, удовлетворяющее неравенству:

5.311. $\lg 3^{x-1} - \lg 3^{2x+4} < \lg 3$

5.312. $\lg 8 + \lg 20 < \lg 5 + \lg 2^{2x-5}$

5.313. $\lg 3^{3x-1} + \lg 4 > \lg 9 + \lg 12$

5.314. $\lg 24 + \lg 4 < \lg 6 + \lg 4^{2x+8}$

5.315. $\lg(2^{x-2} + 3) - \lg 15 > \lg 7 - \lg 3$

5.316. $\lg 18 + \lg 16 < \lg(5^x + 7) + \lg 9$

5.317. $\lg(3^{x/10} + 5) + \lg 11 - \lg 7 > \lg 22$

5.318. $\lg(10^{x+5} + 8) + \lg 9 > \lg 27 + \lg 6$

5.319. $\lg 5^{4x} - \lg 25 > \lg 5^{3x+3} + \lg 5$

5.320. $\lg(7^{x+10} + 1) - \lg 70 > \lg 5 - \lg 7$

Сложность «0»

В задачах **5.321—5.330** найти наибольшее целое x, удовлетворяющее неравенству:

5.321. $\log_{3,1}(2x - 8) - \log_{3,1}6 < 0$

5.322. $\log_2\left(4 - \frac{x}{2}\right) - \log_2 8 < 0$

5.323. $\log_{0,5}(2x + 6) - \log_{0,5}4 > 0$

5.324. $\log_{1,4}(1 - 3x) - \log_{1,4}3 < 0$

5.325. $\log_{1/4}(x + 7) - \log_{1/4}4 > 0$

5.326. $\log_5(5 - x) - \log_5 7 < 0$

5.327. $\log_{0,2}(5x + 1) - \log_{0,2}19 > 0$

5.328. $\log_{4/3}(2x - 5) - \log_{4/3}13 < 0$

5.329. $\log_{0.25}\left(2 - \frac{x}{3}\right) - \log_{0.25}2 > 0$

5.330. $\log_3(4x + 2) - \log_3 10 < 0$

Сложность «0»

В задачах **5.331—5.340** найти целые числа x, при которых выполняется неравенство:

5.331. $\log_{1/2}(2x-1)+\log_{1/2}12>\log_{1/2}10+\log_{1/2}6$

5.332. $\log_{2/3}(3x+6)>\log_{2/3}3+2\log_{2/3}2$

5.333. $\log_{4/3}(x+6)-\log_{4/3}9<\log_{4/3}2-\log_{4/3}6$

5.334. $\log_{0,7}(x-8)+\log_{0,7}13>\log_{0,7}39$

5.335. $\log_{1,5}(4x+8)+2\log_{1,5}2<\log_{1,5}16+\log_{1,5}3$

5.336. $\log_{6/7}(5x+1)-\log_{6/7}6>\log_{6/7}8-\log_{6/7}3$

5.337. $\log_{1,2}(x-6)+\log_{1,2}7<\log_{1,2}2+\log_{1,2}14$

5.338. $\log_{0,5}(2x+8)+\log_{0,5}8>\log_{0,5}12+2\cdot\log_{0,5}2$

5.339. $\log_{7/5}(6x-3)-\log_{7/5}18<\log_{7/5}9-\log_{7/5}6$

5.340. $\log_{0,1}(x-12)+2\cdot\log_{0,1}4>\log_{0,1}24+\log_{0,1}2$

Сложность «1»

В задачах **5.341—5.350** решить неравенство:

5.341. $\log_{1/5}(x-5)>-2$

5.342. $\log_{1/9}(x+3)>-0,5$

5.343. $\log_{1/4}(x-3)>1,5$

5.344. $\log_{1/3}(x-5)>-3$

5.345. $\log_{1/2}(x+3)>-2$

5.346. $\log_{1/3}(x-2)>-1$

5.347. $\log_{1/2}(x-5)>-2$

5.348. $\log_{3}(x+20)<3$

5.349. $\log_{5}(x+13)<2$

5.350. $\log_{1/8}(x-7)>-\frac{2}{3}$

Сложность «1»

В задачах **5.351—5.360** найти наименьшее целое x, удовлетворяющее неравенству:

5.351. $2x\cdot\log_{1/2}5-\log_{1/2}5<0$

5.352. $(x+2)\log_{2/3}7<-3\log_{2/3}7$

5.353. $4x\cdot\log_{0,6}2+\log_{0,6}2<0$

5.354. $(2x+6)\log_{1/3}4<2\log_{1/3}4$

5.355. $(x-3)\log_{0,1}8<3\cdot\log_{0,1}8$

5.356. $(5x+3)\log_{1/4}3<3\cdot\log_{1/4}3$

5.357. $(2x-5)\log_{0,3}5<9\cdot\log_{0,3}5$

5.358. $(x-8)\log_{0,5}3<5\cdot\log_{0,5}3$

5.359. $(3x-9)\log_{1/5}7-6\cdot\log_{1/5}7<0$

5.360. $(6x-2)\log_{0,25}6<16\log_{0,25}6$

Сложность «1»

В задачах **5.361—5.370** решить неравенство:

5.361. $\log_{1/\sqrt{3}}(12-x^2)<-2$

5.362. $\log_{1/2}(3x-x^2)<-1$

5.363. $\log_{\sqrt{2}}(6-x^2)>2$

5.364. $\log_2(3-x^2)>1$

5.365. $\log_{1/4}(5x-x^2)<-1$

5.366. $\log_3(4x-x^2)>1$

5.367. $\log_4(5-x^2)>1$

5.368. $\log_{1/9}(4x-x^2)<-0{,}5$

5.369. $\log_5(3x-2x^2)>0$

5.370. $\log_{1/4}(6x-4x^2)<-0{,}5$

Сложность «1»

В задачах **5.371—5.380** решить неравенство:

5.371. $9^{\log_9(x-4)}<3$

5.372. $5^{\log_5(x-7)}<4$

5.373. $2^{\log_2(x+7)}<3$

5.374. $26^{\log_{26}(x+1)}<11$

5.375. $12^{\log_{12}(x+5)}<7$

5.376. $11^{\log_{11}(x-1)}<2$

5.377. $6^{\log_6(x+2)}<3$

5.378. $7^{\log_7(x+5)}<2$

5.379. $3^{\log_3(x-1)}<2$

5.380. $5^{\log_5(x-4)}<3$

Сложность «2»

В задачах **5.381—5.390** решить неравенство:

5.381. $\log_{1/3}\log_3(x-1)>0$

5.382. $\log_{1/4}\log_2(x-5)>0$

5.383. $\log_{1/\sqrt{5}}\log_4(x-2)>0$

5.384. $\log_2\log_{\sqrt{2}}(x+1)<1$

5.385. $\log_{1/27}\log_8(x+3)>0$

5.386. $\log_3\log_{\sqrt{3}}(x-4)<1$

5.387. $\log_{\sqrt{27}}\log_{1/2}(x+2)>0$

5.388. $\log_9\log_{1/4}(x-2)>0$

5.389. $\log_2\log_{1/\sqrt{2}}(x-1)>1$

5.390. $\log_4\log_{1/\sqrt{2}}(x+1)>0{,}5$

Сложность «1»

В задачах **5.391—5.400** решить неравенство:

5.391. $\log_{1/\sqrt{2}}(x-1)+\log_2(x-1)>-2$

5.392. $\log_{1/2}(x+1)+2\log_2(x+1)<2$

5.393. $\lg(x+2)+\log_{1/\sqrt{10}}(x+2)>-1$

5.394. $3\log_3 x+\log_{1/\sqrt{3}}x<1$

5.395. $2\log_{1/5}(x-2)+3\log_5(x-2)<1$

5.396. $\log_4(x-3)+\log_2(x-3)<3/2$

5.397. $\log_{\sqrt{2}}(x-1)+\log_4(x-1)<5/2$

5.398. $\log_{1/\sqrt{2}}(x-4)+\log_2(x-4)>-1$

5.399. $\log_{\sqrt{3}}(x+1)+\log_{3\sqrt{3}}(x+1)<8/3$

5.400. $\log_{1/2}(x+2)+\log_{\sqrt{2}}(x+2)<1$

Сложность «3»

В задачах **5.401—5.410** решить неравенство:

5.401. $\log_{\log_3 2}(2x-3)>0$

5.402. $\dfrac{\log_4(x-1,3)}{\log_4\log_4 2,75}>0$

5.403. $\log_{\log_2(11/3)}(4+x)<0$

5.404. $\dfrac{\log_{1,5}(2x-5)}{\log_{1,5}\log_{1,5}4,5}<0$

5.405. $\log_{\log_{4/3}2}(2+2x)<0$

5.406. $\dfrac{\log_3\left(\frac{x}{2}+2\right)}{\log_3\log_{1/3}\frac{1}{7}}<0$

5.407. $\log_{\log_{1/3}(1/6)}\left(\dfrac{x}{3}-1\right)<0$

5.408. $\dfrac{\log_2(4x-5)}{\log_2\log_5\frac{13}{4}}>0$

5.409. $\log_{\log_{4,5}3,75}(x-2,5)>0$

5.410. $\dfrac{\lg\left(\frac{x}{2}+1\right)}{\lg\log_{2/3}\frac{1}{3}}<0$

Сложность «3»

В задачах **5.411—5.420** решить неравенство:

5.411. $\log_{x-2}(x+2)<1$

5.412. $\log_{2x+1}(5-2x)>1$

5.413. $\log_{x+1}(x+3)<1$

5.414. $\log_{2x+2}(2x+4)<1$

5.415. $\log_x(x+2)<1$

5.416. $\log_{4x}(5-4x)>1$

5.417. $\log_{10x+2}(10x+3)<1$

5.418. $\log_{x+1}(2-x)>1$

5.419. $\log_{x-1}(x+1)<1$

5.420. $\log_{x-3}(4-x)>1$

Сложность «3»

В задачах **5.421—5.430** решить неравенство:

5.421. $0{,}1^{\log_{\sqrt{7}} \lg(1/x)} \geq 1$

5.422. $25^{\log_{0,1} \log_5(-1/x)} < 1$

5.423. $0{,}5^{\log_{\sqrt{7}} \log_{1/2} \sqrt{x}} > 1$

5.424. $0{,}2^{\log_{\sqrt{7}} \lg(-x)} > 1$

5.425. $3^{\log_{\sqrt{7}} \lg(1/x)} < 1$

5.426. $0{,}1^{\lg \log_2(2/x)} > 1$

5.427. $2^{\log_{\sqrt{7}} \lg(x-1)} < 1$

5.428. $\left(\frac{1}{3}\right)^{\log_{\sqrt{7}} \lg(1/x)} > 1$

5.429. $0{,}5^{\lg \log_4(1/x)} > 1$

5.430. $10^{\log_{0,1} \lg(1/x)} \geq 1$

Сложность «3»

В задачах **5.431—5.440** решить неравенство:

5.431. $5 \cdot 0,2^{\lg x} > 0,2^{2\lg 2}$

5.432. $0,5^{\log_2 x} \geq 4 \cdot 0,5^{\log_2 3}$

5.433. $0,04^{\lg x-1} \geq 5^{\lg 4}$

5.434. $2^{\log_2 x+1} \leq \left(\sqrt{2}\right)^{\log_2 \sqrt{x}}$

5.435. $0,2 \cdot 25^{\lg \sqrt{x}} < 5^{\lg \sqrt{0,25}}$

5.436. $10^{0,5 \lg x} < 0,01^{\lg 2}$

5.437. $0,2^{2\log_2 5} < 25 \cdot 0,2^{\log_2 x}$

5.438. $5^{\lg(1/x)} > 0,2^{2\lg 2}$

5.439. $\left(\frac{1}{5}\right)^{\lg 4} < 25 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^{\lg x}$

5.440. $3^{\log_{\sqrt{3}} x} < 3^{2\log_3 \sqrt{3}+1}$

Сложность «3»

В задачах **5.441—5.450** решить неравенство:

5.441. $x\log_2 x - \dfrac{4}{\log_x 2} < 0$

5.442. $x\lg x - \dfrac{2}{\log_x 10} < 0$

5.443. $x\log_3 x - \dfrac{3}{\log_x 3} \leq 0$

5.444. $(x+2)\log_2 x - \dfrac{2}{\log_x 2} \leq 0$

5.445. $(x-1)\log_{1/3} x + \dfrac{1}{2\log_x \frac{1}{3}} \geq 0$

5.446. $2x \cdot \log_{0,2} x - \dfrac{x+5}{\log_x 0,2} \geq 0$

5.447. $x\log_5 x - \dfrac{5-x}{\log_x 5} < 0$

5.448. $x\log_{0,1} x - \dfrac{10}{\log_x 0,1} \geq 0$

5.449. $(x-2)\log_2 x + \dfrac{1}{2\log_x 2} \geq 0$

5.450. $(1-3x)\lg x - \dfrac{2(x-1)}{\log_x 10} > 0$

Раздел VI

ПРОГРЕССИИ

§ 20. АРИФМЕТИЧЕСКАЯ ПРОГРЕССИЯ

Основные формулы

$$a_{n+1} = a_n + d$$

$$a_n = a_1 + d(n-1)$$

$$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} n$$

Здесь a_n — n-й член; d — разность прогрессии, S_n — сумма первых n членов.

Сложность «0»

В задачах **6.001—6.010** найти:

6.001. a_{11}, если $a_1 = 2$; $d = 0{,}2$

6.002. a_1, если $a_6 = 3$; $d = 0{,}5$

6.003. d, если $a_7 = 12$; $a_1 = 3$

6.004. a_{13}, если $a_1 = 2$; $a_2 = 4$

6.005. a_9, если $a_3 = 4$; $d = 0{,}5$

6.006. a_5, если $a_6 = 21$; $a_1 = -1$

6.007. a_1, если $a_5 = 12$; $a_6 = 13$

6.008. a_{20}, если $a_5 = 10$; $d = 0{,}2$

6.009. d, если $a_6 = 6{,}2$; $a_{31} = 21{,}2$

6.010. a_1, если $a_{11} = 26$; $a_{41} = 44$

Сложность «0»

В задачах **6.011—6.020** найти n, если:

6.011. $a_1 = 0$; $d = 0{,}5$; $a_n = 6$

6.012. $a_1 = -3{,}5$; $d = 4$; $a_n = 48{,}5$

6.013. $a_2 = 2$; $d = 1$; $a_n = 18$

6.014. $a_3 = 5{,}5$; $a_1 = 1{,}5$; $a_n = 11{,}5$

6.015. $a_n = 15$; $a_1 = 5$; $d = 0{,}5$

6.016. $a_1 = -2{,}7$; $a_n = 3{,}8$; $d = 0{,}1$

6.017. $a_1 = -12$; $a_2 = -10{,}5$; $a_n = 0$

6.018. $a_7 = 8$; $a_8 = 7$; $a_n = -10$

6.019. $a_{15} = 2{,}5$; $a_{14} = 2$; $a_n = 15$

6.020. $a_{10} = -12$; $a_{11} = -11{,}5$; $a_n = 0$

Сложность «I»

В задачах **6.021—6.030** найти:

6.021. S_{30}, если $a_1 = 0{,}2$; $a_2 = 0{,}5$

6.022. S_{10}, если $a_1 = 0{,}5$; $a_{10} = 12$

6.023. S_8, если $a_2 = 0{,}5$; $a_3 = 0{,}7$

6.024. S_6, если $a_1 = 1{,}2$; $a_4 = 1{,}8$

6.025. S_5, если $a_1 = 1$; $a_6 = 21$

6.026. a_1, если $a_4 = 1$; $S_4 = 2{,}8$

6.027. d, если $S_8 = 12$; $a_1 = -2$

6.028. a_4, если $S_5 = 10$; $d = 1{,}2$

6.029. S_8, если $d = 1$; $S_2 = 10$

6.030. a_2, если $S_6 = 18$; $a_1 = 2$

Сложность «I»

В задачах **6.031—6.040** найти:

6.031. $\sum\limits_{k=10}^{k=25} a_k = a_{10} + a_{11} + a_{12} + \ldots + a_{24} + a_{25}$, если $a_1 = 2$; $d = 8$

6.032. $\sum\limits_{k=7}^{15} a_k$, если $a_1 = 7$; $d = 15$

6.033. $\sum\limits_{k=3}^{18} a_k$, если $a_1 = 8$; $a_2 = 8{,}5$

6.034. $\sum\limits_{k=14}^{29} a_k$, если $a_2 = 3$; $a_3 = -1$

6.035. $\sum\limits_{k=20}^{31} a_k$, если $a_1 = 1$; $a_3 = 4$

6.036. $\sum\limits_{k=13}^{30} a_k$, если $a_1 = 2$; $d = -0{,}5$

6.037. $\sum\limits_{k=10}^{24} a_k$, если $a_3 = 1$; $a_4 = -0{,}5$

6.038. $\sum\limits_{k=18}^{30} a_k$, если $a_1 = -2$; $d = 0{,}5$

6.039. $\sum\limits_{k=11}^{40} a_k$, если $a_1 = -1$; $d = -0{,}2$

6.040. $\sum\limits_{k=150}^{171} a_k$, если $a_1 = 0{,}2$; $d = 0{,}4$

Сложность «I»

6.041. Сумма первых шести членов арифметической прогрессии равна 9, а разность между 4-м и 2-м членами равна 0,4. Найти первый член прогрессии.

6.042. Сумма 3-го и 4-го членов арифметической прогрессии равна 5/12. Найти сумму первых шести членов прогрессии.

6.043. Найти сумму первых одиннадцати членов арифметической прогрессии, шестой член которого равен 15/22.

6.044. Сумма 3-го и 7-го членов арифметической прогрессии равна 10. Найти сумму первых девяти членов прогрессии.

6.045. В арифметической прогрессии 5-й член больше 3-го на 3, а их сумма равна 10. Найти 2-й член прогрессии.

6.046. Сумма 3-го и 6-го членов арифметической прогрессии равна 3,5. Найти сумму первых восьми членов прогрессии.

6.047. В арифметической прогрессии 6-й член больше 4-го на 8, а их сумма равна 33. Найти 3-й член прогрессии.

6.048. Найти сумму первых семи членов арифметической прогрессии, 4-й член которой равен 5/14.

6.049. Сумма первых восьми членов арифметической прогрессии равна 64, а разность между 8-м и 3-м членами равна 10. Найти 5-й член прогрессии.

6.050. Сумма 2-го и 4-го членов арифметической прогрессии равна 3,4. Найти сумму первых пяти членов прогрессии.

Сложность «1»

6.051. Сумма трех чисел, образующих арифметическую прогрессию, равна 111. Второе число больше первого в 5 раз. Найти эти числа.

6.052. Сумма трех чисел, образующих арифметическую прогрессию, равна 87. Третье число меньше суммы первых двух на 5. Найти эти числа.

6.053. Три числа образуют арифметичекую прогрессию. Сумма первых двух чисел равна 25, а сумма второго и третьего равна 39. Найти эти числа.

6.054. Три числа образуют арифметическую прогрессию. Сумма первых двух чисел равна 132, а отношение третьего к первому равно 3. Найти эти числа.

6.055. Сумма трех чисел, образующих арифметическую прогрессию, равна 162. Сумма первых двух чисел больше суммы второго и третьего на 12. Найти эти числа.

6.056. Три числа образуют арифметическую прогрессию. Третье число больше полусуммы первых двух на 18. Найти эти числа, если сумма второго и третьего чисел равна 82.

6.057. Сумма трех чисел, образующих арифметическую прогрессию, равна (—78). Найти эти числа, если третье число равно сумме первых двух.

6.058. Три числа образуют арифметическую прогрессию. Сумма первых двух чисел равна 171, а третье больше первого в 6 раз. Найти эти числа.

6.059. Три числа образуют арифметическую прогрессию. Сумма первых двух чисел больше третьего на 30, а сумма второго и третьего равна 195. Найти эти числа.

6.060. Сумма трех чисел, образующих арифметическую прогрессию, равна 189. Найти эти числа, если первое больше третьего в 2 раза.

Сложность «2»

В задачах **6.061—6.070** вычислить:

6.061. $7{,}5 + 9{,}8 + 12{,}1 + \ldots + 53{,}5$

6.062. $98{,}3 + 94{,}7 + 91{,}1 + \ldots + 22{,}7$

6.063. $\frac{1}{5} + \frac{8}{15} + \frac{13}{15} + \ldots + \frac{31}{5}$

6.064. $-85{,}6 - 81{,}9 - 78{,}2 - \ldots - 0{,}5$

6.065. $-13{,}3 - 20{,}2 - 27{,}1 - \ldots - 61{,}6$

6.066. $60 + \frac{473}{8} + \frac{233}{4} + \ldots + 53$

6.067. $-\frac{9}{4} - \frac{31}{12} - \frac{35}{12} - \ldots - \frac{45}{4}$

6.068. $-\frac{25}{2} - \frac{71}{6} - \frac{67}{6} - \ldots - \frac{5}{2}$

6.069. $\frac{59}{3} + \frac{301}{15} + \frac{307}{15} + \ldots + \frac{83}{3}$

6.070. $-10{,}25 - 10{,}05 - 9{,}85 - \ldots - 5{,}25$

Сложность «2»

В задачах **6.071—6.080** вычислить:

6.071. $2 - 9 - 20 - \ldots - 130$

6.072. $6\frac{1}{4} + 7\frac{1}{2} + 6\frac{3}{4} + \ldots + 31\frac{1}{4}$

6.073. $71 + 67 + 63 + \ldots - 53$

6.074. $1 + 1\frac{1}{6} + 1\frac{1}{3} + \ldots + 4\frac{1}{2}$

6.075. $2{,}01 + 2{,}02 + 2{,}03 + \ldots + 3{,}00$

6.076. $-10 - 7 - 4 - \ldots + 50$

6.077. $2{,}7 + 3{,}2 + 3{,}7 + \ldots + 17{,}7$

6.078. $407 + 401 + 395 + \ldots - 133$

6.079. $50 + 47 + 44 + \ldots + 14$

6.080. $53 + 50 + 47 + \ldots - 4$

Сложность «2»

6.081. Найти сумму всех трехзначных натуральных чисел, котор при делении на 5 дают остаток, равный 1.

6.082. Найти сумму всех целых чисел, каждое из которых делится б остатка на 6 и удовлетворяет условию $-36 < n \leq 138$.

6.083. Найти сумму всех натуральных чисел, каждое из котор кратно 11 и не превосходит по величине 1000.

6.084. Найти сумму всех двухзначных натуральных чисел, каждое которых при делении на 3 дает остаток, равный 2.

6.085. Найти сумму всех натуральных чисел, кратных 3 и удовлет ряющих условию $27 < n \leq 183$.

6.086. Найти сумму всех трехзначных натуральных чисел, каждое которых кратно 7 и не превосходит 353.

6.087. Найти сумму всех двухзначных натуральных чисел, каждое которых при делении на 4 дает остаток, равный 3.

6.088. Найти сумму всех целых чисел, каждое из которых делится б остатка на 7 и удовлетворяет условию $-126 < k \leq 154$.

6.089. Найти сумму всех трехзначных натуральных чисел, каждое которых делится без остатка на 12.

6.090. Найти сумму всех двузначных натуральных чисел, которые п делении на 5 дают остаток, равный 2.

Сложность «2»

В задачах **6.091—6.100** определить, при каких значениях x числа a_2, a_3, взятые в указанном порядке, образуют арифметическую прогр сию:

6.091. $a_1 = \lg 2,\ a_2 = \lg(3^x - 3),\ a_3 = \lg(3^x + 9)$

6.092. $a_1 = \lg 2,\ a_2 = \lg(2^x - 6),\ a_3 = \lg(2^x + 34)$

6.093. $a_1 = \lg 4,\ a_2 = \lg(9^x + 5),\ a_3 = \lg(9^x + 13)$

6.094. $a_1 = \lg 2,\ a_2 = \lg(2^x - 2),\ a_3 = \lg(2^x + 10)$

6.095. $a_1 = \lg 3,\ a_2 = \lg(4^x - 2),\ a_3 = \lg(4^x + 4)$

6.096. $a_1 = \lg 4,\ a_2 = \lg(5^{-x} - 5),\ a_3 = \lg(5^{-x} + 75)$

6.097. $a_1 = \lg 2,\ a_2 = \lg(4^x + 4),\ a_3 = \lg(4^x + 16)$

6.098. $a_1 = \lg 3,\ a_2 = \lg(3^{-x} - 3),\ a_3 = \lg(3^{-x} + 3)$

6.099. $a_1 = \lg 2,\ a_2 = \lg(4^{-x} + 6),\ a_3 = \lg(4^{-x} + 30)$

6.100. $a_1 = \lg 4,\ a_2 = \lg(4^x - 4),\ a_3 = \lg(4^x + 20)$

§ 21. ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ПРОГРЕССИЯ

Основные формулы

$$b_n = b_{n-1}q; \quad b_n = b_1 q^{n-1}; \quad S_n = \begin{cases} \dfrac{b_1(1-q^n)}{1-q} & \text{при } q \neq 1 \\ b_1 n & \text{при } q = 1 \end{cases}$$

Здесь b_n — n-й член прогрессии; q — знаменатель прогрессии; S_n — сумма первых n членов.

Сумма членов бесконечно убывающей прогрессии ($|q| < 1$) находится по формуле:

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{b_1}{1-q}$$

Сложность «0»

В задачах **6.101—6.110** найти:

6.101. b_7, если $b_1 = 729$; $q = 1/3$

6.102. b_{10}, если $b_1 = 1$; $q = 2$

6.103. b_1, если $q = 0{,}5$; $b_6 = 1/32$

6.104. q, если $b_6 = 128$; $b_1 = 4$

6.105. $b_4 - b_1$, если $b_2 = 12$; $q = 0{,}5$

6.106. b_{11}, если $q = -0{,}5$; $b_2 = 32$

6.107. b_8, если $b_4 = 200$, $q = 0{,}1$

6.108. b_3, если $q = -2$; $b_7 = 16$

6.109. $b_5 + b_1$, если $q = 1/4$; $b_3 = 2$

6.110. q, если $b_1 = 3/8$; $b_4 = 3$

Сложность «1»

В задачах **6.111—6.120** найти:

6.111. b_3, если $S_5 = 93$; $q = 2$

6.112. b_5, если $q = -2$; $S_5 = 5{,}5$

6.113. S_6, если $b_1 = 0{,}5$; $b_4 = 4$

6.114. S_5, если $b_1 = 64$; $b_2 = 32$

6.115. S_7, если $b_3 = 320$; $q = 0{,}5$

6.116. b_2, если $q = -0{,}2$; $S_4 = 52$

6.117. S_{10}, если $q = 2$; $b_1 = 0{,}01$

6.118. b_3, если $q = -0{,}5$; $S_3 = 1{,}2$

6.119. S_6, если $b_1 = 400$; $q = 0{,}5$

6.120. b_4, если $q = -3$; $S_3 = 49/3$

Сложность «1»

В задачах **6.121—6.130** для геометрической бесконечно убывающей прогрессии найти:

6.121. S, если $b_3 = 2$; $b_6 = 0{,}25$

6.122. S_6, если $S = 16$; $q = 1/2$

6.123. b_2, если $S = 12$; $q = 1/3$

6.124. S, если $b_2 = 9$; $b_5 = 1/3$

6.125. b_4, если $S = 1{,}5$; $b_1 = -0{,}5$

6.126. q, если $S = 2$; $b_1 = 1/4$

6.127. S, если $q = 0{,}8$; $b_1 = 2$

6.128. b_3, если $q = 0{,}1$; $S = 10$

6.129. S, если $q = -0{,}2$; $b_2 = 0{,}4$

6.130. b_5, если $S = 5$; $q = 1/5$

Сложность «2»

В задачах **6.131—6.140** найти:

6.131. b_1, если $S_3 = 219$; $b_1b_2b_3 = 13\,824$

6.132. b_2, если $b_1 + b_4 = 27$; $b_2b_3 = 72$

6.133. b_4, если $b_1 + b_4 = 35$; $b_2 + b_3 = 30$

6.134. q, если $b_1b_9 = 2304$; $b_4 + b_6 = 96$

6.135. b_1, если $b_3 - b_1 = 9$; $b_5 - b_3 = 36$

6.136. q, если $S_3 = 6$; $b_1 + b_3 + b_5 = 10{,}5$

6.137. q, если $S_3 = 31$; $b_1 + b_3 = 26$

6.138. b_1, если $S_3 = 13$; $b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 = 91$

6.139. b_4, если $b_1 + b_4 = 112$; $b_2 + b_3 = 48$

6.140. b_1, если $b_1 + b_3 = 20$; $S_3 = 26$

Сложность «3»

Пусть x_1 и x_2 — корни уравнения $f(x) = A$, а x_3 и x_4 — корни уравнения $g(x) = B$. Известно, что последовательность x_1, x_2, x_3, x_4 является геометрической прогрессией, все члены которой положительны.

В задачах **6.141—6.150** найти значения A и B.

6.141. $f(x) = 4x - x^2$; $g(x) = 36x - x^2$

6.142. $f(x) = 6x - x^2$; $g(x) = 150x - x^2$

6.143. $f(x) = 8x - x^2$; $g(x) = 72x - x^2$

6.144. $f(x) = 9x - x^2$; $g(x) = 36x - x^2$

6.145. $f(x) = 15x - x^2$; $g(x) = 60x - x^2$

6.146. $f(x) = 3x - x^2$; $g(x) = 12x - x^2$

6.147. $f(x) = 6x - x^2$; $g(x) = 24x - x^2$

6.148. $f(x) = 5x - x^2$; $g(x) = 80x - x^2$

6.149. $f(x) = 12x - x^2$; $g(x) = 108x - x^2$

6.150. $f(x) = 12x - x^2$; $g(x) = 48x - x^2$

Раздел VII

НАЧАЛА АНАЛИЗА

§ 22. ОБЩИЕ СВОЙСТВА ФУНКЦИЙ

Сложность «0»

В задачах **7.001—7.010** найти область определения функций:

7.001. $y=\sqrt{9-x^2}$

7.002. $y=\log_2(4x-4-x^2)$

7.003. $y=\lg\lg x$

7.004. $y=\sqrt{x^2-x-2}$

7.005. $y=\dfrac{1}{x^3-x}$

7.006. $y=\arcsin(x-1)$

7.007. $y=\dfrac{x}{x^2-1}$

7.008. $y=\dfrac{1}{\sqrt{x^2-4}}$

7.009. $y=\dfrac{\sqrt{x}}{x^2+1}$

7.010. $y=\dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$

Сложность «0»

В задачах **7.011—7.020** найти наибольшее целое x, принадлежащее области определения функции:

7.011. $f(x)=\lg(31-2x)$

7.012. $f(x)=\sqrt{-29-5x}$

7.013. $f(x)=2^{-\sqrt{52-3x}}$

7.014. $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{46-3x}}$

7.015. $f(x)=\left(13-\dfrac{x}{2}\right)^{-1/2}$

7.016. $f(x)=\lg^2(37-4x)$

7.017. $f(x)=(-15-2x)^{1/2}$

7.018. $f(x)=\dfrac{1}{\log_4(33-5x)}$

7.019. $f(x)=10^{\sqrt{18-5x}}$

7.020. $f(x)=\lg^3(-3x-28)$

Сложность «0»

В задачах **7.021—7.030** установить, при каких целых x определена функция:

7.021. $f(x)=\log_2(x+6)-\sqrt{-2x-10}$

7.022. $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x-3}}+\sqrt{15-3x}$

7.023. $f(x)=\sqrt{-x-1}-x\log_{0,5}(2x+6)$

7.024. $f(x)=\sqrt{16-2x}\cdot\log_3(x-5)$

7.025. $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{33-3x}}-x\sqrt{x-8}$

7.026. $f(x)=3^{-\sqrt{2x-16}}+\sqrt{9-x}$

7.027. $f(x)=\sqrt{-x}+\dfrac{x}{\sqrt{2+x}}$

7.028. $f(x)=\dfrac{\lg(x-1)}{\sqrt{3{,}5-x}}$

7.029. $f(x)=\log_5\left(\dfrac{3}{2}-x\right)+\log_2\left(\dfrac{3}{2}+x\right)$

7.030. $f(x)=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\sqrt{35-7x}}-x\sqrt{x-4}$

Сложность «I»

В задачах **7.031—7.040** найти наименьший положительный пер
функции (ответ привести в градусах):

7.031. $f(x)=\sin\left(\dfrac{4x}{7}-2\right)$

7.032. $f(x)=\cos\left(\dfrac{2x}{5}+3\right)$

7.033. $f(x)=\mathrm{tg}\left(\dfrac{2x-3}{9}\right)$

7.034. $f(x)=\mathrm{ctg}\left(\dfrac{4x+5}{3}\right)$

7.035. $f(x)=\sin\left(\dfrac{10x-1}{4}\right)$

7.036. $f(x)=\cos\left(\dfrac{3x-2}{9}\right)$

7.037. $f(x)=\mathrm{ctg}\left(\dfrac{8x+5}{12}\right)$

7.038. $f(x)=\mathrm{tg}\left(\dfrac{4x-7}{10}\right)$

7.039. $f(x)=\sin\left(\dfrac{6x-5}{9}\right)$

7.040. $f(x)=\cos\left(\dfrac{2x-11}{5}\right)$

Сложность «I»

В задачах **7.041—7.050** определить, какие из заданных функций я-
ляются периодическими:

7.041. 1) $\cos\left(x^2+\dfrac{\pi}{3}\right)$; 2) $x\,\mathrm{tg}\,x$; 3) $\lg(\sin x+2)$

7.042. 1) $3^{\cos 2x}$; 2) $\sin\left(x^2+\dfrac{\pi}{4}\right)$; 3) $\sqrt{2-\cos 2x}$

7.043. 1) $\mathrm{tg}\left(x^3-\dfrac{\pi}{6}\right)$; 2) $x^2\sin x$; 3) $(\sin 3x+2)^3$

7.044. 1) $x\cos 2x$; 2) $\lg(8-\cos x)$; 3) $(\mathrm{tg}\,x-1)^2$

7.045. 1) $2^{\sin x}$; 2) $\sin^3\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)$; 3) $\mathrm{tg}(x^2+1)$

7.046. 1) $\log_2(3-\cos x)$; 2) $\cos x^3$; 3) $x\,\mathrm{tg}\,x$

7.047. 1) $\dfrac{1+\sin x}{2-\sin x}$; 2) $\cos\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$; 3) $\mathrm{tg}^2 x$

7.048. 1) $(x+1)\sin x$; 2) $\dfrac{1-\cos^2 x}{\sin x}$; 3) $5^{-\cos x}$

7.049. 1) $2^x \sin x$; 2) $\lg(1+\operatorname{tg}^2 x)$; 3) $\sqrt{\cos^2 x + 1}$

7.050. 1) $\operatorname{tg}(x^2+x)$; 2) $\sin(2^x)$; 3) $\sqrt{1+\sin x}$

Сложность «0»

В задачах **7.051—7.060 определить, какие из заданных функций являются четными, нечетными или функциями общего вида:**

7.051. $y = x^2 + \cos 3x$

7.052. $y = \operatorname{tg}^2 3x + x \sin x$

7.053. $y = x\sqrt{x^2+3} + \frac{1}{x^2}$

7.054. $y = x^3 \ln(x^2+3)$

7.055. $y = \ln(x^2+x+1)$

7.056. $y = \ln(e^{2x}+3)$

7.057. $y = 2^{x-1} + 2^{1-x}$

7.058. $y = x^2 \cos \frac{1}{x}$

7.059. $y = \sqrt{x-1} + \cos x$

7.060. $y = \frac{1}{x} \sin 5x$

Сложность «0»

В задачах **7.061—7.070 определить, какие из заданных функций являются четными, нечетными или функциями общего вида:**

7.061. $y = (x+2)\sqrt{x^2+1}$

7.062. $y = 2^x - 2^{-x}$

7.063. $y = \frac{\operatorname{tg} x}{x^2+3}$

7.064. $y = x \cdot 2^x + x^2$

7.065. $y = x\cos\left(\frac{x}{2}\right)$

7.066. $y = 3^{x^3} - 3^{-x^3}$

7.067. $y = \sin x(1-\cos x)$

7.068. $y = x \log_2 x$

7.069. $y = \sin(x^3+2x)$

7.070. $y = x \sin 3x$

Сложность «1»

В задачах **7.071—7.080 определить, какие из функций являются четными:**

7.071. 1) $x \operatorname{tg} 2x$; 2) $\cos^2\left(\frac{\pi}{5}-x\right)-\cos^2\left(\frac{\pi}{5}+x\right)$; 3) $\frac{2^{\sin x}+1}{2^{\sin x}-1}$

7.072. 1) $\sin\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{9}\right)\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{9}\right)$; 2) $x+\cos x$; 3) $5^{\operatorname{tg} x}+\frac{1}{5^{\operatorname{tg} x}}$

7.073. 1) $\operatorname{tg}^3\left(\frac{\pi-x}{3}\right)-\operatorname{tg}^3\left(\frac{\pi+x}{3}\right)$; 2) $3^{\sin x}-\frac{1}{3^{\sin x}}$; 3) $x\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$

7.074. 1) $(x^2+1)\cos(\pi-x)$; 2) $\frac{\sin x}{\operatorname{tg} 3x}$; 3) $1-2\sin x$

7.075. 1) $\dfrac{\cos\left(x+\frac{\pi}{11}\right)+\cos\left(x-\frac{\pi}{11}\right)}{\cos\left(x-\frac{\pi}{11}\right)-\cos\left(x+\frac{\pi}{11}\right)}$; 2) $\operatorname{tg}\left(\dfrac{2\pi-x}{3}\right)+\operatorname{ctg}\left(\dfrac{2\pi+x}{3}\right)$; 3) $4^{\cos 2x}$

7.076. 1) $\sin x\,(1+\cos x)$; 2) $(\cos x-\sin x)(\cos x+\sin x)$; 3) $x\cdot\dfrac{2^{\sin x}-1}{2^{\sin x}+1}$

7.077. 1) $\dfrac{\sin^3 x}{x}$; 2) $\dfrac{\sin\left(\frac{\pi}{5}-x\right)+\sin\left(\frac{\pi}{5}+x\right)}{\cos\left(x-\frac{\pi}{5}\right)-\cos\left(x+\frac{\pi}{5}\right)}$; 3) $x^2+\sin x$

7.078. 1) $\sin^4\left(\dfrac{\pi-3x}{5}\right)+\sin^4\left(\dfrac{\pi+3x}{5}\right)$; 2) $\dfrac{3^{2\operatorname{tg} x}+1}{3^{2\operatorname{tg} x}-1}$; 3) $\sin\left(\dfrac{\pi}{4}+x\right)$

7.079. 1) $\cos^2\left(\dfrac{7x-\pi}{3}\right)-\cos^2\left(\dfrac{7x+\pi}{3}\right)$; 2) $\sin 2x\operatorname{tg} 2x$; 3) $(\sin x-\cos x)^2$

7.080. 1) $(x+1)\sin x$; 2) $2^{2\operatorname{tg} x}+\dfrac{1}{4^{\operatorname{tg} x}}$; 3) $\operatorname{ctg}^2\left(x-\dfrac{\pi}{7}\right)+\operatorname{ctg}^2\left(x+\dfrac{\pi}{7}\right)$

Сложность «1»

В задачах **7.081—7.090** определить, какие из функций являются нечетными:

7.081. 1) $\sin\left(\dfrac{\pi}{4}+x\right)$; 2) $\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{5}-x\right)-\operatorname{ctg}\left(\dfrac{\pi}{5}-x\right)$; 3) $\dfrac{\sin x}{1+\cos x}$

7.082. 1) $x^2\operatorname{tg} x$; 2) $\sqrt{\cos x}$; 3) $\sin\left(\dfrac{\pi}{7}+x\right)+\sin\left(\dfrac{\pi}{7}-x\right)$

7.083. 1) $(\cos x-\sin x)^2$; 2) $\dfrac{\sin x}{x^2}$; 3) $\operatorname{tg} 2x+\sin 2x$

7.084. 1) $\dfrac{\sin x}{\operatorname{tg} 3x}$; 2) $x\cos 2x$; 3) $\dfrac{1-\sin x}{1+\cos x}$

7.085. 1) $2^{\sin x}$; 2) $\sin\left(\dfrac{\pi}{8}-x\right)-\sin\left(\dfrac{\pi}{8}+x\right)$; 3) $\sin x\cos 3x$

7.086. 1) $2^{\sin x}-\dfrac{1}{2^{\sin x}}$; 2) $x\cos\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)$; 3) $x^2+\sin 2x$

7.087. 1) $1+\sin x$; 2) $\dfrac{\cos x}{x}$; 3) $2\operatorname{tg} x+\operatorname{ctg} 2x$

7.088. 1) $(x^2+1)\sin x$; 2) $\dfrac{1-\cos x}{1+\cos x}$; 3) $\sqrt{\sin x}$

7.089. 1) $\cos\left(\dfrac{\pi}{5}-x\right)-\cos\left(\dfrac{\pi}{5}+x\right)$; 2) $1+\cos\dfrac{x}{2}$; 3) $2\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)+\cos\left(\dfrac{\pi}{2}+x\right)$

7.090. 1) $x\operatorname{tg} 3x$; 2) $x+\sin x$; 3) $(\sin x+\cos x)^2$

Сложность «2»

В задачах **7.091—7.100** определить, какие из заданных функций являются четными:

7.091. 1) $\dfrac{\sin x\ (x^2+\pi/8)}{\sqrt{1+|x|}}$; 2) $\dfrac{(2-x)}{(2+x)}\operatorname{tg}^2\dfrac{\pi x}{3}$; 3) $2^{|x|}\cos\left(\sqrt[3]{x^3-x}\right)$

7.092. 1) $|x+5|\cos\dfrac{\pi x}{3}$; 2) $x\lg\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)$; 3) $\dfrac{|x+1|}{\sqrt{x^2+x+1}}$

7.093. 1) $\left(\sin\sqrt{x+5}\right)^2$; 2) $\sqrt[3]{2+|x+3|}$; 3) $\dfrac{2^x-2^{-x}}{x^3+3x}$

7.094. 1) $\sin(x^2-2|x|-4)$; 2) $(x^2+|x|+5)\lg(2x+3)$; 3) $x^2\cos\left(\dfrac{2^x}{1+2^x}\right)$

7.095. 1) $\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)^x\sin\left(x^2+\dfrac{\pi}{3}\right)$; 2) $\dfrac{|x|}{(3^x+2^x)^2}$; 3) $x\lg\left(2^{\sin x}\right)$

7.096. 1) $(x^2+4|x|+6)\left|\sin\dfrac{\pi x}{6}\right|$; 2) $\sin x\lg\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)$; 3) $(1+5^x)^2\cos\dfrac{\pi x}{3}$

7.097. 1) $\sin((x+1)^2+2(1-x))$; 2) $(3x^2+4)\operatorname{tg}\left|\dfrac{|x|+1}{|x|-1}\right|$; 3) $\dfrac{\left(\sqrt{3x+5}+1\right)^2}{|x|+4}$

7.098. 1) $|x+4|\cos\left(3x+\dfrac{\pi}{4}\right)$; 2) $\dfrac{2^x-2^{-x}}{x\cdot|x|}$; 3) $x^2\lg|3x+6|$

7.099. 1) $\dfrac{3^x-3^{-x}}{\sin x}$; 2) $\dfrac{\sin^2(x+\pi/3)}{3x^2-4|x|+5}$; 3) $|\lg(x^2+x-4)|$

7.100. 1) $\dfrac{\sin(3^x+3^{-x})}{x^2+4|x|+1}$; 2) $|x+4|\cos\dfrac{3\pi x}{4}$; 3) $(x^2+5)\operatorname{tg}\left(x-\dfrac{\pi}{8}\right)$

Сложность «2»

В задачах **7.101—7.110** определить, какие из заданных функций являются нечетными:

7.101. 1) $(2^x-2^{-x})\cos x$; 2) $\sin\sqrt{x^3+2x}$; 3) $x^3\log_2\left|\dfrac{x+1}{x+2}\right|$

7.102. 1) $\cos(x^2-x)\cdot\lg\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)$; 2) $(x^2+|x|+2)\sin(x-1)$; 3) $\left|\dfrac{x-1}{x+1}\right|\operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{6}$

7.103. 1) $\dfrac{|x+2|}{\operatorname{tg}\pi x^3}$; 2) $(x^3+6x)(3^x+3^{-x})$; 3) $x\sin((x+1)^2-2x)$

7.104. 1) $x\cdot\dfrac{1+x}{1-x}$; 2) $\dfrac{x^3|x+5|}{x^2+1}$; 3) $x\sin\left(|x|-\dfrac{\pi}{6}\right)$

7.105. 1) $\frac{\operatorname{tg}(x^2-3x+4)}{|x|}$; 2) $\lg\left(\frac{1-\sin x}{1+\sin x}\right)$; 3) $|x^2+x-2|\ \sin\frac{\pi x}{6}$

7.106. 1) $x^3\operatorname{tg}((x+1)^2+(1-2x))$; 2) $\frac{\lg 2^x}{\cos\pi x}$; 3) $|x^2+x-4|\sin^3 x$

7.107. 1) $\frac{3^x-3^{-x}}{x^2+5|x|+6}$; 2) $\sqrt{x^2+1}\ \lg(3^{\sin x})$; 3) $|x^2+2x-7|\ \operatorname{tg}^3\left(\frac{\pi x}{4}\right)$

7.108. 1) $(3x^3+x)\sin(x(x+2)+2(2-x))$; 2) $\sqrt{4+x^4}\ \operatorname{tg}\left(x+\frac{\pi}{7}\right)$; 3) $x\lg\left(\frac{x+2}{x+1}\right)$

7.109. 1) $\frac{\sin|x|-3\cos x}{x^3}$; 2) $x^3\log_5\left(\frac{x+1}{x^2+4}\right)$; 3) $(2^{\sin x}-2^{-\sin x})\sqrt{x^2+1}$

7.110. 1) $(x^2+3)|x+\pi|$; 2) $\frac{\operatorname{tg}|x|+4x\cdot\sin x}{2^x-2^{-x}}$; 3) $x\log_2(|x+2|+1)$

Сложность «2»

7.111. 1) Найти $g(f(x))$, если $f(x)=\frac{1}{3}x-2$, $g(x)=\frac{1}{2x+1}$

2) Вычислить $g(f(1))$.

7.112. 1) Найти $g(x)$, если $f(x)=2x$, $f(g(x))=-x$

2) Вычислить $g(-1)$.

7.113. 1) Найти $f(g(x))$, если $f(x)=\frac{x-1}{x}$, $g(x)=\frac{1}{x}$

2) Вычислить $f(g(3))$.

7.114. 1) Найти $g(x)$, если $f(x)=2x-3$, $g(f(x))=x$

2) Вычислить $g(1)$.

7.115. 1) Найти $g(f(x))$, если $f(x)=\frac{1}{x-1}$, $g(x)=2x+1$

2) Вычислить $g(f(2))$.

7.116. 1) Найти $f(x)$, если $g(x)=1+\frac{1}{x}$, $g(f(x))=\frac{x-1}{x-2}$

2) Вычислить $f(2)$.

7.117. 1) Найти $f(x)$, если $f(g(x))=-2x$, $g(x)=\frac{2}{x}$

2) Вычислить $f(-2)$.

7.118. 1) Найти $g(f(x))$, если $f(x)=\frac{2}{2x-5}$, $g(x)=\frac{1}{2}x+1$

2) Вычислить $g(f(-1))$.

7.119. 1) Найти $g(x)$, если $f(x)=3x+1$, $f(g(x))=\frac{1}{2x}$

2) Вычислить $g\left(\frac{1}{2}\right)$.

7.120. 1) Найти $g(x)$, если $f(x)=\frac{1}{2x-3}$, $g(f(x))=x$

2) Вычислить $g(5)$.

§ 23. ЭЛЕМЕНТЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

1°. Производной функции $y = f(x)$ в точке x_0 называется предел отношения приращения функции Δy к приращению аргумента Δx при приращении аргумента Δx, стремящемся к нулю (если предел существует).

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = y' = f'(x_0)$$

2°. Если c — постоянная величина и функции $u = u(x)$, $v = v(x)$ имеют производные, то: 1) $c' = 0$; 2) $(cu)' = cu'$; 3) $(u + v)' = u' + v'$; 4) $(uv)' = u'v + uv'$; 5) $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$, $(v \neq 0)$.

3°. Производная сложной функции $y = f(\varphi(x))$ вычисляется по формуле $y'_x = y'_\varphi \cdot \varphi'_x$, (если существуют производные y'_φ, φ'_x).

Таблица производных

Если x — независимая переменная, то

I. $(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$ (n — постоянное число). В частности:
$a)$ $(x)' = 1$; $b)$ $(x^2)' = 2x$; $c)$ $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$; $d)$ $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$.

II. $(\sin x)' = \cos x$; III. $(\cos x)' = -\sin x$;
IV. $(\mathrm{tg}\, x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$; V. $(\mathrm{ctg}\, x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$.

VI. $(e^x)' = e^x$; VII. $(a^x)' = a^x \cdot \ln a$

VIII. $(\ln x)' = \frac{1}{x}$; IX. $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$

X. $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$; XI. $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;
XII. $(\mathrm{arctg}\, x)' = \frac{1}{1+x^2}$; XIII. $(\mathrm{arcctg}\, x)' = -\frac{1}{1+x^2}$.

4°. Пусть функция $y = f(x)$ имеет производную в точке x_0. Уравнение касательной M_0T к графику функции $y = f(x)$ в точке $M_0(x_0; y_0)$ (рис. 1') имеет вид:

$$y - y_0 = y'(x_0)(x - x_0); \quad (y'(x_0) = \mathrm{tg}\,\alpha).$$

5°. Уравнение нормали M_0N к графику функции $y = f(x)$ в точке $M_0(x_0; y_0)$ (рис. 1') имеет вид:

$$y - y_0 = -\frac{1}{y'(x_0)}(x - x_0) \quad (y'(x_0) \neq 0).$$

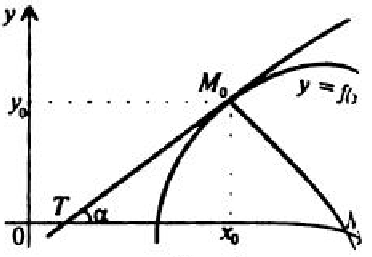


Рис. 1'

З а м е ч а н и е: Если $y'(x_0) = 0$, то уравнение касательной: $y = y_0$, а уравнение нормали: $x = x_0$.

Сложность «0»

В задачах **7.121—7.130** вычислить значение производной функц $f(x)$ при указанном значении аргумента:

7.121. $f(x) = 2x\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}$; $f'(4) = ?$

7.122. $f(x) = \cos x - \frac{2}{\pi}x^2 + 1$; $f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = ?$

7.123. $f(x) = 2^x \cdot \frac{3}{\ln 2} + x^2 - 3$; $f'(1) = ?$

7.124. $f(x) = \sqrt{2}\,\sin x + \sqrt{\pi} \cdot \sqrt{x} + 5$; $f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = ?$

7.125. $f(x) = \frac{1}{3}x^6 + 7x^2 - 2x + 1$; $f'(-1) = ?$

7.126. $f(x) = \operatorname{tg} x - \frac{x^2}{\pi} + \pi$; $f'(\pi) = ?$

7.127. $f(x) = \frac{2}{x^2} - 4x - \frac{3}{x} + 6$; $f'(1) = ?$

7.128. $f(x) = \frac{10^x}{\ln 10} - \frac{2}{x} + 3x - 12$; $f'(-1) = ?$

7.129. $f(x) = \frac{2\lg x}{\lg e} - \frac{1}{4}x - \log_2 5$; $f'(2) = ?$

7.130. $f(x) = \sqrt{3}\,\cos x - \cos\frac{\pi}{4} + \frac{3}{\pi}x^2$; $f'\left(\frac{\pi}{3}\right) = ?$

Сложность «0»

В задачах **7.121'—7.130'** вычислить производную указанной функции

7.121'. $y = 2x^3 - 3x^2 + \frac{1}{2}x - 5$

7.122'. $y = \sqrt{2}\,x^2 - \frac{1}{\ln 2}x + 4x^4$

7.123'. $y = -5x - \frac{1}{\sqrt{7}}x^3 + e^2x^2$

7.124'. $y = \frac{1}{10}x^{10} + \sqrt[3]{3}\,x - 3^3x^2$

7.125'. $y = a^2x^2 + 3x - \sqrt{a}$

7.126'. $y = \frac{x}{c} - 4x^4 + c^3x^2$

7.127'. $y=\sqrt{a}\,x+x^5\ln b-\frac{1}{e}$

7.128'. $y=a^{\dagger}x^2-\pi x+\ln 3$

7.129'. $y=0{,}5t^2-\sqrt{a^2+b^2}\,t+3$

7.130'. $y=\frac{1}{\sqrt{2}}z^2+z\ln\frac{2}{3}-0{,}3$

Сложность «0»

В задачах **7.131—7.140 вычислить значение производной функции** $f(x)$ при указанном значении аргумента:

7.131. $f(x)=(2x^2-3x+1)\cos x;\ f'(0)=?$

7.132. $f(x)=\frac{2x-1}{3-x};\ f'(2)=?$

7.133. $f(x)=(1+2x-3x^2)\left(5x^2-4x+\frac{1}{2}\right);\ f'(0)=?$

7.134. $f(x)=\frac{x^2}{x+1};\ f'(1)=?$

7.135. $f(x)=(x^2-4x+4)\operatorname{tg}x;\ f'(0)=?$

7.136. $f(x)=\frac{\sin x}{2-x};\ f'(0)=?$ **7.137.** $f(x)=(x^2-5x+7)e^x;\ f'(0)=?$

7.138. $f(x)=(2-x)\cos x;\ f'(\pi)=?$ **7.139.** $f(x)=\frac{\sqrt{x}}{1+x};\ f'(4)=?$

7.140. $f(x)=\frac{3x^2-2}{x-1};\ f'(2)=?$

Сложность «1»

В задачах **7.131'—7.140' вычислить производную указанных уравнений**

7.131'. $y=2\sqrt{x}-\frac{4}{x}+1$

7.132'. $y=\frac{5}{\sqrt[3]{x^2}}+\sqrt[5]{x}-\frac{a}{x}$

7.133'. $y=\frac{\pi}{x^2}+\sqrt[4]{x^5}+2c$

7.134'. $y=2x\sqrt{x}-\frac{3}{x^3}+b^2$

7.135'. $y=\frac{x^3}{\sqrt{x}}-4\sqrt{x}+\frac{x}{a}$

7.136'. $y=\pi^4-\frac{x-2}{x}+\sqrt{x}$

7.137'. $y=\ln\sqrt{2}+\frac{5}{x^2}-\sqrt[4]{x}$

7.138'. $y=\frac{10x\sqrt{x}+1}{x}-\frac{c}{x^3}$

7.139'. $y=\sqrt[6]{x}-\frac{b}{x}+8bx$

7.140'. $y=2\pi x+\frac{a}{bx}-\sqrt{e}$

Сложность «1»

В задачах **7.141—7.150 найти экстремальные значения функции:**

7.141. $y=x\left(x+\sqrt{3}\right)\left(x-\sqrt{3}\right)$

7.142. $y=2x^3-6x+3$

7.143. $y=\frac{1}{x^2+4}$

7.144. $y=\frac{x^4}{4}-x^3-1$

7.145. $y=\frac{2}{x^2+x-1}$

7.146. $y=-\frac{1}{5}x^5+x+4$ **7.147.** $y=x+\frac{1}{x}$ **7.148.** $y=\frac{2x}{x^2+1}$

7.149. $y=x\left(2x-\sqrt{3}\right)\left(2x+\sqrt{3}\right)+3$ **7.150.** $y=x+\frac{4}{x^2}$

Сложность «1»

В задачах **7.141'—7.150'** вычислить производную указанной функци

7.141'. $y = e^{x^2}$ **7.142'.** $y = (5 - 2x)^{101}$

7.143'. $y = \sin(1 - x^3)$ **7.144'.** $y = \mathrm{tg}^2(\sqrt{x})$

7.145'. $y = \cos(e^x)$ **7.146'.** $y = \sqrt[3]{\mathrm{tg}3x}$

7.147'. $y = \frac{1}{\sqrt{x^2+2x-1}}$ **7.148'.** $y = \ln^2(1 - x)$

7.149'. $y = \frac{2}{\ln(\sin x)}$ **7.150'.** $y = 2^{-\cos x}$

Сложность «1»

В задачах **7.151—7.160** найти максимальное значение функции:

7.151. $y=-\frac{1}{2}x^4-\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{96}$ **7.152.** $y=\frac{3}{4}x^4+2x^3-\frac{9}{2}x^2+1$

7.153. $y=\frac{8}{3}x^3-2x+\frac{10}{3}$ **7.154.** $y=\frac{1}{3}x^3-x+\frac{4}{3}$

7.155. $y = -x^3 - 2x^2 + 1{,}5$ **7.156.** $y=\frac{1}{4}x^4+x^3+x^2$

7.157. $y=-\frac{1}{2}x^4-\frac{8}{3}x^3-\frac{2}{3}$ **7.158.** $y=-\frac{1}{2}x^4+\frac{10}{3}x^3-\frac{1}{6}$

7.159. $y=-\frac{1}{4}x^4-\frac{14}{3}x^3-\frac{49}{2}x^2+2$ **7.160.** $y = 3 - x^2 + \frac{1}{3}x^3$

Сложность «0»

В задачах **7.151'—7.160'** найти уравнение касательной к графи функции $y = f(x)$ в точке x_0.

7.151'. $f(x) = x^2 - 2x + 5,\ x_0 = 1$ **7.152'.** $f(x) = \cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right),\ x_0 =$

7.153'. $f(x) = \sqrt{x+\sqrt{2}},\ x_0=-\sqrt{2}+1$ **7.154'.** $f(x) = x^4 - 3x^2 + 1,\ x_0 =$

7.155'. $f(x) = x\ln x,\ x_0 = \frac{1}{e}$ **7.156'.** $f(x) = e^{3x},\ x_0 = 0$

7.157'. $f(x) = \sin(x^2),\ x_0 = \sqrt{\pi}$ **7.158'.** $f(x) = \mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4}-3x\right),\ x_0 = 0$

7.159'. $f(x) = \frac{1}{x^3} + 2x,\ x_0 = -1$ **7.160'.** $f(x) = \sqrt[3]{x-1},\ x_0 = 0$

Сложность «I»

В задачах **7.161—7.170** найти значения x, при которых функция имеет экстремумы:

7.161. $f(x)=4x+\frac{9}{x}$ **7.162.** $f(x)=3x^2+\frac{48}{x}$ **7.163.** $f(x)=4x+\frac{49}{x+3}$

7.164. $f(x)=25x+\frac{36}{x-1}$ **7.165.** $f(x)=\frac{4}{x}-\frac{1}{x^2}$ **7.166.** $f(x)=\frac{10}{x}-\frac{7}{x^2}$

7.167. $f(x)=4x^2+\frac{27}{x}$ **7.168.** $f(x)=32x^3+\frac{6}{x}$ **7.169.** $f(x)=x^3+\frac{243}{x}$

7.170. $f(x)=12x^2+\frac{3}{x}$

Сложность «I»

В задачах **7.171—7.180** найти интервалы монотонного убывания функции:

7.171. $y=x^3+1{,}5x^2+2$

7.172. $y=x^3-3x^2$

7.173. $y=\frac{x^3}{3}-2x^2+3x+1$

7.174. $y=2x^3-6x+3$

7.175. $y=\frac{x^3}{3}-4x$

7.176. $y=\frac{x^3}{6}+\frac{x^2}{4}-x$

7.177. $y=2x^3+6x^2-18x+7$

7.178. $y=2x^3-3x^2-12x+1$

7.179. $y=3x^3+22{,}5x^2-9$

7.180. $y=2x^3+7{,}5x^2-9x$

Сложность «I»

В задачах **7.181—7.190** найти наименьшее и наибольшее значения функции на отрезке:

7.181. $f(x)=\frac{x^3}{3}-\frac{3x^2}{2}+2x;\quad x\in[0;3]$

7.182. $f(x)=18x^2+8x^3-3x^4;\quad x\in[0;4]$

7.183. $f(x)=\frac{x}{8}+\frac{2}{x};\quad x\in[1;6]$

7.184. $f(x)=x^4-2x^2;\quad x\in[0;2]$

7.185. $f(x)=x^3-3x^2;\quad x\in[-4;1]$

7.186. $f(x)=-\frac{x^5}{5}+x+4;\quad x\in[-2;-0{,}5]$

7.187. $f(x)=x^3-12x;\quad x\in[-1;3]$

7.188. $f(x)=2x^4-x-1;\quad x\in[0;1]$

7.189. $f(x)=\frac{x^4}{2}-2x+\frac{3}{2};\quad x\in[-1;2]$

7.190. $f(x)=x^3-3x^2;\quad x\in[1;3]$

Сложность «2»

В задачах **7.191—7.200** найти все значения x, при которых функция имеет экстремумы:

7.191. $f(x) = 2x^2 - 6\cdot|x+1| + 5$

7.192. $f(x) = x^2 - 5|x| + 6$

7.193. $f(x) = |2x - 1| - x^2 - 4$

7.194. $f(x) = -x^2 + 4|x| - 6$

7.195. $f(x) = x^2 - 5|x - 1| + 1$

7.196. $f(x) = 2x^2 - |x| - 3$

7.197. $f(x) = (x - 2)^2 - 2|x-2|-2$

7.198. $f(x) = x^2 - 8|x + 1| + 3$

7.199. $f(x) = 2x^2 - 7|x| - 4$

7.200. $f(x) = 2x^2 - 12|x + 2| - 9$

Сложность «2»

7.201. Число 28 представлено в виде суммы двух слагаемых так, что сумма их кубов минимальна. Найти эти слагаемые.

7.202. Найти число, которое превышало бы свой удвоенный квадрат на максимальное значение.

7.203. Число 49 представлено в виде произведения двух положительных сомножителей так, что сумма их минимальна. Найти эти сомножители.

7.204. Число 46 представлено в виде суммы двух слагаемых так, что их произведение максимально. Найти эти слагаемые.

7.205. Найти число, утроенный квадрат которого превышает его куб на максимальное значение.

7.206. Число 16 представлено в виде произведения двух положительных сомножителей так, что сумма их квадратов минимальна. Найти эти сомножители.

7.207. Найти число, которое превышает свой квадрат на максимальное значение.

7.208. Число 90 представлено в виде суммы двух слагаемых так, что сумма их квадратов минимальна. Найти эти слагаемые.

7.209. Найти число, которое превышает свой квадратный корень на минимальное значение.

7.210. Найти отрицательное число, сумма которого со своей обратной величиной имеет наибольшее значение.

Сложность «3»

7.211. Участок в форме прямоугольника площадью 800 огорожен с трех сторон забором. Найти наименьшую длину забора.

7.212. Площадь участка в форме параллелограмма с острым углом 30°, равна 8. Какое наименьшее значение принимает его периметр?

7.213. Площадь участка, имеющего форму равнобочной трапеции с острым углом 30°, равна 50. Какое наименьшее значение принимает его периметр?

7.214. Участок имеет форму прямоугольной трапеции с острым углом 30°. Периметр трапеции равен 24. Определить максимально возможную площадь участка.

7.215. Участок имеет форму прямоугольника, завершенного полукругом. Площадь участка равна 12,5. При каком радиусе полукруга периметр участка является наименьшим?

7.216. Площадь трапеции, описанной вокруг окружности, равна 2. Найти радиус окружности, если известно, что сумма длин боковых сторон и высоты трапеции *принимает минимально возможное значение*.

7.217. Сумма длин боковых сторон и высоты трапеции, описанной около окружности, равна 4. Найти максимально возможное значение площади трапеции.

7.218. Периметр параллелограмма с острым углом 30° равен 4. Найти максимально возможное значение площади параллелограмма.

7.219. В равнобочной трапеции меньшее основание и боковая сторона равны 4. При какой длине большего основания площадь трапеции окажется наибольшей?

7.220. Сумма длин диагоналей параллелограмма равна 8. Какое наименьшее значение может принять сумма квадратов длин сторон параллелограмма?

§ 24. ЭЛЕМЕНТЫ ИНТЕГРАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

А. Неопределенный интеграл.

1°. Функция $F(x)$ называется первообразной для функции $f(x)$, если $F'(x) = f(x)$.

2°. Множество **всех** первообразных для $f(x)$ называется **неопределенным интегралом** и обозначается

$\int f(x)dx = F(x) + c$, где $f(x)$ — подынтегральная функция,

$f(x)dx$ — подынтегральное выражение, C — произвольная постоянная.

3°. a) $\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$, где k — const;

b) $\int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$.

4°. Таблица неопределенных интегралов.

1) $\int dx = x + c$; 2) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + c$;

3) $\int \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x} + c$; 4) $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c\ (n \neq -1)$;

5) $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + c,\ x \neq 0$; 6) $\int e^x dx = e^x + c$;

$$7)\ \int \cos x\,dx = \sin x + c; \qquad 8)\ \int \sin x\,dx = -\cos x + c;$$

$$9)\ \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + c \quad \left(x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in Z\right);$$

$$10)\ \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + c \quad (x \neq \pi k,\ k \in Z);$$

$$11)\ \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + c\ (|x| < 1);$$

$$12)\ \int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + c;$$

$$13)\ \int \frac{dx}{x^2-1} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + c,\ |x| \neq 1.$$

5°. Замена переменного в неопределенном интеграле.

a) $\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = \int f(u)du$, где $u = \varphi(x)$, $du = \varphi'(x)dx$;

b) $\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$, где $x = \varphi(t)$, $dx = \varphi'(t)dt$.

B. Определенный интеграл.

1°. Формула Ньютона-Лейбница.

Если функция $f(x)$ определена и непрерывна на $[a; b]$ и $F(x)$ — ее первообразная, то есть $F'(x) = f(x)$, то $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = F(x)|_a^b$.

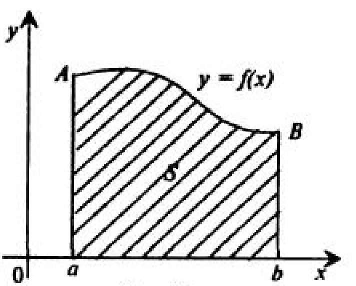


Рис. 2'

2°. Определенный интеграл $\int_a^b f(x)dx$ при $f(x) \geq 0$ геометрически представляет собой площадь криволинейной трапеции, то есть площадь фигуры (рис. 2'), ограниченной кривой $y = f(x)$, осью OX и двумя перпендикулярами к оси OX $x = a$ и $x = b$.

Сложность «I»

В задачах **7.171'—7.180'** найти неопределенные интегралы:

7.171'. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x}}$; **7.172'.** $\int \frac{\sqrt[4]{x}\,dx}{x^2}$;

7.173'. $\int \frac{x^2 \cdot \sqrt[3]{x}}{\sqrt[4]{x^2}}dx$; **7.174'.** $\int \frac{dx}{x^6}$;

7.175'. $\int \frac{x^{2/3}dx}{x^2}$;

7.176'. $\int \frac{\sqrt{\sqrt[3]{x}}}{x}dx$;

7.177'. $\int \frac{x^2}{\sqrt{x}}dx$;

7.178'. $\int \frac{x\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}}dx$;

7.179'. $\int \frac{x^6 dx}{\sqrt[5]{x}}$;

7.180'. $\int x \cdot \sqrt[3]{x}\,dx$.

Сложность «0»

В задачах **7.181'—7.190'** найти неопределенные интегралы:

7.181'. $\int \frac{x^3+2x^2-5}{x^2}dx$;

7.182'. $\int (3e^x - 2\cos x)dx$;

7.183'. $\int \left(\frac{1}{x} - x^2 + \pi\right)dx$;

7.184'. $\int \left(\frac{3}{x^2} - \frac{1}{x} + 1\right)dx$;

7.185'. $\int \left(\frac{1}{\cos^2 x} + 4\sqrt{x}\right)dx$;

7.186'. $\int \left(\frac{2}{\sqrt[3]{x}} - \frac{\pi}{\sin^2 x}\right)dx$;

7.187'. $\int \left(x^2 + \frac{1}{x} - 2e^x\right)dx$;

7.188'. $\int \frac{x^2+2x+1}{\sqrt{x}}dx$;

7.189'. $\int \left(2\sin x - \cos x + \sqrt{2}\right)dx$;

7.190'. $\int (x^2 + \sin x + \sqrt[5]{x})dx$.

Сложность «2»

В задачах **7.191'—7.200'** найти неопределенные интегралы:

7.191'. $\int \sin 2x dx$

7.192'. $\int e^{-x}dx$

7.193'. $\int \cos(1-3x)dx$

7.194'. $\int \frac{dx}{\cos^2 2x}$

7.195'. $\int \frac{dx}{1+4x^2}$

7.196'. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-\frac{x^2}{9}}}$

7.197'. $\int \frac{dx}{2x+5}$

7.198'. $\int (3x-1)^{100}dx$

7.199'. $\int \frac{dx}{(5x+2)^5}$

7.200'. $\int \sqrt{1-4x}\,dx$

Сложность «2»

В задачах **7.201'—7.210'** найти определенные интегралы:

7.201'. $\int_{-1}^{3} \sqrt[3]{x}\,dx$

7.202'. $\int_0^{\pi/2} \sin x dx$

7.203'. $\int_0^2 (x^2+2x-1)dx$

7.204'. $\int_{-(\pi/2)}^{\pi/2} (\cos x + 1)dx$

7.205'. $\int_1^e \frac{dx}{x}$

7.206'. $\int_0^{\ln 2} e^x dx$

7.207'. $\int_0^{\pi/4} \frac{dx}{\cos^2 x}$

7.208'. $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{1+x^2}$

7.209'. $\int_0^{1/2} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

7.210. $\int_0^1 (x\sqrt{x} - x^4)dx$

Сложность «3»

В задачах **7.211'—7.220'** найти определенные интегралы:

7.211'. $\int_0^1 \frac{xdx}{1+x^2}$ **7.212'.** $\int_{\ln 2}^{\ln 3} e^{-x}dx$ **7.213'.** $\int_0^{\sqrt{\pi/2}} x\sin x^2 dx$

7.214'. $\int_1^2 \frac{e^{-(1/x)}}{x^2}dx$ **7.215'.** $\int_0^{\pi/4} \mathrm{tg}\,xdx$ **7.216'.** $\int_0^1 \frac{xdx}{1+x^4}$

7.217'. $\int_0^2 \frac{xdx}{1+x}$ **7.218'.** $\int_{-1}^{0.5} \frac{dx}{x^2-4}$ **7.219'.** $\int_0^2 xe^{x^2}dx$

7.220'. $\int_0^1 \frac{xdx}{\sqrt{1+x^2}}$

Сложность «1»

В задачах **7.221'—7.230'** найти площадь, ограниченную заданными кривыми:

7.221'. $y = 6 + 5x - x^2,\ y = 0$ **7.222'.** $y = -x^2 + 1,\ y = 0$

7.223'. $y = 2x - x^2,\ y = 0$ **7.224'.** $y = x^2 - 2x + 2,\ y = 2$

7.225'. $y = 6 + 4x - x^2,\ y = 1$ **7.226'.** $y = x^2,\ y = 1$

7.227'. $y = x^2 + 1,\ y = 5$ **7.228'.** $y = 2x^2 - x,\ y = 3$

7.229'. $y = -3x^2 + 4x,\ y = 0$ **7.230'.** $y = x^2 - \frac{1}{2}x + 1,\ y = 1$

Сложность «2»

В задачах **7.231'—7.240'** найти площадь, ограниченную заданными кривыми:

7.231'. $y = x^2 - x,\ y = x + 3$ **7.232'.** $y = x^2 + 2x + 1,\ y = -x^2 + 5$

7.233'. $y = x^2 - x,\ y = x$ **7.234'.** $y = 2x - x^2,\ y = -x + 2$

7.235'. $y = x^2,\ y = |x|$ **7.236'.** $y = \frac{1}{x},\ x = 1,\ x = 2,\ y = 0$

7.237'. $y = x,\ y = 2x,\ x = 1,\ x = 3$ **7.238'.** $y = \frac{1}{x},\ y = x,\ x = 2$

7.239'. $y = e^x,\ x = 0,\ x = 1,\ y = 0$ **7.240'.** $y = \frac{2}{x},\ y = -x^2 + 5$

Раздел VIII
ТРИГОНОМЕТРИЯ

1°. Соотношения между тригонометрическими функциями одного и того же аргумента (здесь и в дальнейшем запись $n \in Z$ означает, что n — любое целое число, т. е. $n = 0; \pm 1; \pm 2; \ldots$):

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha};\quad \alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi n;\quad n \in Z$$

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha};\quad \alpha \neq \pi n;\quad n \in Z$$

$$\frac{1}{\cos^2\alpha} = 1 + \operatorname{tg}^2\alpha;\quad \alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi n;\quad n \in Z$$

$$\frac{1}{\sin^2\alpha} = 1 + \operatorname{ctg}^2\alpha;\quad \alpha \neq \pi n;\quad n \in Z$$

2°. Формулы сложения аргументов:

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta;$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta;$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta;$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta;$$

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta};\quad \alpha, \beta, \alpha + \beta \neq \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in Z$$

$$\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{1 + \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta};\quad \alpha, \beta, \alpha - \beta \neq \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in Z$$

3°. Формулы двойного аргумента:

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha;$$
$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha;$$
$$1 + \cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha;$$
$$1 - \cos 2\alpha = 2\sin^2\alpha;$$
$$1 \pm \sin 2\alpha = (\sin\alpha \pm \cos\alpha)^2$$

4°. Формулы половинного аргумента:

$$\sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{2}; \qquad \cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1+\cos\alpha}{2};$$
$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} = \frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}; \quad \alpha \neq \pi + 2\pi n, \quad n \in Z$$

5°. Формулы сложения одноименных тригонометрических функций:

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2};$$
$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2};$$
$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2};$$
$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2};$$
$$\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}; \quad \alpha, \beta \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in Z;$$
$$\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta = \frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}; \quad \alpha, \beta \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in Z$$

6°. Соотношения между sinα, cosα, tgα и $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$ (универсальная подстановка):

$$\sin\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}};\ \ \alpha \neq \pi(2n+1),\ \ n \in Z;$$

$$\cos\alpha = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}};\ \ \alpha \neq \pi + 2\pi n,\ \ n \in Z;$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}};\ \ \alpha \neq \frac{\pi}{2}+\pi k,\ \ k \in Z,\ \ \alpha \neq \pi + 2\pi n,\ \ n \in Z$$

7°. Формулы преобразования произведения в сумму:

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)];$$

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)];$$

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha-\beta) + \sin(\alpha+\beta)]$$

8°. Некоторые дополнительные формулы:

$$\sin\alpha + \cos\alpha = \sqrt{2}\,\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right) = \sqrt{2}\,\cos\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right);$$

$$\sin\alpha - \cos\alpha = -\sqrt{2}\,\sin\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right) = -\sqrt{2}\,\cos\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right);$$

$$\sin\alpha + \cos\beta = 2\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha+\beta}{2}\right);$$

$$a\cos\alpha + b\sin\alpha = A\sin(\alpha+\varphi),$$

где $A = \sqrt{a^2+b^2}$, φ — такой угол, что

$$\sin\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}};\qquad \cos\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

§ 25. ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

Сложность «0»

В задачах **8.001—8.010** представить в виде произведения:

8.001. $\sin\frac{5}{3}\alpha+\sin\frac{3}{2}\alpha$

8.002. $1+\sin\frac{2}{3}\alpha$

8.003. $\operatorname{tg}\left(\frac{\alpha}{3}+\frac{\pi}{4}\right)+\operatorname{tg}\left(\frac{\alpha}{3}-\frac{\pi}{4}\right)$

8.004. $\cos\left(\frac{3}{2}\pi+4\alpha\right)+\sin(3\pi-8\alpha)$

8.005. $\sin\frac{3}{4}\alpha-\sin\frac{2}{7}\alpha$

8.006. $1-\sin 6\alpha$

8.007. $\cos\frac{3}{8}\alpha-\cos\frac{7}{24}\alpha$

8.008. $\sin 2\alpha-\sin(3\alpha+\pi)$

8.009. $\cos\frac{5}{6}\alpha+\cos\frac{4}{15}\alpha$

8.010. $\operatorname{tg}\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)-\operatorname{tg}\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)$

Сложность «0»

В задачах **8.011—8.020** представить в виде произведения:

8.011. $\cos 10\alpha\cos 8\alpha+\cos 8\alpha\cos 6\alpha$

8.012. $\cos 2\alpha+2\sin 2\alpha\sin 3\alpha-\cos 4\alpha$

8.013. $\sin 2\alpha\sin 3\alpha-\frac{1}{2}\cos\alpha+\frac{1}{2}\cos 6\alpha$

8.014. $\sin 10\alpha\sin 8\alpha+\sin 8\alpha\sin 6\alpha$

8.015. $\sin\alpha-\sin 3\alpha+2\sin\alpha\cos 4\alpha$

8.016. $\cos\alpha\cos 3\alpha-\frac{1}{2}\cos 2\alpha+\frac{1}{2}\cos 5\alpha$

8.017. $\sin 2\alpha\cos 3\alpha-\sin 6\alpha\cos 3\alpha$

8.018. $\sin 2\alpha-2\sin 4\alpha\cos\alpha+\sin 6\alpha$

8.019. $\sin 2\alpha\cos 4\alpha+\frac{1}{2}\sin 2\alpha+\frac{1}{2}\sin 8\alpha$

8.020. $\cos 4\alpha+2\cos\alpha\cos 6\alpha+\cos 8\alpha$

Сложность «1»

В задачах **8.021—8.030** представить в виде произведения:

8.021. $\sin\alpha+\sin 2\alpha+\sin 3\alpha$

8.022. $1+\sin 2\alpha+\cos 2\alpha$

8.023. $\sin\alpha+\sin\beta+\sin(\alpha+\beta)$

8.024. $\cos\alpha+2\sin 2\alpha-\cos 3\alpha$

8.025. $1+\sin\alpha-\cos\alpha$

8.026. $1-\sqrt{2}\cos\alpha+\cos 2\alpha$

8.027. $\sin 2\alpha-\sin 4\alpha+\sin 6\alpha$

8.028. $\cos 2\alpha+2\sin 2\alpha-\cos 6\alpha$

8.029. $1-\sin 2\alpha+\cos 2\alpha$

8.030. $2\sin 3\alpha-\cos 2\alpha+\cos 4\alpha$

Сложность «0»

В задачах **8.031—8.040** доказать тождество:

8.031. $\frac{\cos 3\alpha + \cos \alpha}{\sin 3\alpha - \sin \alpha} = \operatorname{ctg} \alpha$

8.032. $\frac{1 - \cos 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha} = \operatorname{tg}^2\alpha$

8.033. $\frac{\sin 4\alpha - \sin 2\alpha}{\cos^2(3/2)\alpha - \sin^2(3/2)\alpha} = 2\sin\alpha$

8.034. $\frac{(\sin\alpha - \cos\alpha)^2}{\sin^2((\pi/4) - \alpha)} = 2$

8.035. $\frac{\cos 2\alpha + \sin^2\alpha}{\sin 2\alpha} = \frac{1}{2}\operatorname{ctg}\alpha$

8.036. $\cos 2\alpha + \operatorname{tg}^2\alpha \cos 2\alpha - 1 = -\operatorname{tg}^2\alpha$

8.037. $\sin 2\alpha \cos \alpha - \cos 2\alpha \sin 3\alpha = -\cos 4\alpha \sin \alpha$

8.038. $(\operatorname{tg} 2\alpha - \operatorname{tg}\alpha)(\cos\alpha + \cos 3\alpha) = 2\sin\alpha$

8.039. $\sin 4\alpha \cos 2\alpha - \sin\alpha \cos\alpha = 0{,}5\sin 6\alpha$

8.040. $\frac{2\sin\alpha - \sin 2\alpha}{2\sin\alpha + \sin 2\alpha} = \operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}$

Сложность «1»

В задачах **8.041—8.050** доказать тождество:

8.041. $\frac{\sin^2 3\alpha - \sin^2\alpha}{\cos^2 3\alpha - \cos 5\alpha\cos\alpha} = 2\cos 2\alpha$

8.042. $\frac{\cos^2\alpha - \operatorname{ctg}^2\alpha + 1}{\sin^2\alpha + \operatorname{tg}^2\alpha - 1} = \operatorname{ctg}^2\alpha$

8.043. $\frac{\cos^2 2\alpha - 4\cos^2\alpha + 3}{\cos^2 2\alpha + 4\cos^2\alpha - 1} = \operatorname{tg}^4\alpha$

8.044. $\frac{1 + 2\cos\alpha + \cos 2\alpha}{\cos 2\alpha - 2\cos\alpha + 1} = -\operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2}$

8.045. $\frac{\sin\alpha}{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right)(1 + \sin\alpha)} = \operatorname{tg}\alpha$

8.046. $\frac{\sin^2\alpha}{\cos\alpha\,(1 + \operatorname{ctg}\alpha)} - \frac{\cos^2\alpha}{\sin\alpha\,(1 + \operatorname{tg}\alpha)} = \frac{1}{\cos\alpha} - \frac{1}{\sin\alpha}$

8.047. $\frac{\cos^4\alpha - \sin^4\alpha - \cos^2\alpha}{2(\cos\alpha - 1)} = \cos^2\frac{\alpha}{2}$

8.048. $\frac{1 + \cos\alpha + \cos 2\alpha + \cos 3\alpha}{\sin 2\alpha + 2\sin\alpha\cos 2\alpha} = \operatorname{ctg}\alpha$

8.049. $\frac{1 + \sin\alpha + \cos\alpha}{1 + \sin\alpha - \cos\alpha} = \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$

8.050. $1 + \frac{\cos 4\alpha}{\operatorname{tg}\left(\frac{3}{4}\pi - 2\alpha\right)} = \sin 4\alpha$

Сложность «I»

В задачах **8.051—8.060** вычислить:

8.051. $\sin^2 68° - \sin^2 38° - 0{,}5\sin 106° + 3$

8.052. $\sin 43° \sin 17° + \sin^2 13° - 2$

8.053. $\cos^2 36° - \cos^2 120° - 0{,}5\sin 18° - 0{,}5$

8.054. $\sin 49° \sin 11° + \cos^2 71° + 1$

8.055. $\sin^2 35° + \sin^2 25° + 0{,}5\cos 10° - 2$

8.056. $\sin^2 44° + \cos^2 46° + \cos 88° + 1{,}5$

8.057. $\sin^2 16° + \cos 46° \cos 14° + 1$

8.058. $\cos^2 41° + \cos 79° \cos 19° - 1$

8.059. $\sin 67° \sin 7° - \sin^2 37° - 2$

8.060. $\cos^2 84° + \cos 51° \cos 39° + 3$

Сложность «I»

В задачах **8.061—8.070** вычислить:

8.061. $\dfrac{3(\cos 20° - \sin 20°)}{\sqrt{2}\sin 25°}$

8.062. $\dfrac{(1+\operatorname{tg} 10°)\cos 10°}{\sqrt{2}\sin 55°}$

8.063. $\dfrac{\sqrt{2}(\cos 25° - \cos 65°)}{\sin 20°}$

8.064. $\dfrac{\sin 40° - \cos 40°}{\sqrt{2}\cos 85°}$

8.065. $\dfrac{1-\operatorname{ctg}^2 35°}{\cos 70°}\sin^2 35°$

8.066. $\dfrac{\cos 70° + \sin 70°}{\sqrt{2}\cos 25°}$

8.067. $\dfrac{1-2\cos^2 13°}{\cos 26°}$

8.068. $\sqrt{2}\cdot\dfrac{\cos 80° + \sin 80°}{\sin 125°}$

8.069. $\dfrac{1-2\sin^2 46°}{8\cos 92°}$

8.070. $\dfrac{1-\operatorname{tg}^2 75°}{\cos 150°}\cdot 2\cos^2 75°$

Сложность «I»

В задачах **8.071—8.080** вычислить:

8.071. $(\operatorname{tg} 14^\circ + \operatorname{ctg} 28^\circ)\cos 14^\circ \sin 14^\circ$

8.072. $\dfrac{\operatorname{tg} 15^\circ - \operatorname{ctg} 15^\circ}{\operatorname{ctg} 30^\circ}$

8.073. $\dfrac{\operatorname{tg} 26^\circ - \operatorname{ctg} 52^\circ}{\cos 78^\circ}\cos 26^\circ \sin 52^\circ$

8.074. $\sin 24^\circ (\operatorname{tg} 12^\circ + \operatorname{ctg} 12^\circ)$

8.075. $\dfrac{(\operatorname{tg} 15^\circ + \operatorname{tg} 30^\circ)\cos 15^\circ \cos 30^\circ}{\sin 45^\circ}$

8.076. $\dfrac{(1 + \operatorname{tg} 75^\circ)\cos 75^\circ}{2\sqrt{2}\sin 120^\circ}$

8.077. $(\operatorname{ctg} 27^\circ - \operatorname{ctg} 54^\circ)\sin 54^\circ + 1{,}5$

8.078. $\dfrac{\operatorname{tg}^2 31^\circ - \sin^2 31^\circ}{4\operatorname{tg}^2 31^\circ \sin^2 31^\circ}$

8.079. $\dfrac{\operatorname{ctg} 31^\circ - \operatorname{tg} 31^\circ}{\operatorname{tg} 31^\circ + \operatorname{ctg} 31^\circ}\cdot\dfrac{3}{\cos 62^\circ}$

8.080. $\dfrac{\operatorname{ctg}^2 34^\circ - \cos^2 34^\circ}{2\operatorname{ctg}^2 34^\circ \cos^2 34^\circ}$

Сложность «I»

В задачах **8.081—8.090** вычислить:

8.081. $\dfrac{\sin^2\frac{\pi}{5}\cos^2\frac{\pi}{5}}{1-\cos^4\frac{2\pi}{5}-\cos^2\frac{2\pi}{5}\sin^2\frac{2\pi}{5}}$

8.082. $\sin\dfrac{2\pi}{7}\cdot\dfrac{\left(\operatorname{tg}\frac{\pi}{7}+\operatorname{ctg}\frac{\pi}{7}\right)\cos^2\frac{\pi}{14}}{1+\cos\frac{\pi}{7}}$

8.083. $\dfrac{\left(1-\operatorname{tg}\frac{\pi}{8}\right)^2\cos^2\frac{\pi}{8}}{\sin^2\frac{\pi}{8}}$

8.084. $\dfrac{\left(\sin\frac{\pi}{9}-\cos\frac{\pi}{9}\right)^2-1}{\sin\frac{2\pi}{9}}$

8.085. $\dfrac{2\left(1+\sin\frac{2\pi}{11}-\cos\frac{2\pi}{11}\right)}{\sin\frac{\pi}{11}\left(\sin\frac{\pi}{11}+\cos\frac{\pi}{11}\right)}$

8.086. $\dfrac{\left(\sin\frac{\pi}{5}+\cos\frac{\pi}{5}\right)^2-1}{\sin\frac{2\pi}{5}}$

8.087. $\dfrac{3\left(\cos\frac{\pi}{7}-\sin\frac{\pi}{7}\right)^2}{\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{7}\right)}$

8.088. $\dfrac{\sin^4\frac{\pi}{9}-\cos^4\frac{\pi}{9}}{2\cos\frac{2\pi}{9}}$

8.089. $\dfrac{\left(\operatorname{tg}\frac{\pi}{10}-\operatorname{ctg}\frac{\pi}{10}\right)^2}{\operatorname{ctg}^2\frac{\pi}{5}}$

8.090. $\dfrac{\left(\cos\frac{\pi}{11}+\sin\frac{\pi}{11}\right)^2}{\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{11}\right)}$

Сложность «I»

В задачах **8.091—8.100** вычислить:

8.091. $\dfrac{5\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{3\pi}{14}\right)-\sin\frac{\pi}{14}\right)}{\cos\frac{\pi}{7}\sin\frac{\pi}{14}}$

8.092. $\dfrac{3\left(\cos\frac{\pi}{5}+\sin\left(\frac{\pi}{2}-2\frac{\pi}{5}\right)\right)}{2\cos\frac{3\pi}{10}\cos\frac{\pi}{10}}$

8.093. $\dfrac{\sin\frac{2\pi}{7}+\sin\frac{4\pi}{9}}{5\sin\left(\frac{\pi}{7}+\frac{2\pi}{9}\right)\cos\left(\frac{\pi}{7}-\frac{2\pi}{9}\right)}$

8.094. $\dfrac{\cos\frac{2\pi}{5}-\cos\frac{\pi}{5}}{2\sin\frac{3\pi}{10}\sin\frac{\pi}{10}}$

8.095. $\dfrac{\cos\frac{3\pi}{8}+\sin\frac{3\pi}{8}}{\sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{8}}$

8.096. $\dfrac{\sin\frac{\pi}{12}+\sin\frac{\pi}{4}}{4\sin\frac{\pi}{6}\cos\frac{\pi}{12}}$

8.097. $\dfrac{\sin\frac{2\pi}{11}+\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{4\pi}{7}\right)}{10\sin\left(\frac{\pi}{11}+\frac{2\pi}{7}\right)\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{11}+\frac{2\pi}{7}\right)}$

8.098. $\dfrac{\sin\frac{\pi}{9}-\sin\frac{\pi}{3}}{4\cos\frac{2\pi}{9}\sin\frac{\pi}{9}}$

8.099. $\dfrac{\cos\frac{2\pi}{13}-\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{13}\right)}{\sin\frac{\pi}{26}\sin\frac{3\pi}{26}}$

8.100. $\dfrac{\cos\frac{\pi}{12}+\cos\frac{\pi}{6}}{\cos\frac{\pi}{8}\cos\frac{\pi}{24}}$

Сложность «I»

В задачах **8.101—8.110** вычислить:

8.101. $\dfrac{\sin^2 32^\circ+\sin 26^\circ}{5\cos^2 32^\circ}$

8.102. $\operatorname{tg} 7^\circ\left(\dfrac{1}{\sin 14^\circ}+\dfrac{1}{\operatorname{tg} 14^\circ}\right)$

8.103. $\dfrac{\cos^2 34^\circ-\sin 22^\circ}{4\sin^2 34^\circ}$

8.104. $\dfrac{\sin 10^\circ(1+\operatorname{tg}^2 5^\circ)}{\operatorname{tg} 5^\circ}$

8.105. $\dfrac{1-\sin 84^\circ}{\cos^2 87^\circ}$

8.106. $\dfrac{\cos 2^\circ(1+\operatorname{tg}^2 1^\circ)}{2(1-\operatorname{tg}^2 1^\circ)}$

8.107. $\dfrac{1-\sin^2 38^\circ}{2\left(\sin 14^\circ+\sin^2 38^\circ\right)}$

8.108. $\dfrac{\operatorname{tg} 34^\circ(1-\operatorname{tg}^2 17^\circ)}{4\operatorname{tg} 17^\circ}$

8.109. $\dfrac{1+\cos 62^\circ-\cos^2 31^\circ}{\cos^2 31^\circ}-1$

8.110. $\dfrac{1+\sin 18^\circ-\cos^2 36^\circ}{2\cos^2 36^\circ}+\dfrac{1}{4}$

Сложность «I»

В задачах **8.111—8.120** вычислить:

8.111. $\dfrac{\cos 9^\circ+\cos 51^\circ+\sqrt{3}\cos 21^\circ}{2\sqrt{3}\cos 21^\circ}$

8.112. $\dfrac{\cos 48^\circ+\cos 42^\circ+\sqrt{2}\cos 3^\circ}{\sqrt{2}\sin 87^\circ}$

8.113. $\frac{\cos 73^\circ + \cos 47^\circ + 2\cos 13^\circ}{2\cos 13^\circ}$

8.114. $\frac{\cos 85^\circ - \cos 35^\circ - \sqrt{3}\cos 65^\circ}{\sqrt{3}\sin 25^\circ}$

8.115. $\frac{3(1 + \cos 10^\circ + \cos 110^\circ)}{1 - \cos 130^\circ}$

8.116. $\frac{\cos 43^\circ + \cos 77^\circ + 1}{4\cos^2(8^\circ 30')}$

8.117. $\frac{\cos 31^\circ + \cos 89^\circ + 1}{-\cos^2(14^\circ 30')}$

8.118. $\frac{\cos 85^\circ + \cos 35^\circ - 2\sin 65^\circ}{\cos 25^\circ}$

8.119. $\frac{2\cos^2 42^\circ + \cos 36^\circ}{\cos^2 168^\circ}$

8.120. $\frac{\cos 68^\circ - 2\cos^2 4^\circ}{2\cos^2 26^\circ}$

Сложность «I»

В задачах **8.121—8.130** вычислить:

8.121. $\frac{2\cos^2 16^\circ + 2\cos^2 76^\circ - 3}{\cos^2 44^\circ}$

8.122. $\cos^2 23^\circ + \cos^2 83^\circ + \cos^2 37^\circ + 3$

8.123. $\frac{2\sin^2 85^\circ + 2\sin^2 25^\circ - 3}{4\cos^2 55^\circ}$

8.124. $\cos^2 86^\circ + \cos^2 34^\circ - \cos^2 64^\circ + 3$

8.125. $\frac{3 - 2\cos^2 17^\circ - 2\sin^2 13^\circ}{2\cos^2 43^\circ}$

8.126. $\sin^2 35^\circ + \sin^2 155^\circ + \sin^2 85^\circ - 3$

8.127. $\frac{-3 + 2\sin^2 78^\circ + 2\sin^2 18^\circ}{5\sin^2 42^\circ}$

8.128. $\cos^2 23^\circ - \cos^2 7^\circ + \sin^2 53^\circ - 3$

8.129. $\frac{2\cos^2 46^\circ + 2\cos^2 106^\circ - 3}{\sin^2 76^\circ}$

8.130. $\cos^2 19^\circ + \sin^2 11^\circ + \cos^2 41^\circ + 2$

Сложность «I»

В задачах **8.131—8.140** вычислить:

8.131. $\frac{3\cos 196^\circ + 12\cos 164^\circ}{\cos 16^\circ}$

8.132. $\frac{2\cos 201^\circ - 16\sin 111^\circ}{\cos 21^\circ}$

8.133. $\frac{7\sin 258^\circ + 13\sin 102^\circ}{\sin 78^\circ}$

8.134. $\frac{5\sin 118^\circ + 9\cos 28^\circ}{\sin 62^\circ}$

8.135. $\frac{14\sin 143^\circ - 5\cos 127^\circ}{\sin 37^\circ}$

8.136. $\frac{12\cos 276^\circ + 7\sin 186^\circ}{\sin 6^\circ}$

8.137. $\frac{11\sin 112^\circ - 3\cos 338^\circ}{\cos 22^\circ}$

8.138. $\frac{2\cos 257^\circ + 17\cos 103^\circ}{\sin 13^\circ}$

8.139. $\frac{16\sin 251^\circ - 10\cos 161^\circ}{\cos 19^\circ}$

8.140. $\frac{8\sin 194^\circ + \cos 256^\circ}{\sin 14^\circ}$

Сложность «1»

В задачах **8.141—8.150** вычислить:

8.141. $\dfrac{\sin 43^\circ + \sin 17^\circ}{2\cos 13^\circ + 3\sin 77^\circ}$

8.142. $\dfrac{3\cos 9^\circ + \sin 81^\circ}{\sin 21^\circ + \sin 39^\circ}$

8.143. $\dfrac{\cos 71^\circ + \cos 49^\circ}{7\cos 11^\circ - 3\sin 79^\circ}$

8.144. $\dfrac{\cos 49^\circ + 2\sin 41^\circ}{\sin 79^\circ - \sin 19^\circ}$

8.145. $\dfrac{\cos 13^\circ - \cos 47^\circ}{12\sin 17^\circ - 2\cos 73^\circ}$

8.146. $\dfrac{4\cos 6^\circ + 3\sin 84^\circ}{\cos 66^\circ + \cos 54^\circ}$

8.147. $\dfrac{\sin 44^\circ + \cos 74^\circ}{2\cos 14^\circ + 2\sin 104^\circ}$

8.148. $\dfrac{2\sqrt{2}\cos 7^\circ + \sqrt{2}\sin 83^\circ}{\cos 52^\circ + \cos 38^\circ}$

8.149. $\dfrac{\sin 91^\circ - \sin 1^\circ}{9\sqrt{2}\cos 46^\circ + \sqrt{2}\sin 44^\circ}$

8.150. $\dfrac{2\sqrt{2}\sin 22^\circ + 5\sqrt{2}\cos 68^\circ}{\cos 23^\circ - \cos 67^\circ}$

Сложность «2»

В задачах **8.151—8.160** вычислить:

8.151. $\dfrac{\cos 6^\circ + \cos 12^\circ + \cos 36^\circ + \cos 42^\circ}{\sin 87^\circ \cos 15^\circ \cos 24^\circ}$

8.152. $\dfrac{\sin 36^\circ + \sin 40^\circ + \sin 44^\circ + \sin 48^\circ}{2\sin 88^\circ \cos 4^\circ \sin 42^\circ}$

8.153. $\dfrac{\cos 16^\circ - \cos 24^\circ - \cos 32^\circ + \cos 40^\circ}{\cos 86^\circ \sin 8^\circ \cos 28^\circ}$

8.154. $\dfrac{\sin 48^\circ - \sin 60^\circ - \sin 72^\circ + \sin 84^\circ}{4\cos 84^\circ \sin 12^\circ \sin 66^\circ}$

8.155. $\dfrac{\cos 14^\circ + \sin 14^\circ + \cos 42^\circ + \sin 42^\circ}{\sqrt{2}\cos 14^\circ \sin 73^\circ}$

8.156. $-\dfrac{\cos 8^\circ + \cos 16^\circ + \sin 42^\circ + \sin 34^\circ}{4\cos 4^\circ \cos 20^\circ \sin 58^\circ}$

8.157. $\dfrac{\sin 36^\circ + \sin 40^\circ + \cos 62^\circ + \cos 42^\circ}{4\cos 6^\circ \cos 4^\circ \sin 38^\circ}$

8.158. $\dfrac{\cos 4^\circ - \cos 6^\circ - \cos 8^\circ + \cos 10^\circ}{\sin^2 1^\circ \cos 1^\circ \cos 7^\circ}$

8.159. $\dfrac{\sin 8^\circ - \sin 10^\circ - \sin 12^\circ + \sin 14^\circ}{4\sin^2 1^\circ \cos 1^\circ \sin 11^\circ}$

8.160. $\dfrac{\cos 5^\circ + \cos 85^\circ + \sin 75^\circ + \sin 15^\circ}{4\sqrt{2}\cos 5^\circ \sin 55^\circ}$

Сложность «2»

В задачах **8.161—8.170** вычислить:

8.161. $\dfrac{3\cos 23^\circ - 3\sin 113^\circ + \cos 203^\circ}{\cos 10^\circ \cos 13^\circ - \cos 80^\circ \cos 77^\circ}$

8.162. $\dfrac{5\cos 63^\circ + 2\sin 27^\circ - 4\sin 207^\circ}{\sin 15^\circ \sin 78^\circ + \sin 75^\circ \sin 12^\circ}$

8.163. $\dfrac{3\sin 124^\circ - \cos 146^\circ - 2\cos 34^\circ}{\cos 49^\circ \cos 15^\circ + \cos 41^\circ \cos 75^\circ}$

8.164. $\dfrac{6\sin 25^\circ - 3\cos 65^\circ + 7\sin 155^\circ}{\cos 53^\circ \cos 12^\circ - \cos 37^\circ \cos 78^\circ}$

8.165. $\dfrac{2\sin 54^\circ + 3\cos 36^\circ - 2\cos 144^\circ}{\sin 70^\circ \sin 74^\circ - \sin 20^\circ \sin 16^\circ}$

8.166. $\dfrac{4\sin 139^\circ - 7\cos 131^\circ + 2\sin 41^\circ}{\cos 68^\circ \cos 19^\circ + \cos 22^\circ \cos 71^\circ}$

8.167. $\dfrac{\cos 37^\circ - 8\cos 143^\circ + 2\sin 127^\circ}{\sin 42^\circ \sin 79^\circ + \sin 48^\circ \sin 11^\circ}$

8.168. $\dfrac{3\cos 215^\circ - 4\cos 35^\circ - 2\sin 125^\circ}{\cos 17^\circ \cos 18^\circ - \cos 73^\circ \cos 72^\circ}$

8.169. $\dfrac{5\sin 211^\circ + 8\cos 59^\circ - 5\sin 31^\circ}{\sin 54^\circ \sin 67^\circ - \sin 36^\circ \sin 23^\circ}$

8.170. $\dfrac{7\cos 29^\circ - 2\cos 151^\circ + 4\sin 61^\circ}{\cos 67^\circ \cos 38^\circ + \cos 23^\circ \cos 52^\circ}$

Сложность «0»

В задачах **8.171—8.180** вычислить:

8.171. $\cos\alpha$, если $\sin\alpha = 1/2$ и $\pi/2 < \alpha < \pi$

8.172. $\sin\alpha$, если $\cos\alpha = \sqrt{3}/2$ и $3\pi/2 < \alpha < 2\pi$

8.173. $\operatorname{tg}\alpha$, если $\cos\alpha = -\sqrt{2}/2$ и $\pi < \alpha < 3\pi/2$

8.174. $\sin\alpha$, если $\operatorname{tg}\alpha = 2$ и $\pi < \alpha < 3\pi/2$

8.175. $\operatorname{tg}\alpha$, если $\sin\alpha = -\sqrt{2}/2$ и $-\pi/2 < \alpha < 0$

8.176. $\sin\alpha$, если $\cos\alpha = 1/2$ и $3\pi/2 < \alpha < 2\pi$

8.177. $\cos\alpha$, если $\operatorname{tg}\alpha = 1/2$ и $\pi < \alpha < 3\pi/2$

8.178. $\cos\alpha$, если $\operatorname{ctg}\alpha = 1/2$ и $\pi < \alpha < 3\pi/2$

8.179. $\operatorname{ctg}\alpha$, если $\sin\alpha = -1/2$ и $\pi < \alpha < 3\pi/2$

8.180. $\sin\alpha$, если $\operatorname{ctg}\alpha = 1/2$ и $\pi < \alpha < 3\pi/2$

Сложность «1»

В задачах **8.181—8.190** вычислить:

8.181. $\dfrac{2+\sin\alpha\cos\alpha}{1+5\cos^2\alpha}$, если $\operatorname{tg}\alpha = 2$

8.182. $\dfrac{3-\sin\alpha\cos\alpha}{6\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}$, если $\operatorname{tg}\alpha = -2$

8.183. $\dfrac{2+3\sin\alpha\cos\alpha}{\sin^2\alpha+\sin\alpha\cos\alpha}$, если $\operatorname{tg}\alpha = 4$

8.184. $\dfrac{2+5\sin\alpha\cos\alpha}{\sin^2\alpha-\sin\alpha\cos\alpha}$, если $\operatorname{tg}\alpha = 1/2$

8.185. $\dfrac{\sin^2\alpha-3\cos^2\alpha}{2\sin\alpha\cos\alpha+4\cos^2\alpha}$, если $\operatorname{tg}\alpha = 1/2$

8.186. $\dfrac{3+2\sin\alpha\cos\alpha}{\sin^2\alpha+4\cos^2\alpha}$, если $\operatorname{tg}\alpha = -4$

8.187. $\dfrac{\cos^2\alpha+2}{3\sin\alpha\cos\alpha+\cos^2\alpha}$, если $\operatorname{tg}\alpha = 3$

8.188. $\dfrac{\sin^2\alpha-2\cos^2\alpha}{5\sin\alpha\cos\alpha+3}$, если $\operatorname{tg}\alpha = -2$

8.189. $\dfrac{3\sin\alpha\cos\alpha-\sin^2\alpha}{9+5\sin\alpha\cos\alpha}$, если $\operatorname{tg}\alpha = -3$

8.190. $\dfrac{\sin^2\alpha-3\sin\alpha\cos\alpha}{\cos^4\alpha}$, если $\operatorname{tg}\alpha = 2$

Сложность «0»

В задачах **8.191—8.200** вычислить:

8.191. $\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)-\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$, если $\cos x = \dfrac{\sqrt{3}}{4}$

8.192. $\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)-\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$, если $\sin x = 1/8$

8.193. $\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$, если $\sin x = \dfrac{\sqrt{2}}{4}$

8.194. $\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$, если $\cos x=\frac{\sqrt{2}}{5}$

8.195. $\sin\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)+\sin\left(x-\frac{2\pi}{3}\right)$, если $\sin x = 1/4$

8.196. $\cos\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)+\cos\left(x-\frac{2\pi}{3}\right)$, если $\cos x = -0{,}62$

8.197. $\cos\left(x-\frac{2\pi}{3}\right)-\cos\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)$, если $\sin x=\frac{1}{\sqrt{3}}$

8.198. $\operatorname{tg}\left(x+\frac{\pi}{4}\right)-\operatorname{tg}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$, если $\operatorname{tg} x = 1/2$

8.199. $\operatorname{tg}\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+\operatorname{tg}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$, если $\operatorname{tg} x = -1/2$

8.200. $\operatorname{ctg}\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+\operatorname{ctg}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$, если $\operatorname{ctg} x = 2$

Сложность «0»

В задачах **8.201—8.210** вычислить:

8.201. $\operatorname{tg} x$, если $\sin(x+30^\circ)+\sin(x-30^\circ)=2\sqrt{3}\cos x$

8.202. $\sin x$, если $\sin(x+60^\circ)+\sin(x-60^\circ)=-1$

8.203. $\sin x$, если $\sin(x+30^\circ)+\sin(x-30^\circ)=\sqrt{3}$

8.204. $\operatorname{ctg} x$, если $\cos(x+30^\circ)+\cos(x-30^\circ)=\sqrt{3}\sin x$

8.205. $\cos x$, если $\cos(x+30^\circ)+\cos(x-30^\circ)=\sqrt{3}$

8.206. $\sin x$, если $\sin(x-45^\circ)+\sin(x+45^\circ)=\sqrt{2}/2$

8.207. $\cos x$, если $\cos(x-45^\circ)+\cos(x+45^\circ)=\sqrt{2}$

8.208. $\operatorname{tg} x$, если $\sin(x-45^\circ)+\sin(x+45^\circ)=\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x$

8.209. $\operatorname{ctg} x$, если $\cos(x-45^\circ)+\cos(x+45^\circ)=\sqrt{2}\sin x$

8.210. $\cos x$, если $\sin(120^\circ-x)+\sin(120^\circ+x)=-\sqrt{3}$

Сложность «0»

В задачах **8.211—8.220** вычислить:

8.211. $\cos 2\alpha$, если $\sin\alpha=-1/4$

8.212. $\cos 2\alpha$, если $\cos\alpha=1/5$

8.213. $\sin 2\alpha$, если $\operatorname{tg}\alpha=1/2$

8.214. $\cos 2\alpha$, если $\operatorname{tg}\alpha=1/4$

8.215. $\operatorname{tg} 2\alpha$, если $\operatorname{tg}\alpha=3/5$

8.216. $1-\cos 2\alpha$, если $\sin\alpha=1/\sqrt{5}$

8.217. $1+\cos 2\alpha$, если $\sin\alpha=-0{,}6$

8.218. $\cos 2\alpha$, если $\cos\alpha=0{,}25$

8.219. $\sin 2\alpha$, если $\operatorname{ctg}\alpha=4/3$

8.220. $\sin 2\alpha$, если $\operatorname{tg}\alpha=-0{,}5$

Сложность «0»

В задачах **8.221—8.230** вычислить:

8.221. $\operatorname{tg}\alpha$, если $\operatorname{tg}(\alpha/2) = 2$

8.222. $\operatorname{ctg}\alpha$, если $\operatorname{tg}(\alpha/2) = -2$

8.223. $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha$, если $\operatorname{tg}(\alpha/2) = 3$

8.224. $\sin\alpha$, если $\operatorname{tg}(\alpha/2) = 3$

8.225. $\cos\alpha$, если $\operatorname{tg}(\alpha/2) = -3$

8.226. $\sin\alpha - \cos\alpha$, если $\operatorname{tg}(\alpha/2) = 1$

8.227. $\operatorname{tg}\alpha$, если $\operatorname{ctg}(\alpha/2) = 1/3$

8.228. $\operatorname{ctg}\alpha$, если $\operatorname{ctg}(\alpha/2) = -2$

8.229. $\sin\alpha$, если $\operatorname{ctg}(\alpha/2) = 1/3$

8.230. $\cos\alpha$, если $\operatorname{ctg}(\alpha/2) = -1$

Сложность «1»

В задачах **8.231—8.240** вычислить:

8.231. $\sin(\pi + 2\alpha)$, если $\sin\alpha + \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$

8.232. $\cos(\pi + 2\alpha)$, если $\sin\alpha = \sqrt{0,3}$

8.233. $\sin(\frac{3\pi}{2} + 2\alpha)$, если $\sin\alpha = -\sqrt{0,7}$

8.234. $\sin(\frac{3\pi}{2} - 2\alpha)$, если $\cos\alpha = -\sqrt{0,2}$

8.235. $\cos(\frac{5\pi}{2} + 2\alpha)$, если $\sin\alpha - \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$

8.236. $\cos(\frac{7\pi}{2} + 2\alpha)$, если $\sin\alpha + \cos\alpha = -\frac{1}{\sqrt{10}}$

8.237. $\cos(2\alpha - \pi)$, если $\sin\alpha = \sqrt{0,2}$

8.238. $\sin(2\alpha - \frac{\pi}{2})$, если $\cos\alpha = -\sqrt{0,1}$

8.239. $\cos(\frac{3\pi}{2} + 2\alpha)$, если $\sin\alpha - \cos\alpha = 0,5$

8.240. $\sin(\pi + 2\alpha)$, если $\sin\alpha + \cos\alpha = 0,7$

Сложность «1»

В задачах **8.241—8.250** вычислить:

8.241. $2\sin 3\alpha \sin 2\alpha + \cos 5\alpha$, если $\cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{0,6}$

8.242. $2\cos 3\alpha \cos 4\alpha - \cos 7\alpha$, если $\cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{0,8}$

8.243. $2\sin 5\alpha \cos 3\alpha - \sin 8\alpha$, если $\sin\alpha + \cos\alpha = \sqrt{0,6}$

8.244. $2\cos 3\alpha \cos 2\alpha - \cos 5\alpha$, если $\cos\frac{\alpha}{2} = 0,6$

8.245. $2\sin 5\alpha \sin 4\alpha + \cos 9\alpha$, если $\cos\frac{\alpha}{2} = 0,8$

8.246. $2\sin 7\alpha \cos 5\alpha - \sin 12\alpha$, если $\sin\alpha - \cos\alpha = 0{,}4$

8.247. $2\sin 5\alpha \cos 7\alpha - \sin 12\alpha$, если $\sin\alpha + \cos\alpha = 0{,}3$

8.248. $2\sin 3\alpha \cos 5\alpha - \sin 8\alpha$, если $\sin\alpha - \cos\alpha = 0{,}9$

8.249. $2\cos 5\alpha \cos 7\alpha - \cos 12\alpha$, если $\cos\alpha = 0{,}2$

8.250. $2\sin 6\alpha \sin 4\alpha + \cos 10\alpha$, если $\cos\alpha = 0{,}3$

Сложность «I»

В задачах **8.251—8.260** вычислить:

8.251. $\sin^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)$, если $\sin\alpha = 0{,}2$

8.252. $\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)$, если $\sin\alpha = -0{,}4$

8.253. $\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)$, если $\sin\alpha = 0{,}8$

8.254. $\cos^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)$, если $\sin\alpha = -0{,}6$

8.255. $\sin^2\left(\frac{3\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)$, если $\sin\alpha = 0{,}3$

8.256. $\cos^2\left(\frac{3\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)$, если $\sin\alpha = -0{,}8$

8.257. $\sin^2\left(\frac{3\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)$, если $\sin\alpha = 0{,}7$

8.258. $\cos^2\left(\frac{3\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)$, если $\sin\alpha = -0{,}2$

8.259. $\sin^2\left(\frac{5\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)$, если $\sin\alpha = 0{,}1$

8.260. $\cos^2\left(\frac{5\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)$, если $\sin\alpha = -0{,}3$

Сложность «I»

В задачах **8.261—8.270** вычислить:

8.261. $\sin\left(\frac{\pi}{6}+2\alpha\right)$, если $\operatorname{tg}\alpha = 2\sqrt{3}$

8.262. $\cos\left(\frac{\pi}{3}+2\alpha\right)$, если $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$

8.263. $\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}+2\alpha\right)$, если $\operatorname{tg}\alpha = -3$

8.264. $\sin\left(\frac{7\pi}{6}-2\alpha\right)$, если $\operatorname{tg}\alpha = \frac{3\sqrt{3}}{2}$

8.265. $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+2\alpha\right)$, если $\operatorname{tg}\alpha=2$

8.266. $\frac{2\sin\alpha-\cos\alpha}{3\cos\alpha+\sin\alpha}$, если $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=2$

8.267. $\frac{\sin\alpha+2\cos\alpha}{\sin\alpha+4\cos\alpha}$, если $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{2}$

8.268. $\cos\left(\frac{4\pi}{3}-2\alpha\right)$, если $\operatorname{tg}\alpha=\frac{\sqrt{3}}{4}$

8.269. $\sqrt{3}\operatorname{tg}\left(\frac{11\pi}{6}-2\alpha\right)$, если $\operatorname{tg}\alpha=3\sqrt{3}$

8.270. $\frac{\sin\alpha-4\cos\alpha}{2\sin\alpha+\cos\alpha}$, если $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=2$

Сложность «1»

В задачах **8.271—8.280** вычислить:

8.271. $\cos\alpha+\cos\beta$, если $\alpha+\beta=4\pi$; $\alpha-\beta=\pi/2$

8.272. $\frac{\sin\alpha+\sin\beta}{\sin\alpha-\sin\beta}$, если $\alpha+\beta=2\pi/3$; $\alpha-\beta=\pi/3$

8.273. $\sin\alpha+\sin\beta$, если $\alpha+\beta=3\pi$; $\alpha-\beta=\pi/3$

8.274. $\frac{\sin\alpha-\sin\beta}{\cos\alpha+\cos\beta}$, если $\alpha+\beta=3\pi/2$; $\alpha-\beta=\pi/2$

8.275. $\sqrt{2}(\cos\alpha+\cos\beta)$, если $\alpha+\beta=\pi/2$; $\alpha-\beta=\pi/3$

8.276. $\frac{\sin\alpha-\sin\beta}{\cos\alpha-\cos\beta}$, если $\alpha+\beta=\pi/2$; $\alpha-\beta=\pi/3$

8.277. $2\sqrt{3}(\sin\alpha-\sin\beta)$, если $\alpha+\beta=2\pi$; $\alpha-\beta=2\pi/3$

8.278. $\frac{\cos\alpha+\cos\beta}{\sin\alpha+\sin\beta}$, если $\alpha+\beta=\pi/2$; $\alpha-\beta=\pi/3$

8.279. $\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\cos\alpha+\cos\beta}{\cos\alpha-\cos\beta}$, если $\alpha+\beta=2\pi/3$; $\alpha-\beta=\pi/2$

8.280. $\frac{\sin\alpha+\sin\beta}{\cos\alpha-\cos\beta}$, если $\alpha+\beta=3\pi/2$; $\alpha-\beta=\pi/3$

Сложность «2»

В задачах **8.281—8.290** вычислить:

8.281. $\cos(\alpha+\beta)$, если $\sin\alpha\sin\beta=1/2$; $\alpha-\beta=\pi/2$

8.282. $\cos(\alpha-\beta)$, если $\sin\alpha\sin\beta=1/2$; $\alpha+\beta=3\pi/2$

8.283. $\sqrt{2}\cos(\alpha-\beta)$, если $\cos\alpha\cos\beta = 1/2$; $\alpha+\beta = 5\pi/2$

8.284. $3\cos(\alpha+\beta)$, если $\cos\alpha\cos\beta = -1/2$; $\alpha-\beta = 7\pi/2$

8.285. $\sin(\alpha-\beta)$, если $\sin\alpha\cos\beta = 1/4$; $\alpha+\beta = 9\pi/2$

8.286. $\sin(\alpha+\beta)$, если $\sin\alpha\cos\beta = -1/4$; $\alpha-\beta = -\pi/2$

8.287. $5\cos(\alpha-\beta)$, если $\cos\alpha\cos\beta = 1/2$; $\alpha+\beta = \pi/3$

8.288. $\cos(\alpha+\beta)$, если $\sin\alpha\sin\beta = 1/5$; $\alpha-\beta = \pi/3$

8.289. $0{,}2\cos(\alpha-\beta)$, если $\cos\alpha\cos\beta = -1/4$; $\alpha+\beta = \pi/3$

8.290. $4\sin(\alpha-\beta)$, если $\sin\alpha\cos\beta = 1/4$; $\alpha+\beta = -\pi/6$

Сложность «3»

В задачах **8.291—8.300** вычислить:

8.291. $\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}$, если $\sin x = 0{,}21$

8.292. $\operatorname{tg} x$, если $\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2} = \sqrt{0{,}4}$

8.293. $\cos x$, если $\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2} = \sqrt{0{,}5}$

8.294. $\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}$, если $\sin x = -0{,}44$

8.295. $\sin x$, если $\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2} = 0{,}6$

8.296. $\sqrt{10}\left(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right)$, если $\cos x = 0{,}8$

8.297. $\cos x$, если $\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2} = 0{,}5$

8.298. $\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}$, если $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

8.299. $\sin x$, если $\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2} = \sqrt{0{,}44}$

8.300. $\sqrt{19}\operatorname{tg} x$, если $\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2} = \sqrt{0{,}1}$

Сложность «3»

В задачах **8.301—8.310** вычислить:

8.301. $\sin^4\alpha + \cos^4\alpha$, если $\sin\alpha+\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$

8.302. $\sin^3\alpha + \cos^3\alpha$, если $\sin\alpha + \cos\alpha = 0{,}8$

8.303. $\sin^3\alpha - \cos^3\alpha$, если $\sin\alpha - \cos\alpha = 1,2$

8.304. $\dfrac{1}{\sin^4\alpha} + \dfrac{1}{\cos^4\alpha}$, если $\sin\alpha + \cos\alpha = \sqrt{\dfrac{3}{2}}$

8.305. $\sqrt{2}\left(\dfrac{1}{\sin^3\alpha} + \dfrac{1}{\cos^3\alpha}\right)$, если $\sin\alpha + \cos\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

8.306. $\sqrt{2}\left(\dfrac{1}{\sin^3\alpha} - \dfrac{1}{\cos^3\alpha}\right)$, если $\sin\alpha - \cos\alpha = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

8.307. $\sin^6\alpha + \cos^6\alpha$, если $\sin\alpha + \cos\alpha = \sqrt{\dfrac{3}{2}}$

8.308. $\dfrac{\sin^2\alpha}{\cos\alpha} + \dfrac{\cos^2\alpha}{\sin\alpha}$, если $\sin\alpha + \cos\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

8.309. $\dfrac{\sin^2\alpha}{\cos\alpha} - \dfrac{\cos^2\alpha}{\sin\alpha}$, если $\sin\alpha - \cos\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$

8.310. $\dfrac{\sin^4\alpha}{\cos^2\alpha} + \dfrac{\cos^4\alpha}{\sin^2\alpha}$, если $\sin\alpha + \cos\alpha = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$

Сложность «3»

В задачах **8.311—8.320** вычислить:

8.311. $\operatorname{tg}\alpha$, если $2\operatorname{tg}\alpha - \sin\alpha + 5\cos\alpha = 10$

8.312. $\operatorname{ctg}\alpha$, если $3\operatorname{ctg}\alpha + 4\sin\alpha - \cos\alpha = 12$

8.313. $\operatorname{ctg}\alpha$, если $2\operatorname{tg}\alpha - \sin\alpha + 10\cos\alpha = 20$

8.314. $\operatorname{tg}\alpha$, если $3\operatorname{ctg}\alpha - 0,1\sin\alpha - \cos\alpha = -0,3$

8.315. $\operatorname{ctg}\alpha$, если $6\operatorname{tg}\alpha + \sin\alpha - 5\cos\alpha = 30$

8.316. $\operatorname{ctg}\alpha$, если $7\operatorname{tg}\alpha + \sin\alpha - 4\cos\alpha = 28$

8.317. $\operatorname{ctg}\alpha$, если $36\operatorname{tg}\alpha - 3\sin\alpha + \cos\alpha = 12$

8.318. $\operatorname{ctg}\alpha$, если $14\operatorname{ctg}\alpha + \sin\alpha - 2\cos\alpha = 7$

8.319. $\operatorname{tg}\alpha$, если $8\operatorname{ctg}\alpha + 4\cos\alpha - 0,5\sin\alpha = 1$

8.320. $\operatorname{ctg}\alpha$, если $10\operatorname{tg}\alpha - 5\sin\alpha + 2\cos\alpha = 4$

§ 26. ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ

Сложность «0»

В задачах **8.321—8.330** решить уравнение:

8.321. $\cos x = -1$ **8.322.** $\cos x = 1$ **8.323.** $\sin x = -1$

8.324. $\operatorname{tg} x = 0$ **8.325.** $\sin x = 0$ **8.326.** $\sin x = 1$

8.327. $\operatorname{tg} x = 1$ **8.328.** $\cos x = 0$ **8.329.** $\operatorname{tg} x = -1$

8.330. $\operatorname{ctg} x = 0$

Сложность «0»

В задачах **8.331—8.340** решить уравнение:

8.331. $\sin x = 1/2$ **8.332.** $\cos x = -\sqrt{3}/2$ **8.333.** $\sin x = \sqrt{2}/2$

8.334. $\operatorname{tg} x = -\sqrt{3}$ **8.335.** $\cos x = 1/2$ **8.336.** $\operatorname{tg} x = 1/\sqrt{3}$

8.337. $\sin x = -\sqrt{3}/2$ **8.338.** $\cos x = \sqrt{2}/2$ **8.339.** $\sin x = -\sqrt{2}/2$

8.340. $\operatorname{ctg} x = \sqrt{3}$

Сложность «0»

В задачах **8.341—8.350** решить уравнение:

8.341. $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$ **8.342.** $\sin x = -1/2$ **8.343.** $\cos x = -\sqrt{2}/2$

8.344. $\operatorname{ctg} x = -1/\sqrt{3}$ **8.345.** $\cos x = -1/2$ **8.346.** $\operatorname{tg} x = -1/\sqrt{3}$

8.347. $\cos x = \sqrt{3}/2$ **8.348.** $\operatorname{ctg} x = -\sqrt{3}$ **8.349.** $\sin x = \sqrt{3}/2$

8.350. $\operatorname{ctg} x = 1/\sqrt{3}$

Сложность «1»

В задачах **8.351—8.360** найти решение уравнения на указанном промежутке:

8.351. $\cos 2x = 1/2$, $0° < x < 90°$

8.352. $\cos \frac{2x}{5} = 0$, $180° < x < 270°$

8.353. $\operatorname{tg} 3x = -1$, $0° < x < 150°$

8.354. $\operatorname{ctg} \frac{3x}{2} = 0$, $0° < x < 90°$

8.355. $\sin \frac{3x}{2} = -1$, $0° < x < 270°$

8.356. $\sin \frac{4x}{3} = 0$, $90° < x < 180°$

8.357. $\sin 5x = 1$, $0° < x < 45°$

8.358. $\sin 3x = 1/2$, $0° < x < 90°$

8.359. $\cos 3x = -1/2$, $0° < x < 90°$

8.360. $\sin 2x = -1/2$, $0° < x < 180°$

Сложность «1»

В задачах **8.361—8.370** найти решение уравнения на указанном промежутке:

8.361. $\operatorname{ctg} 2x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$, $\quad 90° < x < 180°$

8.362. $\operatorname{tg}\frac{5x}{2} = -\sqrt{3}$, $\quad 0° < x < 90°$

8.363. $\sin\frac{5x}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\quad 180° < x < 270°$

8.364. $\sin 2x = \frac{1}{2}$, $\quad 0° < x < 90°$

8.365. $\sin\frac{3x}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\quad 270° < x < 360°$

8.366. $\operatorname{tg} 2x = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $\quad 90° < x < 180°$

8.367. $\cos 2x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\quad 180° < x < 270°$

8.368. $\operatorname{tg}\frac{2x}{5} = \sqrt{3}$, $\quad 0° < x < 180°$

8.369. $\cos 3x = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\quad 0° < x < 180°$

8.370. $\cos 5x = -\frac{1}{2}$, $\quad 90° < x < 180°$

Сложность «1»

В задачах **8.371—8.380** найти решение уравнения на указанном промежутке:

8.371. $\sin(\pi(x-2)) = 0$, $\quad 0 \leq x < 4$

8.372. $\cos(\pi(x-3)) = 1$, $\quad 4 < x < 6$

8.373. $\operatorname{tg}(\pi(x-4)) = 0$, $\quad 3 < x < 6$

8.374. $\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}(x-1)\right) = 0$, $\quad 1 < x < 5$

8.375. $\cos\left(\frac{\pi}{3}(x-1)\right) = 1$, $\quad 0 < x < 9$

8.376. $\sin\left(\frac{\pi}{2}(x-3)\right) = 1$, $\quad 3 < x < 9$

8.377. $\sin\left(\frac{\pi}{2}(x+3)\right) = 0$, $\quad 2 < x < 4$

8.378. $\cos\left(\frac{\pi}{2}(x-2)\right)=0,\qquad 2<x<7$

8.379. $\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4}(x-3)\right)=1,\qquad 5<x<9$

8.380. $\mathrm{ctg}\left(\frac{\pi}{4}(x-1)\right)=1,\qquad 1<x<7$

Сложность «I»

В задачах **8.381—8.390** найти решение уравнения на указанном промежутке:

8.381. $\sqrt{3}+2\cos\frac{\pi x}{9}=0,\qquad 8<x<20$

8.382. $1+2\sin\frac{\pi x}{3}=0,\qquad 2<x<4$

8.383. $1+2\cos\frac{\pi x}{15}=0,\qquad 5<x<20$

8.384. $1+\sqrt{2}\cos\frac{\pi x}{8}=0,\qquad 3<x<10$

8.385. $1-2\sin\frac{4\pi x}{3}=0,\qquad 0<x<1$

8.386. $\sqrt{3}+2\cos\frac{\pi x}{15}=0,\qquad 15<x<30$

8.387. $1+2\sin\frac{2\pi x}{3}=0,\qquad 1<x<2$

8.388. $1+\sqrt{2}\sin\frac{\pi x}{4}=0,\qquad 0<x<6$

8.389. $1-\sqrt{2}\cos\frac{3\pi x}{4}=0,\qquad 2{,}5<x<4$

8.390. $1-\sqrt{2}\sin\frac{\pi x}{4}=0,\qquad 1<x<5$

Сложность «I»

В задачах **8.391—8.400** решить уравнение:

8.391. $\left|\mathrm{tg}\frac{x}{2}\right|=1$

8.392. $|\sin 4x|=\frac{\sqrt{3}}{2}$

8.393. $|\cos 2x|=1$

8.394. $\left|\mathrm{ctg}\frac{2x}{3}\right|=\frac{1}{\sqrt{3}}$

8.395. $|\sin 3x|=1$

8.396. $|\mathrm{tg}2x|=\sqrt{3}$

8.397. $\left|\operatorname{ctg}\frac{x}{3}\right| = 1$

8.398. $|\sin 2x| = \frac{1}{2}$

8.399. $\left|\cos\frac{x}{2}\right| = \frac{1}{2}$

8.400. $\left|\cos\frac{2x}{3}\right| = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Сложность «I»

В задачах **8.401—8.410** решить уравнение:

8.401. $\cos^2 x = \frac{1}{2}$

8.402. $\operatorname{ctg}^2 x = \frac{1}{3}$

8.403. $\operatorname{ctg}^2 x = 1$

8.404. $\sin^2 x = \frac{3}{4}$

8.405. $\operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{3}$

8.406. $\cos^2 x = \frac{3}{4}$

8.407. $\operatorname{ctg}^2 x = 3$

8.408. $\sin^2 x = \frac{1}{2}$

8.409. $\operatorname{tg}^2 x = 1$

8.410. $\operatorname{tg}^2 x = 3$

Сложность «I»

В задачах **8.411—8.420** решить уравнение:

8.411. $2\cos^2 x + 5\sin x - 4 = 0$

8.412. $2\sin^2 2x + 7\sin 2x - 4 = 0$

8.413. $3\sin^2 2x + 7\cos 2x - 3 = 0$

8.414. $2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0$

8.415. $\cos^2 x - \sin x - 1 = 0$

8.416. $\sqrt{2}\sin x + \operatorname{ctg} x = 0$

8.417. $\cos x - \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{tg} x = 0$

8.418. $\cos^2 x + \sin x - \frac{1}{4} = 0$

8.419. $4\sin^2 x - 4\cos x - 1 = 0$

8.420. $\cos^2 x + \sin x \cos x = 1$

Сложность «I»

В задачах **8.421—8.430** решить уравнение:

8.421. $3\sin^2 x - \cos^2 x - 1 = 0$

8.422. $5\sin^2 x = 2 - \cos^2 x$

8.423. $5 - 4\sin^2 x = 5\cos^2 x$

8.424. $\cos^2 x - \sin^2 x = 0$

8.425. $\sin^2 x - 3\cos^2 x = 0$

8.426. $3\sin^2 x = \cos^2 x$

8.427. $\sin^2 x + \sin x \cos x = 0$

8.428. $\cos^2 x - \cos x \sin x = 0$

8.429. $\cos^2 x - \cos x \sin x = 1$

8.430. $\sin^2 x + \sin x \cos x = 1$

Сложность «I»

В задачах **8.431—8.440** решить уравнение:

8.431. $\cos(6x - 60^\circ)\cos 2x = 0$

8.432. $\sin(9x - 45^\circ)\sin 2x = 0$

8.433. $\operatorname{tg} x \cos(3x + 60^\circ) = 0$

8.434. $\sin 2x \cos(45^\circ - x) = 0$

8.435. $\cos(3x - 30^\circ) \sin 5x = 0$

8.436. $\cos(x + 120^\circ) \sin 4x = 0$

8.437. $\sin(4x - 60^\circ) \cos(x + 30^\circ) = 0$

8.438. $\sin(3x + 135^\circ) \cos(2x - 60^\circ) = 0$

8.439. $\operatorname{tg}(2x - 60^\circ) \cos\frac{x}{2} = 0$

8.440. $\operatorname{ctg}(3x + 120^\circ) \sin\left(\frac{x}{3} - 60^\circ\right) = 0$

Сложность «I»

В задачах **8.441—8.450** решить уравнение:

8.441. $\sin(x - 30^\circ) \cos 2x = \sin(x - 30^\circ)$

8.442. $\cos 2x \sin 3x = \cos 2x$

8.443. $2\cos(x + 60^\circ) \cos 3x = \cos(x + 60^\circ)$

8.444. $\sin 5x \cos 6x = \sin(5x + 180^\circ)$

8.445. $\cos(4x + 90^\circ) \sin(2x - 180^\circ) = \sin 4x$

8.446. $\operatorname{tg} x \sin(2x + 30^\circ) = \operatorname{tg}(x + 180^\circ)$

8.447. $\sin(2x - 180^\circ) \cos(x + 90^\circ) = \sin 2x$

8.448. $\sqrt{2} \cos 2x \sin(5x + 90^\circ) = \cos 2x$

8.449. $\sqrt{3} \sin\frac{x}{3} = 2\cos\left(\frac{x}{3} + 270^\circ\right) \sin 3x$

8.450. $\cos(2x + 270^\circ) \operatorname{tg} x = -\sin 2x$

Сложность «I»

В задачах **8.451—8.460** решить уравнение:

8.451. $\frac{\cos x}{1 - \sin x} = 0$

8.452. $\frac{\sin 2x}{1 + \cos 2x} = 0$

8.453. $\frac{\sin(x - 45^\circ)}{\cos x - \left(\sqrt{2}/2\right)} = 0$

8.454. $\frac{\cos(x - 60^\circ)}{\cos x - \left(\sqrt{3}/2\right)} = 0$

8.455. $\frac{\cos 2x}{1 + \sin 2x} = 0$

8.456. $\frac{\sin x}{1 + \cos x} = 0$

8.457. $\frac{\cos x - 0,5}{\cos(x + 30^\circ)} = 0$

8.458. $\frac{\sin x - 0,5}{\cos(x + 60^\circ)} = 0$

8.459. $\frac{\cos x + \left(\sqrt{3}/2\right)}{\sin x - 0,5} = 0$

8.460. $\frac{\sin x + 0,5}{\cos x - \left(\sqrt{3}/2\right)} = 0$

Сложность «1»

В задачах **8.461—8.470** решить уравнение:

8.461. $\frac{2}{1+\mathrm{tg}^2 x}=3\,\mathrm{ctg}\,60^\circ\cos x$

8.462. $\sin 2x=\mathrm{tg}\,60^\circ\sin x$

8.463. $\frac{\sin x}{\cos 60^\circ}=\mathrm{ctg}\,30^\circ\,\mathrm{tg}\,x$

8.464. $\cos 120^\circ\sin 2x=\sin 120^\circ\cos x$

8.465. $\frac{1}{1+\mathrm{ctg}\,x}=\cos 45^\circ\sin x$

8.466. $\mathrm{tg}\,45^\circ\sin x=\sin 30^\circ\,\mathrm{tg}\,x$

8.467. $\sin 90^\circ\sin x=2\sin 45^\circ\sin\frac{x}{2}$

8.468. $\cos x=\cos 45^\circ\,\mathrm{ctg}\,x$

8.469. $\frac{\cos x}{\sin 30^\circ}=\mathrm{tg}\,60^\circ\,\mathrm{ctg}\,x$

8.470. $\frac{\cos 180^\circ}{1-\mathrm{tg}^2 x}=\frac{\cos x}{\cos 2x}$

Сложность «1»

В задачах **8.471—8.480** решить уравнения:

8.471. $\sin 2x=\sin 3x$

8.472. $\cos\frac{x}{3}=\cos 2x$

8.473. $\mathrm{tg}\,x=\mathrm{tg}\,4x$

8.474. $\mathrm{ctg}\,\frac{x}{4}=\mathrm{ctg}\,5x$

8.475. $\sin 4x=-\sin 3x$

8.476. $\cos 2x=-\cos 5x$

8.477. $\mathrm{tg}\,2x=-\mathrm{tg}\,3x$

8.478. $\mathrm{ctg}\,3x=-\mathrm{ctg}\,2x$

8.479. $\sin(90^\circ-3x)=\cos 5x$

8.480. $\cos(180^\circ-4x)=-\cos x$

Сложность «2»

В задачах **8.481—8.490** найти решение уравнения на указанном промежутке:

8.481. $\cos 3x=\sin 2x,\quad 75^\circ<x<150^\circ$

8.482. $\sin 2x+\cos 3x=0,\quad 0^\circ<x<90^\circ$

8.483. $\cos 4x=\sin 2x,\quad 0^\circ<x<60^\circ$

8.484. $\sin 6x=\cos 4x,\quad 0^\circ<x<90^\circ$

8.485. $\cos 4x+\sin 2x=0,\quad 90^\circ<x<180^\circ$

8.486. $\sin 5x+\cos 4x=0,\quad 270^\circ<x<360^\circ$

8.487. $\sin 5x=\cos 4x,\quad 360^\circ<x<420^\circ$

8.488. $\cos 6x=\sin 3x,\quad 90^\circ<x<180^\circ$

8.489. $\cos 6x+\sin 3x=0,\quad 0^\circ<x<45^\circ$

8.490. $\sin 8x+\cos 2x=0,\quad 0^\circ<x<45^\circ$

Сложность «2»

В задачах **8.491—8.500** найти решение уравнения на указанном промежутке:

8.491. $\cos(2x - 630^\circ) = \sin(4x + 540^\circ)$, $90^\circ < x < 180^\circ$

8.492. $\sin(3x - 450^\circ) = \sin(6x - 540^\circ)$, $0^\circ < x < 45^\circ$

8.493. $\cos(x + 360^\circ) = \cos(2x - 270^\circ)$, $270^\circ < x < 360^\circ$

8.494. $\sin(x - 450^\circ) = \cos(3x - 180^\circ)$, $0^\circ < x < 180^\circ$

8.495. $\sin(x + 270^\circ) = \cos(3x + 720^\circ)$, $40^\circ < x < 90^\circ$

8.496. $\cos(5x + 180^\circ) = \sin(4x + 630^\circ)$, $0^\circ < x < 90^\circ$

8.497. $\sin(9x - 810^\circ) = \cos(3x + 360^\circ)$, $0^\circ < x < 45^\circ$

8.498. $\cos(4x - 180^\circ) = \sin(2x + 90^\circ)$, $180^\circ < x < 270^\circ$

8.499. $\cos(4x + 90^\circ) = \cos(6x + 450^\circ)$, $0^\circ < x < 90^\circ$

8.500. $\sin(x + 720^\circ) = \cos(2x + 90^\circ)$, $180^\circ < x < 360^\circ$

Сложность «2»

В задачах **8.501—8.510** найти решение уравнения на указанном промежутке:

8.501. $\dfrac{\sin 6x}{\sin 4x} = 1$, $170^\circ < x < 200^\circ$

8.502. $\dfrac{\cos 3x}{\sin 2x} = 1$, $180^\circ < x < 280^\circ$

8.503. $\dfrac{\sin 4x}{\cos 5x} = -1$, $80^\circ < x < 180^\circ$

8.504. $\dfrac{\sin 2x}{\sin 7x} = 1$, $150^\circ < x < 240^\circ$

8.505. $\dfrac{\cos 7x}{\sin 2x} = 1$, $70^\circ < x < 150^\circ$

8.506. $\dfrac{\sin 2x}{\cos 3x} = 1$, $0^\circ < x < 180^\circ$

8.507. $\dfrac{\sin 24x}{\cos 6x} = 1$, $10^\circ < x < 30^\circ$

8.508. $\dfrac{\cos 7x}{\sin 2x} = 1$, $80^\circ < x < 140^\circ$

8.509. $\dfrac{\cos 5x}{\sin 4x} = -1$, $80^\circ < x < 120^\circ$

8.510. $\dfrac{\cos 7x}{\cos 3x} = 1$, $75^\circ < x < 150^\circ$

Сложность «2»

В задачах **8.511—8.520** решить уравнение:

8.511. $\sin x + \sin 5x = 2\cos 2x$

8.512. $\cos 5x + \cos x = -2\cos 3x$

8.513. $\sin 3x - \sin 7x = \sqrt{3}\sin 2x$

8.514. $\cos 3x - \cos 7x = \sin 5x$

8.515. $\sin x - \sqrt{2}\sin 3x + \sin 5x = 0$

8.516. $\sin 3x - \sqrt{3}\cos 2x - \sin x = 0$

8.517. $\cos 3x + \sin 2x - \cos x = 0$

8.518. $\cos x - 2\cos 3x + \cos 5x = 0$

8.519. $\sin 5x = \sin x + \sin 2x$

8.520. $\cos x = \cos 3x + 2\sin 2x$

Сложность «2»

В задачах **8.521—8.530** решить уравнения:

8.521. $\cos(70^\circ + x)\cos(20^\circ - x) = \frac{1}{2}$

8.522. $2\sin(40^\circ + x)\sin(50^\circ - x) = -1$

8.523. $\sin(30^\circ - x)\cos(60^\circ + x) = 1$

8.524. $\cos(20^\circ + x) + \cos(100^\circ - x) = \frac{1}{2}$

8.525. $\cos(75^\circ + x) + \cos(15^\circ + x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

8.526. $\sin(20^\circ + x) + \sin(100^\circ - x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

8.527. $\sin(75^\circ + x) + \sin(15^\circ + x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

8.528. $\cos(110^\circ + x) - \cos(20^\circ + x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

8.529. $\sin(110^\circ + x) - \sin(20^\circ + x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

8.530. $\cos(170^\circ + x) - \cos(50^\circ + x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Сложность «2»

В задачах **8.531—8.540** решить уравнение:

8.531. $\cos 5x - \sin 5x = \sin 7x - \cos 7x$

8.532. $\sin x + \sin 2x + \sin 3x + \sin 4x = 0$

8.533. $\sin x \cos 5x = \sin 9x \cos 3x$

8.534. $\sin 7x + \sin 9x = 2\left(\cos^2\left(\frac{\pi}{4} - x\right) - \cos^2\left(\frac{\pi}{4} + 2x\right)\right)$

8.535. $\sin x \sin 3x + \sin 4x \sin 8x = 0$

8.536. $\cos 9x - \cos 7x + \cos 3x - \cos x = 0$

8.537. $\cos 3x \cos 6x = \cos x \cos 4x$

8.538. $\sin 3x \sin 9x = \sin 5x \sin 7x$

8.539. $\cos 10x \cos 6x = \cos^2 8x$

8.540. $\sin 7x + \cos^2 2x = \sin^2 2x + \sin x$

Сложность «3»

В задачах **8.541—8.550** решить уравнение:

8.541. $\sqrt{5-2\sin x}=6\sin x-1$

8.542. $\sqrt{7-18\,\mathrm{tg}x}=6\,\mathrm{tg}x+11$

8.543. $\sqrt{10-18\cos x}=6\cos x-2$

8.544. $\sqrt{25-16\,\mathrm{ctg}x}=8\,\mathrm{ctg}x-5$

8.545. $2\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{1+8\sin\frac{x}{3}\cos^2\frac{x}{3}}$

8.546. $\sqrt{3}\cos\frac{x}{4}=\sqrt{\frac{3}{4}+6\sin^2\frac{x}{6}\sin\left(\frac{x}{6}+\frac{3\pi}{2}\right)}$

8.547. $\sqrt{1+4\cos^2\frac{x}{6}}=2\sin\frac{x}{6}+1$

8.548. $-\sqrt{45-48\sin^2\frac{x}{3}}=8\cos\frac{x}{3}+1$

8.549. $\sqrt{4-2\sin^2 x}=\sin x+2$

8.550. $\sqrt{1+4\cos^2\frac{x}{4}}=3\cos\frac{x}{4}+1$

Сложность «3»

В задачах **8.551—8.560** решить уравнение:

8.551. $\sin x-\cos x=\sqrt{\frac{3}{2}}$

8.552. $\sin 2x+\cos 2x=-1$

8.553. $\sin\frac{x}{6}+\sqrt{3}\cos\frac{x}{6}+1=0$

8.554. $\sqrt{3}\sin 3x+\cos 3x=1$

8.555. $\cos x+\sqrt{3}\sin x=\sqrt{2}$

8.556. $\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)-\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)\mathrm{tg}\frac{\pi}{6}=-\frac{1}{\sqrt{3}}$

8.557. $\cos\left(x-\frac{\pi}{18}\right)+\cos\left(\frac{5\pi}{9}-x\right)=-\sqrt{2}$

8.558. $2\sin x=\sqrt{6}+2\cos x$

8.559. $\sqrt{2}\sin x=2-\sqrt{2}\cos x$

8.560. $\sqrt{3}\sin 2x+\cos 2x=\sqrt{3}$

Сложность «3»

В задачах **8.561—8.570** решить уравнение:

8.561. $\sin x+\sin 2x=\cos x+2\cos^2 x$

8.562. $\sin 4x=\cos^4 x-\sin^4 x$

8.563. $(1+\cos 2x)\sin x=\cos^2 x$

8.564. $\sin x + \cos 2x = 1 + \sin x \cos 2x$

8.565. $\sin (x + 45^\circ) \sin (x - 15^\circ) = 0{,}5$

8.566. $\sin 3x = 2\sin x \cos 2x$

8.567. $\cos 3x + 2\cos x = 0$

8.568. $\sin 2x - 2\sin^2 x = 4\sin x - 4\cos x$

8.569. $2\operatorname{tg} x \cos x + 1 = 2\cos x + \operatorname{tg} x$

8.570. $2\sin x \cos x + \sqrt{3} - 2\cos x - \sqrt{3}\sin x = 0$

Сложность «3»

В задачах **8.571—8.580** решить уравнение:

8.571. $2\sin x \sin 8x = \cos 7x$

8.572. $2\sin 2x \cos x = \sin 3x$

8.573. $2\cos x \cos 4x = \cos 3x$

8.574. $\operatorname{tg} (60^\circ + x) + \operatorname{tg} x = 0$

8.575. $\operatorname{tg} (70^\circ + x) - \operatorname{tg} (20^\circ - x) = 0$

8.576. $\operatorname{ctg} (3x + 50^\circ) + \operatorname{ctg} (70^\circ + 3x) = 0$

8.577. $\cos (x - 120^\circ) + \cos (x + 30^\circ) = \cos (x - 45^\circ)$

8.578. $\sin (x + 60^\circ) + \sin (x + 30^\circ) = \sin (x + 45^\circ)$

8.579. $\cos (x - 60^\circ) - \cos (x - 30^\circ) = \sin (x - 45^\circ)$

8.580. $\sin (x - 30^\circ) - \sin (x + 120^\circ) = \cos (x + 45^\circ)$

Сложность «3»

В задачах **8.581—8.590** решить уравнение:

8.581. $\cos (2 (x + 60^\circ)) + 4\sin (x + 60^\circ) = 2{,}5$

8.582. $8 \cos^4 x = 11\cos 2x - 1$

8.583. $9\operatorname{ctg}^2 x + 4\sin^2 x = 6$

8.584. $2\cos^2 (2x + 60^\circ) - 3\sin^2 (x + 30^\circ) = 2$

8.585. $8\sin^4 x + 13\cos 2x = 7$

8.586. $2\operatorname{tg}^2 x + 4\cos^2 x = 7$

8.587. $2\cos^4 x + 1 = 3\cos 2x$

8.588. $\operatorname{ctg}^2 x - 8\sin^2 x = 1$

8.589. $4\sin^4 x + 7 \cos 2x = 1$

8.590. $3\operatorname{tg}^2 x - 8\cos^2 x + 1 = 0$

Сложность «3»

В задачах **8.591—8.600** решить уравнение:

8.591. $\sqrt{3}\cos 3x + \sin 3x = \cos x + \sqrt{3}\sin x$

8.592. $\sin 4x + \cos 4x = \sqrt{2}\sin x$

8.593. $2\cos 4x = \sqrt{2} (\cos x - \sin x)$

8.594. $2\sin 3x + \cos 5x = \sqrt{3}\sin 5x$

8.595. $\sqrt{2}\cos 2x=\cos\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2}$

8.596. $\sin\frac{3x}{2}-\sin\frac{7x}{2}=2\sqrt{3}\sin x\sin\frac{5x}{2}$

8.597. $\cos\frac{x}{2}=2\cos 2x+\sqrt{3}\sin\frac{x}{2}$

8.598. $\cos x-\cos\frac{3x}{2}=2\sqrt{3}\sin\frac{x}{4}\cos\frac{5x}{4}$

8.599. $\sqrt{3}\cos x-\sqrt{2}\cos 4x=\sqrt{2}\sin 4x-\sin x$

8.600. $\cos 2x-\cos 4x=2\sqrt{3}\sin x\cos 3x$

Сложность «3»

В задачах **8.601—8.610** решить уравнение:

8.601. $\sin^2 x+\sin^2 2x=\sin^2 3x+\sin^2 4x$

8.602. $\cos\frac{4x}{3}+\sin^2\frac{3x}{2}+2\sin^2\frac{5x}{6}=\cos^2\frac{3x}{2}$

8.603. $\sin^4 x+\cos^4 x=\frac{5}{8}$

8.604. $\cos^2 x+\cos^2 2x-\cos^2 3x-\cos^2 4x=0$

8.605. $\cos^2\frac{3x}{4}+\cos^2 x+\cos^2\frac{5x}{4}=\frac{3}{2}$

8.606. $\sin^2\frac{x}{3}+\sin^2\frac{4x}{9}=\sin^2\frac{5x}{9}+\sin^2\frac{2x}{3}$

8.607. $\cos^2\frac{x}{5}+\cos^2\frac{3x}{5}-\sin^2\frac{2x}{5}-\sin^2\frac{4x}{5}=0$

8.608. $\cos^2 x+\cos^2 2x=\sin^2 3x+\sin^2 4x$

8.609. $9\cos^4 x-\sin^4 x=2\sin^2 2x$

8.610. $5\sin^4 x-\cos^4 x=\sin^2 2x$

Сложность «3»

В задачах **8.611—8.620** решить уравнение:

8.611. $\sin x\cos x\cos 2x\cos 8x=\frac{1}{4}\sin 12x$

8.612. $4\cos x\cos 2x\cos 3x=\cos 6x$

8.613. $\sin x\cos x\cos 2x=\frac{1}{8}$

8.614. $\sin x\sin 2x\sin 3x=\frac{1}{4}\sin 4x$

8.615. $\cos x\cos 2x\cos 4x\cos 8x=\frac{1}{8}\cos 15x$

8.616. $4\sin\frac{x}{6}\sin\frac{5x}{12}\sin\frac{7x}{12}=\sin\frac{x}{3}$ **8.617.** $\cos x\cos\frac{5x}{3}\sin\frac{8x}{3}=\frac{1}{4}\sin 2x$

8.618. $\cos x\cos\frac{7x}{2}\sin\frac{9x}{2}=\frac{1}{4}\sin 7x$ **8.619.** $\sin x\cos 6x\cos 7x=\frac{1}{4}\sin 2x$

8.620. $\cos x\cos 2x\cos 4x\cos 8x=\frac{1}{16}$

Сложность «3»

В задачах **8.621—8.630** решить уравнение:

8.621. $\sin^2 x-\left(\sqrt{3}+1\right)\sin x\cos x+\sqrt{3}\cos^2 x=0$

8.622. $\sqrt{3}\sin^2 x-4\sin x\cos x+\sqrt{3}\cos^2 x=0$

8.623. $\sqrt{3}\sin^2 x+5\cos^2 x-\left(5\sqrt{3}+1\right)\sin x\cos x=0$

8.624. $\sin^2 x+\left(\sqrt{3}-1\right)\sin x\cos x-\sqrt{3}\cos^2 x=0$

8.625. $6\sin^2 x+\sin x\cos x-\cos^2 x=2$

8.626. $\sin^2 x-2\sin x\cos x=3\cos^2 x$

8.627. $2\sin^2 x+\sin x\cos x-3\cos^2 x=0$

8.628. $3\sin^2 x-4\sin x\cos x+5\cos^2 x=2$

8.629. $5\sin^2 x-3\sin x\cos x-2\cos^2 x=0$

8.630. $2\sin^2 x-5\sin x\cos x-\cos^2 x=-2$

Сложность «3»

В задачах **8.631—8.640** решить уравнение:

8.631. $\sin^3 x(1+\operatorname{ctg} x)+\cos^3 x(1+\operatorname{tg} x)=2\sqrt{\sin x\cos x}$

8.632. $\sin 2x+5(\sin x+\cos x)+1=0$

8.633. $\cos x+\sin x=\sqrt{1-2\cos^2 x}$

8.634. $1-\sin 2x=4(\cos x-\sin x)$

8.635. $1+\sin 2x=7(\sin x+\cos x)$

8.636. $5\sin 2x-12(\sin x+\cos x)+5=0$

8.637. $\operatorname{ctg} x-\operatorname{tg} x=\frac{4(\cos x-\sin x)}{\sin 2x}$

8.638. $\left(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{\cos x}\right)(\sin x+\cos x)+2=0$

8.639. $7+4\sin x\cos x+\frac{3}{2}(\operatorname{tg} x+\operatorname{ctg} x)=0$

8.640. $3+2\sin 2x=\operatorname{tg} x+\operatorname{ctg} x$

Сложность «3»

В задачах **8.641—8.650** решить уравнение:

8.641. $\sin 2x + \operatorname{tg} x = 2$

8.642. $\dfrac{\sin^2 x - 2}{\sin^2 x - 4\cos^2(x/2)} = \operatorname{tg}^2 \dfrac{x}{2}$

8.643. $1 - \cos \dfrac{x}{2} = \operatorname{tg} \dfrac{x}{4}$

8.644. $2\left(\operatorname{tg}\dfrac{x}{2} - 1\right) = \cos x$

8.645. $2\cos 2x + 2\operatorname{tg}^2 x = 5$

8.646. $\dfrac{1}{\sqrt{3} - \operatorname{tg} x} - \dfrac{1}{\sqrt{3} + \operatorname{tg} x} = \sin 2x$

8.647. $\dfrac{4\operatorname{ctg} x}{1 + \operatorname{ctg}^2 x} + \sin^2 2x + 1 = 0$

8.648. $1 + \cos x = \operatorname{ctg} \dfrac{x}{2}$

8.649. $2 + \cos x = 2\operatorname{tg} \dfrac{x}{2}$

8.650. $\dfrac{\sin x}{2 - \cos x} = 3\operatorname{tg} \dfrac{x}{2}$

Сложность «1»

В задачах **8.651—8.660** решить систему уравнений:

8.651. $\sin x \sin y = \dfrac{1}{2\sqrt{2}};\ xy = -\dfrac{\pi}{4}$

8.652. $\cos x + \cos y = 0;\ x - y = \dfrac{4\pi}{3}$

8.653. $\sin x \cos y = -\dfrac{1}{2};\ x + y = -\dfrac{\pi}{6}$

8.654. $\sin x + \sin y = 1;\ x + y = \dfrac{\pi}{3}$

8.655. $\cos x \cos y = \dfrac{\sqrt{3}}{4};\ x + y = -\dfrac{\pi}{6}$

8.656. $\sin x - \sin y = 1;\ x + y = \dfrac{2\pi}{3}$

8.657. $\sin x \sin y = \dfrac{1}{4};\ x + y = \dfrac{\pi}{3}$

8.658. $\cos x - \cos y = 0;\ x + y = \dfrac{5\pi}{3}$

8.659. $\sin x \cos y = -\dfrac{1}{2\sqrt{2}};\ x - y = -\dfrac{3\pi}{4}$

8.660. $\cos x \cos y = \dfrac{1}{2};\ x - y = \dfrac{\pi}{2}$

Сложность «1»

В задачах **8.661—8.670** решить систему уравнений:

8.661. $\sin x = 2\sin y,\ x - y = \dfrac{5\pi}{3}$

8.662. $\sin x = \sqrt{2}\cos y,\ x + y = \dfrac{3\pi}{4}$

8.663. $\cos x = 2\cos y,\ x - y = \frac{\pi}{3}$

8.664. $1{,}5\cos x - \sqrt{3}\sin y = 0,\ x + y = \frac{\pi}{3}$

8.665. $2\cos x - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin y = \frac{1}{2}\cos y,\ x + y = \frac{\pi}{3}$

8.666. $2\sin x + \frac{1}{2}\sin y = \frac{\sqrt{3}}{2}\cos y,\ x - y = \frac{2\pi}{3}$

8.667. $\cos x - \frac{\sqrt{2}}{2}\cos y = \frac{1}{\sqrt{6}}\cos y,\ x - y = \frac{\pi}{4}$

8.668. $\cos x + \frac{\sqrt{2}}{2}\sin y = \sqrt{\frac{3}{2}}\sin y,\ x + y = \frac{5\pi}{4}$

8.669. $\cos x = \cos\frac{3y}{2},\ 2x + 3y = \pi$

8.670. $\sin x = \sin\frac{2y}{3},\ 3x - 2y = 2\pi.$

Сложность «I»

В задачах **8.671—8.680** решить неравенство:

8.671. $\sin x > 0$

8.672. $\cos x < 0$

8.673. $\mathrm{tg}\, x > 0$

8.674. $\mathrm{ctg}\, x < 0$

8.675. $\sin x < 1$

8.676. $\cos x > -1$

8.677. $\mathrm{tg}\, x > 1$

8.678. $\mathrm{ctg}\, x < 1$

8.679. $\cos x < 1$

8.680. $\sin x > -1$

Сложность «I»

В задачах **8.681—8.690** решить неравенство:

8.681. $\cos x < -\frac{\sqrt{3}}{2}$

8.682. $\sin x > \frac{\sqrt{3}}{2}$

8.683. $\cos x > \frac{1}{2}$

8.684. $\sin x < -\frac{1}{2}$

8.685. $\mathrm{tg}\, x < 1$

8.686. $\mathrm{ctg}\, x > -1$

8.687. $\mathrm{tg}\, x > \sqrt{3}$

8.688. $0 < \sin x < \frac{1}{2}$

8.689. $-\frac{1}{2} < \cos x < 0$

8.690. $0 < \mathrm{tg} x < \frac{1}{\sqrt{3}}$

Раздел IX
ПЛАНИМЕТРИЯ

§ 27. УГЛЫ. ПРЯМЫЕ. ТРЕУГОЛЬНИКИ

1°. Два угла ($\angle AOB$ и $\angle BOC$) (рис. 1) называются *смежными*, если одна сторона у них общая, а две другие стороны составляют продолжение одна другой.

2°. *Медианой треугольника* называется отрезок, соединяющий вершину треугольника с серединой противоположной стороны. Отметим ее основные свойства:

1) медианы треугольника пересекаются в одной точке и делятся этой точкой в отношении 2 : 1, считая от вершины треугольника;

2) медиана делит треугольник на два равновеликих (т. е. имеющих равные площади) треугольника.

3°. Прямая OK, делящая угол AOB пополам (рис. 1), называется биссектрисой этого угла.

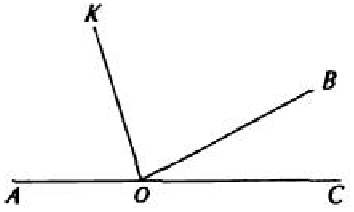


Рис. 1

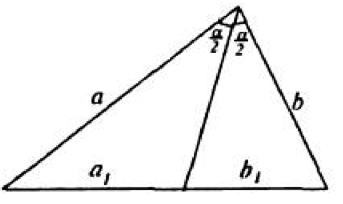


Рис 2

Биссектрисой треугольника называется отрезок биссектрисы внутреннего угла треугольника, заключенный между вершиной треугольника и точкой пересечения этой биссектрисы с противоположной стороной. Отметим ее основные свойства:

1) биссектриса треугольника есть геометрическое место точек, равноудаленных от сторон угла;

2) биссектриса треугольника делит его сторону на части, пропорциональные прилежащим к ней сторонам (рис. 2): $\frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1}$;

3) биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке, лежащей внутри треугольника и являющейся центром окружности, вписанной в треугольник.

4°. *Высотой треугольника* называется отрезок перпендикуляра, опущенного из вершины треугольника на противоположную сторону или на ее продолжение. Отметим ее основные свойства:

1) высота, проведенная из вершины равнобедренного треугольника, является также биссектрисой и медианой;

2) в равностороннем треугольнике высота, медиана и биссектриса, проведенные из одной вершины, совпадают; центр окружности вписанной в равносторонний треугольник, совпадает с центром окружности, описанной около треугольника.

5°. Теорема Пифагора. В *прямоугольном треугольнике катеты a, b и гипотенуза c связаны равенством:*

$$\boxed{c^2 = a^2 + b^2}$$

6°. Теорема о пропорциональных отрезках в прямоугольном треугольнике. *Катет есть среднее пропорциональное между гипотенузой и проекцией этого катета на гипотенузу. Высота прямоугольного треугольника, проведенная из вершины прямого угла, есть среднее пропорциональное между проекциями катетов на гипотенузу* (рис. 3):

$$\boxed{\frac{b_c}{b} = \frac{b}{c};\quad \frac{a_c}{a} = \frac{a}{c};\quad h^2 = a_c b_c;\quad \frac{b_c}{a_c} = \left(\frac{b}{a}\right)^2}$$

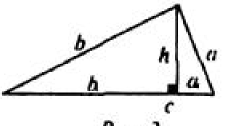


Рис. 3

7°. Центр окружности, описанной около прямоугольного треугольника, лежит на середине гипотенузы; радиус описанной окружности равен медиане, проведенной из вершины прямого угла (а также половине гипотенузы).

8°. Теорема синусов:

$$\boxed{\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R}$$

9°. Теорема косинусов:

$$\boxed{\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha \\ b^2 &= a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta \\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma \end{aligned}}$$

10°. Формулы для вычисления площади треугольника:

$$S = \frac{1}{2}ah_a = \frac{1}{2}bh_b = \frac{1}{2}ch_c;$$

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \text{ (формула Герона)};$$

$$S = \frac{1}{2}ab\sin\gamma;\quad S = \frac{abc}{4R};\quad S = pr$$

Для равностороннего треугольника $\boxed{S=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}}$

Для прямоугольного треугольника (рис. 3) $\boxed{r=\frac{a+b-c}{2}}$

Здесь a, b, c — стороны треугольника; h_a, h_b, h_c — высоты треугольника, опущенные соответственно на стороны a, b, c; α, β, γ — внутренние углы треугольника, лежащие соответственно против сторон a, b, c; $p=\frac{1}{2}(a+b+c)$ — полупериметр; R — радиус окружности, описанной около треугольника; r — радиус окружности, вписанной в треугольник.

Сложность «0»

9.001. Углы CAB и BAD — смежные. Определить величину угла между перпендикуляром AK, проведенном из точки A к прямой CD, и биссектрисой угла CAB, если $\angle CAB - \angle BAD = 20°$ (точки K и B лежат по одну сторону от CD).

9.002. Углы ABC и CBD — смежные, причем первый из них в 4 раза больше второго. Определить величину угла между перпендикуляром, проведенным из точки B к прямой BC, и биссектрисой угла CBD.

9.003. Угол ABC на 16° больше угла CBD, смежного с ним. Найти угол между перпендикуляром, проведенным из точки B к прямой AD, и биссектрисой угла CBD.

9.004. Углы CAB и BAD — смежные. Определить величину острого угла между перпендикулярами, проведенными из точки A к прямым AB и CD, если $\angle BAD - \angle CAB = 24°$.

9.005. Углы CAB и BAD — смежные. Найти величину угла BAD, если величина угла между биссектрисой угла CAB и перпендикуляром, проведенным из точки A к прямой CD, равна 12°.

9.006. Найти величину угла, если она в 4 раза меньше суммы величин двух углов, смежных с ним.

9.007. Найти величину внутреннего угла треугольника, если сумма величин двух внешних углов, не смежных с данным, равна 237°.

9.008. Найти величину угла, если она в сумме с величинами двух углов, смежных с ним, равна 192°.

9.009. Через вершину угла ABC проведена прямая BD перпендикулярно биссектрисе этого угла. Найти величину угла ABC, если прямая BD образует с одной из сторон угла ABC угол, величина которого равна 156°.

9.010. Биссектриса внешнего угла равнобедренного треугольника ABC при основании AC образует с основанием угол, величина которого равна 126°. Найти величину угла ABC.

Сложность «0»

9.011. В треугольнике один из внутренних углов равен 30°, а второй угол больше третьего в 2 раза. Найти меньший из неизвестных углов.

9.012. В треугольнике сумма двух равных внутренних углов больше третьего на 10°. Найти больший угол.

9.013. В треугольнике сумма двух равных внутренних углов в 1,5 раза больше третьего. Найти больший угол.

9.014. В прямоугольном треугольнике один из острых углов вдвое больше другого. Найти эти углы.

9.015. В равнобедренном треугольнике разность двух неравных внутренних углов равна 90°. Найти больший угол.

9.016. Внутренние углы треугольника относятся как 1 : 2 : 3. Найти меньший угол.

9.017. В треугольнике один из внутренних углов равен 60°, а два других относятся как 2 : 3. Найти больший угол.

9.018. В треугольнике один из внешних углов равен 150°, а два внутренние, не смежные с ним, равны между собой. Найти меньший угол.

9.019. В треугольнике внутренние углы относятся как 2 : 3 : 5. Найти внешний угол треугольника, смежный с меньшим внутренним углом.

9.020. В треугольнике один из внутренних углов равен 50°, а разность двух других равна 10°. Найти внешний угол треугольника, смежный с большим внутренним углом.

Сложность «0»

9.021. Найти основание равнобедренного треугольника, если его боковая сторона равна 23, а периметр равен 71.

9.022. Периметр треугольника равен 156. Найти периметр треугольника, вершинами которого служат середины сторон данного треугольника.

9.023. Найти сумму катетов прямоугольного треугольника, если расстояния от середины гипотенузы до катетов равны 26 и 33.

9.024. Найти боковую сторону равнобедренного треугольника, если его основание равно 17, а периметр равен 93.

9.025. Найти среднюю линию равнобедренного треугольника, параллельную его основанию, если боковая сторона равна 16, а периметр равен 57.

9.026. Найти сумму боковых сторон равнобедренного треугольника с углом 120° при вершине, если его высота равна 19,5.

9.027. В равностороннем треугольнике со стороной 10 найти периметр треугольника, стороны которого соединяют основания высот.

9.028. В равнобедренном треугольнике ABC $(AB = BC)$ проведена высота BM. Найти ее длину, если периметр треугольника ABC равен 70, а периметр треугольника ABM равен 50.

9.029. Периметр равнобедренного треугольника равен 7, а сумма его боковых сторон в 2,5 раза больше основания. Найти длину боковой стороны.

9.030. В равнобедренном треугольнике основание относится к боковой стороне как 4 : 3. Найти длину основания, если периметр треугольника равен 20.

Сложность «0»

В задачах **9.031—9.040** найти третью сторону прямоугольного треугольника, если даны две другие его стороны:

9.031. $2\sqrt{5}$ и 4

9.032. 5 и 4

9.033. 12 и 13

9.034. $4\sqrt{2}$ и 7

9.035. 8 и 6

9.036. $6\sqrt{3}$ и 12

9.037. 3 и 6

9.038. $\sqrt{13}$ и 7

9.039. 5 и 12

9.040. 5 и 6

Сложность «0»

9.041. Найти площадь прямоугольного треугольника с катетом 2,5 и гипотенузой $\frac{\sqrt{281}}{2}$.

9.042. Высота равностороннего треугольника равна $7\cdot\left(\sqrt[4]{3}\right)$. Найти площадь треугольника.

9.043. Найти площадь равнобедренного треугольника, если его высота равна $\frac{5\left(\sqrt[4]{3}\right)}{2}$, а угол при вершине равен 120°.

9.044. Гипотенуза равнобедренного прямоугольного треугольника равна $3\sqrt{3}$. Найти площадь треугольника.

9.045. Острый угол прямоугольного треугольника равен 30°, а гипотенуза равна $5\cdot\left(\sqrt[4]{3}\right)$. Найти площадь треугольника.

9.046. В прямоугольном треугольнике катет, лежащий против угла 60°, равен $\frac{5}{2}\cdot\left(\sqrt[4]{3}\right)$. Найти площадь треугольника.

9.047. Высота равнобедренного треугольника равна 10, а боковая сторона равна $\frac{\sqrt{481}}{2}$. Найти площадь треугольника.

9.048. Найти площадь треугольника, две стороны которого равны 12 и 14, а угол между ними равен 30°.

9.049. Площадь равнобедренного прямоугольного треугольника равна 36. Найти длину гипотенузы.

9.050. В равнобедренном треугольнике угол при основании равен 30°, а боковая сторона равна $\sqrt[4]{3}$. Найти площадь треугольника.

Сложность «0»

9.051. Гипотенуза равнобедренного прямоугольного треугольника равна $2(\sqrt{2}-1)$. Найти его периметр.

9.052. В равнобедренном треугольнике боковая сторона равна 25, а высота равна 20. Найти периметр треугольника.

9.053. Катет прямоугольного треугольника больше другого катета на 10 и меньше гипотенузы на 10. Найти гипотенузу треугольника.

9.054. В равнобедренном треугольнике основание равно 30, а высота равна 20. Определить боковую сторону треугольника.

9.055. Периметр прямоугольного треугольника равен 40, а один из его катетов равен 8. Найти гипотенузу треугольника.

9.056. Катет прямоугольного треугольника меньше гипотенузы на 8, а другой катет равен 20. Найти периметр треугольника.

9.057. В равнобедренном треугольнике основание равно 30, а высота равна 20. Определить высоту, опущенную на боковую сторону.

9.058. В равнобедренном треугольнике угол при основании равен 45°, а основание длиннее высоты на $9\sqrt{2}$. Найти боковую сторону.

9.059. Сумма гипотенузы и катета прямоугольного треугольника равна 9, а их разность равна 4. Найти другой катет.

9.060. Периметр равнобедренного прямоугольного треугольника равен $3(\sqrt{2}+1)$. Найти его гипотенузу.

Сложность «1»

9.061. Гипотенуза прямоугольного треугольника в 3 раза больше меньшего из катетов. Найти медиану, проведенную к гипотенузе, если больший катет равен $4\sqrt{2}$.

9.062. Катет прямоугольного треугольника равен 4, а медиана треугольника, проведенная к гипотенузе, равна 2,5. Найти периметр треугольника.

9.063. Катеты прямоугольного треугольника равны 30 и 40. Определить медиану треугольника, проведенную к гипотенузе.

9.064. Периметр прямоугольного треугольника равен 17,5. Найти медиану, проведенную к гипотенузе, если один из катетов равен 5.

9.065. Сумма катетов прямоугольного треугольника равна 10,25, а медиана, проведенная к гипотенузе, равна 3,625. Найти больший катет.

9.066. В прямоугольном треугольнике гипотенуза больше одного из катетов на 2. Определить медиану, проведенную к гипотенузе, если другой катет равен 4.

9.067. Медиана прямоугольного треугольника, проведенная к гипотенузе, равна 25, а разность катетов равна 10. Определить больший катет.

9.068. Один из катетов прямоугольного треугольника равен 3, а медиана треугольника, проведенная к гипотенузе, равна 2,5. Определить гипотенузу и другой катет.

9.069. В прямоугольном треугольнике медиана, проведенная к гипотенузе, равна 6. Определить периметр треугольника, если отношение катетов равно $\frac{3}{4}$.

9.070. Медиана прямоугольного треугольника, проведенная к гипотенузе, равна 6,5. Определить катеты, если сумма гипотенузы и меньшего из катетов равна 18.

Сложность «I»

9.071. В треугольнике ABC проведена медиана AK, равная $\frac{13}{4}\sqrt{2}$ и составляющая со стороной AC угол 30°. Найти длину BC, если угол $BCA = 45°$.

9.072. Высота треугольника, опущенная на его основание, составляет с одной из боковых сторон угол 60°. Найти длину этой стороны, если длина ее проекции на то же основание равна $11\sqrt{3}$.

9.073. В треугольнике ABC величина угла при вершине C равна $\frac{\pi}{6}$. Определить синус угла при вершине B, если $AC = 12{,}3$ и $AB = 61{,}5$.

9.074. Медиана треугольника ABC, проведенная к стороне AB, составляет со стороной CB угол 60° и равна $\frac{\sqrt{6}}{10}$. Найти длину стороны AB, если она составляет со стороной CB угол 45°.

9.075. Определить синус угла при вершине A в треугольнике ABC, если $BC = 3\sqrt{3}$, $AC = 15$, а угол ABC равен 60°.

9.076. В треугольнике ABC угол A равен 30°, а угол B равен 45°. Найти длину BC, если $AC = 10\sqrt{2}$.

9.077. В треугольнике ABC величины углов при вершинах B и C соответственно равны $\frac{\pi}{3}$ и $\frac{\pi}{4}$. Найти длину стороны AC, если $AB = \frac{7}{2}\sqrt{6}$.

9.078. Найти величину угла в градусах при вершине C треугольника ABC, если $AB = 20$, $AC = 10\sqrt{6}$ и угол ABC равен 120°.

9.079. В треугольнике ABC величины углов при вершинах B и C соответственно равны 120° и 45°. Найти длину AB, если $AC = 15\sqrt{6}$.

9.080. В треугольнике ABC величины углов при вершинах A и B соответственно равны 45° и 30°. Найти длину стороны BC, если $AC = \frac{17}{4}\sqrt{2}$.

Сложность «I»

9.081. В треугольнике ABC сторона $BC = 2\sqrt{6}$, прилежащие к ней углы $B = 30°$, $C = 45°$. Найти биссектрису угла B.

9.082. В треугольнике ABC дано: $AB = 2{,}5$; $AC = 8$; косинус угла A равен $\frac{5}{16}$. Найти длину медианы, проведенной из вершины B.

9.083. Косинус угла при вершине равнобедренного треугольника равен $\left(-\frac{1}{15}\right)$. Найти боковую сторону треугольника, если его основание равно $\sqrt{7{,}5}$.

9.084. Две стороны треугольника равны 8 и 10, а косинус угла между ними равен $\frac{43}{160}$. Найти третью сторону.

9.085. Найти основание равнобедренного треугольника, у которого боковая сторона равна 19, а косинус угла при вершине равен $\frac{7}{8}$.

9.086. В треугольнике разность углов A и B равна 90°. Противолежащие им стороны равны 10 и 5. Найти тангенс угла B.

9.087. В треугольнике ABC сторона BC равна 6, а сторона AC равна 4. Найти косинус угла B, если угол A вдвое больше угла B.

9.088. Найти высоту равнобедренного треугольника, боковая сторона которого равна 5, а косинус угла при вершине равен $\left(-\frac{7}{25}\right)$.

9.089. Найти косинус угла при вершине A треугольника ABC, если $AB = 30$, $AC = 8$ и $CE = 11$, где CE — медиана.

9.090. В треугольнике ABC угол B равен 105°, угол C равен 15°. Найти высоту треугольника, опущенную из вершины B, если длина стороны AB равна $\sqrt{3}$.

Сложность «1»

9.091. Катеты прямоугольного треугольника относятся как 5 : 6, а гипотенуза равна 122. Найти длины проекций катетов на гипотенузу.

9.092. Площадь прямоугольного треугольника равна 150, а один из катетов равен 15. Найти длину высоты, опущенной из вершины прямого угла.

9.093. Высота прямоугольного треугольника, проведенная из вершины прямого угла к гипотенузе, равна $2\sqrt{5}$. Найти гипотенузу, если один из катетов равен 6.

9.094. Из вершины прямого угла A прямоугольного треугольника к гипотенузе проведены медиана AM и высота AK. Найти длину отрезка MK, если катеты равны 6 и $3\sqrt{5}$.

9.095. Найти проекцию большего катета на гипотенузу, если меньший катет равен $\sqrt{65}$, а длина высоты, опущенной из вершины прямого угла на гипотенузу, равна $2\sqrt{10}$.

9.096. Катеты прямоугольного треугольника относятся как 1:3. Найти высоту треугольника, опущенную из вершины прямого угла, если гипотенуза равна 40.

9.097. Катеты прямоугольного треугольника равны $2\sqrt{21}$ и $4\sqrt{7}$. Найти отрезки, на которые делится гипотенуза высотой, проведенной из вершины прямого угла.

9.098. В прямоугольном треугольнике из вершины прямого угла опущена высота на гипотенузу. Найти длины отрезков, на которые делится гипотенуза, если ее длина равна 17, а длина высоты равна 4.

9.099. Найти площадь прямоугольного треугольника, если высота, опущенная на гипотенузу, равна 12, а один из катетов равен 15.

9.100. В прямоугольном треугольнике катеты относятся как 3 : 2, а высота делит гипотенузу на отрезки, один из которых на 2 больше другого. Найти длину гипотенузы.

Сложность «2»

9.101. Высота треугольника равна $\sqrt{8}$. Прямая, параллельная основанию треугольника, отсекает от него меньший треугольник, площадь которого равна половине площади данного треугольника. Найти высоту меньшего треугольника.

9.102. В прямоугольный треугольник, катеты которого равны 10 и 15, вписан квадрат, имеющий с ним один общий угол. Найти периметр квадрата.

9.103. В треугольнике ABC дано: $AB = 3$, $AC = 5$ и $BC = 6$. Найти расстояние от вершины C до высоты, опущенной из вершины B на сторону AC.

9.104. В равнобедренный треугольник с углом 45° при основании вписан квадрат так, что одна из его сторон лежит на основании треугольника. Найти площадь квадрата, если площадь треугольника равна 18.

9.105. В прямоугольном треугольнике длины медиан острых углов равны 11 и 7. Вычислить площадь квадрата, сторона которого равна гипотенузе данного треугольника.

9.106. Основание треугольника равно $\sqrt{98}$. Определить длину отрезка прямой, параллельной основанию и делящей площадь треугольника пополам.

9.107. В треугольнике ABC дано: $AB = 2$, $AC = 5$ и $BC = 4$. Найти площадь квадрата со стороной, равной высоте треугольника, опущенной из вершины B на сторону AC.

9.108. В равносторонний треугольник вписан квадрат так, что одна из его сторон лежит на основании треугольника. Найти площадь треугольника, если сторона квадрата равна $\left(2-\sqrt{3}\right)\left(\sqrt[4]{3}\right)$.

9.109. Основание равнобедренного треугольника равно $\sqrt{24}$. Прямая, параллельная основанию, делит площадь треугольника пополам. Найти длину отрезка, который эта прямая отсекает от боковой стороны (считая от вершины), если угол при основании равен 30°.

9.110. Длины сторон треугольника равны 5, $\sqrt{73}$ и 12. Вычислить абсолютную величину разности длин отрезков, на которые высота делит сторону длиной 12.

§ 28. ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНИКИ И МНОГОУГОЛЬНИКИ

1°. Параллелограмм. Четырехугольник, у которого противоположные стороны попарно параллельны, называется *параллелограммом*. Параллелограмм обладает следующими основными свойствами:

1) *противоположные стороны параллелограмма равны;*

2) *противоположные углы параллелограмма равны;*

3) *диагонали параллелограмма делятся точкой пересечения пополам;*

4) *сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов всех его сторон.*

Площадь параллелограмма вычисляется по формулам

$$\boxed{S = ah_a,\ S = ab\sin\alpha,}$$

где a, b — стороны параллелограмма, h_a — высота параллелограмма, опущенная на сторону a, α — угол, образованный сторонами a и b параллелограмма.

2°. Ромб. Параллелограмм, все стороны которого равны, называется ромбом. Ромб, как параллелограмм специального вида, обладает всеми свойствами параллелограмма. Кроме того, ромб обладает следующими специальными свойствами:

1) *диагонали ромба взаимно перпендикулярны;*

2) *диагонали ромба являются биссектрисами его внутренних углов.*

Площадь ромба вычисляется по тем же формулам, что и площадь параллелограмма. Кроме того, площадь ромба можно вычислить по формуле:

$$\boxed{S = \frac{1}{2}d_1d_2,}$$

где d_1 и d_2 — диагонали ромба.

3°. Прямоугольник и квадрат. Параллелограмм, у которого все углы прямые, называется *прямоугольником*. Площадь прямоугольника вычисляется по формуле:

$$\boxed{S = ab,}$$

где a и b — смежные стороны прямоугольника.

Прямоугольник, у которого все стороны равны, называется *квадратом*. Квадрат обладает всеми свойствами параллелограмма, ромба и прямоугольника. Площадь квадрата вычисляется по формуле:

$$\boxed{S = a^2,}$$

где a — сторона квадрата.

4°. Трапеция. Четырехугольник, две стороны которого параллельны, а две другие не параллельны, называется *трапецией*. Площадь трапеции с основаниями a и b и высотой h вычисляется по формуле:

$$\boxed{S = \frac{a+b}{2}\,h}$$

Отрезок, соединяющий середины боковых сторон трапеции, называется *средней линией* трапеции. Средняя линия трапеции обладает следующими свойствами:

1) *средняя линия трапеции параллельна основаниям и равна их полусумме;*

2) *средняя линия делит высоту трапеции на два равных отрезка.*

5°. Многоугольники. Сумма углов выпуклого многоугольника, имеющего n сторон, равна $180°(n-2)$.

Сложность «0»

9.111. Одна из сторон параллелограмма равна 21, а периметр равен 123. Найти длину стороны параллелограмма, смежной с данной.

9.112. Диагональ ромба, лежащая против угла 60°, равна 11,2. Найти периметр ромба.

9.113. В прямоугольнике меньшая сторона равна $\frac{17}{2}\sqrt{3}$ и вдвое меньше диагонали. Найти большую сторону прямоугольника.

9.114. В равнобочной трапеции меньшее основание равно боковой стороне и равно 24. Найти большее основание трапеции, если ее периметр равен 141.

9.115. Найти площадь квадрата, диагональ которого равна $2\sqrt{17}$.

9.116. Найти площадь прямоугольника, если его диагональ равна $3\sqrt{41}$, а одна из его сторон равна 15.

9.117. Найти диагональ квадрата, если его площадь равна 420,5.

9.118. В равнобочной трапеции боковая сторона равна средней линии, а периметр равен 48. Определить боковую сторону трапеции.

9.119. Высоты параллелограмма равны 4 и 8. Бóльшая высота опущена на сторону, равную 6. Найти другую сторону параллелограмма.

9.120. Чему равна площадь ромба, диагонали которого равны 10 и 7?

Сложность «0»

9.121. Одна из диагоналей параллелограмма, равная $\frac{9}{2}\sqrt{6}$, составляет с основанием угол 60°. Найти длину второй диагонали, если она составляет с тем же основанием угол 45°.

9.122. В параллелограмме одна из сторон равна $2\sqrt{3}$, а диагональ равна 8. Найти синус угла между диагоналями, если другая диагональ составляет с заданной стороной угол 60°.

9.123. Сторона ромба равна $3\sqrt{5}$. Найти косинус острого угла ромба, если его меньшая диагональ равна 3.

9.124. Стороны параллелограмма равны 4 и 7,5, а косинус угла между ними равен $\frac{29}{48}$. Найти длину меньшей диагонали.

9.125. Диагонали параллелограмма, длины которых равны 30 и 16, образуют угол, косинус которого равен 0,7. Найти длину стороны параллелограмма, лежащей против этого угла.

9.126. Диагональ ромба равна $\frac{45}{2}\sqrt{7}$, а косинус противолежащего ей угла равен $(-\frac{2}{7})$. Найти сторону ромба.

9.127. В прямоугольнике диагональ равна $2\cdot\left(\sqrt[4]{3}\right)$, а тупой угол между диагоналями равен 120°. Найти площадь прямоугольника.

9.128. Периметр прямоугольника равен $2\sqrt{3}+2$, а острый угол между диагоналями равен 60°. Найти диагональ прямоугольника.

9.129. Стороны параллелограмма равны 4 и 6. Косинус одного из его углов равен $\frac{1}{3}$. Найти диагональ параллелограмма, противолежащую этому углу.

9.130. Найти площадь параллелограмма, если известны его диагонали, равные 8 и $4\sqrt{3}$, и острый угол 60° между ними.

Сложность «0»

9.131. Внутренние углы выпуклого четырехугольника относятся как 2 : 2,5 : 9,5 : 10. Найти меньший угол.

9.132. В выпуклом четырехугольнике два угла — прямые, разность двух других равна 10°. Найти меньший угол.

9.133. Определить меньший внутренний угол выпуклого пятиугольника, зная, что величины их относятся как 1 : 1,5 : 2 : 2,5 : 3.

9.134. Сколько сторон имеет выпуклый многоугольник, если сумма его внутренних углов равна 4320°?

9.135. В выпуклом пятиугольнике два внутренних угла — прямые, а остальные относятся между собой как 3 : 4 : 5. Найти больший угол.

9.136. В выпуклом четырехугольнике сумма двух внутренних углов равна 110°, а разность двух других равна 20°. Найти бóльший угол.

9.137. В выпуклом пятиугольнике сумма двух внутренних углов равна $120°$, остальные углы относятся между собой как 6:7:8. Найти больший угол.

9.138. В выпуклом пятиугольнике сумма трех равных внутренних углов равна $300°$, разность двух других равна $10°$. Найти больший угол.

9.139. Один из внутренних углов выпуклого четырехугольника равен $60°$, а остальные относятся между собой как 1:2:3. Найти больший угол.

9.140. В выпуклом пятиугольнике один внутренний угол — прямой, а остальные относятся между собой как 1 : 2 : 2,5 : 4,5. Найти меньший угол.

Сложность «I»

9.141. Параллелограмм, длина основания которого равна $\sqrt{3}$, равновелик равностороннему треугольнику со стороной $3\sqrt{2}$. Найти высоту параллелограмма.

9.142. Трапеция, высота которой равна $5\sqrt{3}$, равновелика равностороннему треугольнику с высотой $2\sqrt{3}$. Найти среднюю линию трапеции.

9.143. Ромб, длина диагонали которого равна 1,25, равновелик равнобедренному треугольнику с боковой стороной 13 и основанием 10. Найти длину второй диагонали ромба.

9.144. Трапеция, средняя линия которой равна $\frac{\sqrt{3}}{3}$, равновелика равностороннему треугольнику со стороной 11. Найти высоту трапеции.

9.145. Ромб с диагоналями 4 и 3,5 равновелик треугольнику, высота которого равна $\frac{5}{7}$. Найти основание треугольника.

9.146. Параллелограмм, высота которого равна $5\sqrt{6}$, равновелик равнобедренному треугольнику с боковой стороной 7 и высотой 5. Найти длину основания параллелограмма.

9.147. Ромб, у которого одна диагональ равна боковой стороне, равновелик равнобедренному прямоугольному треугольнику с гипотенузой $7\frac{\sqrt[4]{3}}{\sqrt{2}}$. Найти длину стороны ромба.

9.148. Ромб с диагоналями 6 и 4,8 равновелик равнобедренному треугольнику, у которого высота равна основанию. Найти боковую сторону треугольника.

9.149. Параллелограмм с высотой 0,75 и основанием 6,75 равновелик равнобедренному прямоугольному треугольнику. Найти длину гипотенузы треугольника.

9.150. Квадрат равновелик равнобедренному треугольнику, у которого боковая сторона вдвое больше высоты. Найти длину диагонали квадрата, если основание треугольника равно $2\sqrt{18\sqrt{3}}$.

Сложность «I»

9.151. В прямоугольный треугольник с углом 60° вписан ромб так, что этот угол у них общий и все вершины ромба лежат на сторонах треугольника. Найти длину большего катета, если длина стороны ромба равна $\frac{\sqrt{12}}{5}$.

9.152. В равнобедренный прямоугольный треугольник вписан квадрат так, что две его вершины лежат на гипотенузе, а две другие — на катетах. Найти длину катета, если длина стороны квадрата равна $\frac{3}{4}\sqrt{2}$.

9.153. В прямоугольный треугольник с углом 30° вписан ромб так, что этот угол у них общий и все вершины ромба лежат на сторонах треугольника. Найти длину гипотенузы треугольника, если длина стороны ромба равна $12\sqrt{3}-18$.

9.154. В равнобедренный прямоугольный треугольник вписан ромб так, что один острый угол у них общий и все вершины ромба лежат на сторонах треугольника. Найти длину стороны ромба, если длина катета равна $\frac{2+\sqrt{2}}{5}$.

9.155. В прямоугольный треугольник с углом 60° вписан квадрат так, что прямой угол у них общий и все вершины квадрата лежат на сторонах треугольника. Найти длину бо́льшего катета, если длина стороны квадрата равна $3,5\cdot\left(\sqrt{3}-1\right)$.

9.156. В прямоугольный треугольник с углом 30° вписан квадрат так, что две его вершины лежат на гипотенузе, а две другие — на катетах. Найти длину большего катета, если длина стороны квадрата равна $12-\sqrt{27}$.

9.157. В прямоугольный треугольник с углом 60° вписан ромб так, что этот угол у них общий и все вершины ромба лежат на сторонах треугольника. Найти длину стороны ромба, если длина большего катета равна $9\sqrt{3}$.

9.158. В равнобедренный прямоугольный треугольник вписан квадрат так, что две его вершины лежат на гипотенузе, а две другие — на катетах. Найти длину стороны квадрата, если длина катета равна $18\sqrt{2}$.

9.159. В прямоугольный треугольник с углом 30° вписан ромб так, что этот угол у них общий и все вершины ромба лежат на сторонах треугольника. Найти длину стороны ромба, если длина большего катета равна $9\,(\sqrt{3}+2)$.

9.160. В равнобедренный прямоугольный треугольник вписан ромб так, что острый угол у них общий и все вершины ромба лежат на сторонах треугольника. Найти длину гипотенузы, если длина стороны ромба равна $0,6\cdot\left(\sqrt{2}-1\right)$.

Сложность «I»

9.161. Диагональ прямоугольной трапеции, равная $\frac{2\sqrt{2}-1}{8}$, делит трапецию на два равнобедренных прямоугольных треугольника. Найти периметр трапеции.

9.162. Вычислить площадь прямоугольной трапеции, если ее острый угол равен 60°, меньшее основание равно $\sqrt[4]{3}$ и большая боковая сторона равна $2 \cdot \left(\sqrt[4]{3}\right)$.

9.163. Найти периметр равнобочной трапеции, если ее основания относятся как 1:3, а высота равна меньшему основанию и равна $\frac{3\left(2-\sqrt{2}\right)}{5}$.

9.164. В равнобочной трапеции меньшее основание равно боковой стороне, а угол при основании равен 45°. Найти площадь трапеции, если ее высота равна $\frac{17\sqrt{\sqrt{2}-1}}{2}$.

9.165. В трапеции, площадь которой равна 161, высота равна 7, а разность параллельных сторон равна 11, найти длину большего основания.

9.166. Основания равнобочной трапеции равны 13 и 17. Найти площадь трапеции, если ее диагонали взаимно перпендикулярны.

9.167. В прямоугольной трапеции боковая сторона равна меньшему основанию и составляет с ним угол 120°. Найти периметр трапеции, если ее высота равна $27(7\sqrt{3}-3)$.

9.168. В прямоугольной трапеции боковая сторона равна меньшему основанию и составляет с ним угол 120°. Найти площадь трапеции, если ее меньшее основание равно $2\left(\sqrt[4]{3}\right)$.

9.169. В равнобочной трапеции боковая сторона равна основанию. Найти периметр трапеции, если угол при основании равен 60°, а высота равна $18\sqrt{3}$.

9.170. В равнобочной трапеции одно из оснований в 2 раза больше каждой из остальных сторон. Найти площадь трапеции, если ее высота равна $5 \cdot \left(\sqrt[4]{3}\right)$.

§ 29. ОКРУЖНОСТЬ И КРУГ. ВПИСАННЫЕ УГЛЫ

1°. Окружность и круг. *Окружностью* называется множество всех точек плоскости, находящихся на заданном расстоянии от некоторой данной точки плоскости, называемой центром окружности. Круг состоит из окружности и внутренних точек.

2°. Хорды и их свойства. Отрезок, соединяющий две точки окружности, называется *хордой*. Хорды обладают следующими свойствами:

1) диаметр, делящий хорду пополам, перпендикулярен этой хорде;

2) равные хорды окружности равноудалены от ее центра; равноудаленные от центра окружности хорды равны;

3) если через точку M, лежащую внутри окружности, проведены две хорды AB и CD (рис. 4), то произведения отрезков хорд равны:

$$AM \cdot MB = CM \cdot MD.$$

3°. Вписанный угол. Угол, образованный двумя хордами, исходящими из одной точки окружности, называется *вписанным*.

4°. Теорема о касательной и секущей. *Если из точки M, лежащей вне окружности* (рис. 5), *проведены касательная MC и секущая MAB, то*

$$MC^2 = MA \cdot MB.$$

5°. Формулы для вычисления длины окружности и площади круга:

длина окружности: $L = 2\pi R$;

площадь круга: $S = \pi R^2$;

длина дуги окружности: $l = R\alpha$;

площадь сектора круга: $S_{сект} = \frac{1}{2} R^2 \alpha$

Здесь R — радиус окружности; α — центральный угол (выраженный в радианах).

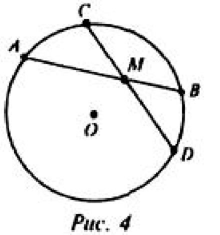


Рис. 4

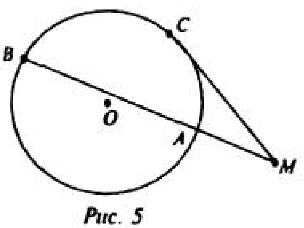


Рис. 5

Сложность «0»

9.171. Хорда делит окружность на части в отношении 5:7. Найти вписанный угол, опирающийся на меньшую из дуг, стягиваемых этой хордой.

9.172. Найти площадь сектора, если радиус круга равен 10, а центральный угол содержит 1,1 рад.

9.173. Вычислить углы, составленные касательной и хордой, если хорда делит окружность на две части, относящиеся как 3:7.

9.174. Определить площадь сектора, если его радиус равен 6, а центральный угол составляет 3 рад.

9.175. Вписанный в окружность угол опирается на дугу, длина которой равна 10. Чему равен этот угол, если радиус круга равен 5?

9.176. Вписанный угол на 20° меньше центрального угла, опирающегося на ту же дугу. Найти эти углы.

9.177. Секущая и касательная, выходящие из одной точки, соответственно равны 40 и 20. Секущая удалена от центра на 8. Определить радиус круга.

9.178. Вычислить вписанный угол, опирающийся на дугу, равную $\frac{1}{12}$ длины окружности.

9.179. Найти длину дуги сектора, если его площадь равна 15, а радиус круга равен 6.

9.180. Площадь сектора радиуса 12 равна 216. Определить его центральный угол.

Сложность «I»

9.181. Величина угла ABC, образованного хордами AB и BC, равна 60°. Найти величину дуги $\smile{AB}$ (в градусах), если $\smile{AB} = 2\smile{BC}$.

9.182. Хорда AB делит окружность на две дуги, одна из которых равна 80°, а другая делится хордой AC пополам. Найти величину угла BAC.

9.183. Определить угол между хордой AB и диаметром BC, если хорда AB стягивает дугу в 54°.

9.184. Хорды AB и AC стягивают дуги, величины которых соответственно равны 116° и 24°. Найти величину угла BAC, если хорды лежат по разные стороны от центра окружности.

9.185. Величина угла ABC, образованного хордами AB и BC, равна 96°. Найти величину дуги $\smile{AB}$ (в градусах), если $\smile{AB} = \smile{BC}$.

9.186. Окружность разделена в отношении 3 : 8 : 4, и точки деления соединены между собой хордами. Найти больший угол полученного треугольника.

9.187. Хорды AB и BC взаимно перпендикулярны. Найти величину угла BCA, если хорда BC стягивает дугу в 46°.

9.188. Хорды AB и BC стягивают дуги, величины которых соответственно равны 168° и 144°. Найти величину угла ABC, если хорды лежат по одну сторону от центра окружности.

9.189. Хорда делит окружность на две дуги, разность между величинами которых равна 40°. Найти величину бóльшего вписанного угла, опирающегося на эту хорду.

9.190. Величина угла между хордами AB и BC равна 164°. Найти величину центрального угла, опирающегося на хорду AB, если $\smile{AB} = \smile{BC}$.

Сложность «1»

9.191. Расстояние от центра окружности до хорды равно $\frac{5\sqrt{3}}{2}$ и вдвое меньше радиуса. Найти длину хорды.

9.192. Хорда, длина которой равна $7\sqrt{12}$, стягивает дугу, величина которой равна 120°. Найти длину радиуса окружности.

9.193. Найти расстояние от центра окружности радиуса $\frac{7\sqrt{3}}{2}$ до хорды, если ее длина равна длине радиуса.

9.194. В сектор AOB с радиусом $R = \frac{\sqrt{2}+1}{8}$ и углом 90° вписана окружность, касающаяся отрезков OA, OB и дуги $\smile{AB}$. Найти радиус вписанной окружности.

9.195. Найти расстояние от центра окружности радиуса $\frac{5\sqrt{2}}{4}$ до хорды, если она стягивает дугу, величина которой равна 90°.

9.196. Длина хорды равна $3\sqrt{3}$. Найти расстояние от центра окружности до хорды, если она стягивает дугу в 120°.

9.197. Найти длину хорды, если она стягивает дугу окружности величиной в 90°, а радиус окружности равен $\frac{3\sqrt{2}}{16}$.

9.198. В сектор AOB, дуга которого содержит 60°, а радиус равен 18,6, вписана окружность, касающаяся отрезков OA, OB и дуги $\smile{AB}$. Найти радиус окружности.

9.199. Найти расстояние от центра окружности радиуса $3\sqrt{27}$ до хорды, если она стягивает дугу, величина которой равна 60°.

9.200. Расстояние от центра окружности до хорды равно $\frac{7\sqrt{2}}{2}$ и вдвое меньше длины хорды. Найти длину радиуса.

Сложность «2»

9.201. Из одной точки к окружности проведены две касательные. Длина каждой касательной равна 13, а расстояние между точками касания равно 24. Найти длину радиуса окружности.

9.202. Две окружности касаются друг друга извне. Две их общие касательные пересекаются под углом 60°. Найти радиус большей окружности, если радиус меньшей окружности равен 13,5.

9.203. Из точки A к окружности радиуса 7,5 проведены две касательные длиной 10. Найти расстояние от точки A до хорды, соединяющей точки касания.

9.204. Две окружности, каждая из которых вписана в острый угол 60°, касаются друг друга внешним образом. Найти расстояние от точки касания окружностей до стороны угла, если больший радиус равен 23.

9.205. Через концы хорды AB проведены две касательные, пересекающиеся в точке C. Найти длину высоты треугольника ABC, опущенной из вершины C, если $AC = 12$ и $AB = 14{,}4$.

9.206. Найти расстояние между центрами двух одинаковых пересекающихся окружностей радиуса 17, если длина их общей хорды равна 16.

9.207. В острый угол вписана окружность радиуса 1,3. Найти расстояние от вершины угла до точки касания, если расстояние между точками касания равно 2,4.

9.208. Две окружности касаются друг друга извне. Их общая касательная образует с прямой, проходящей через центры окружностей, угол, равный 30°. Найти радиус большей окружности, если расстояние от точки касания окружностей до их общей касательной равно 14,25.

9.209. Через концы хорды, длина которой 30, проведены две касательные до пересечения в точке A. Найти расстояние от точки A до хорды, если радиус окружности равен 17.

9.210. Из точки A к окружности проведены касательная и секущая, проходящая через центр окружности. Ближайшая к A точка пересечения секущей с окружностью C соединена с точкой касания B. Найти длину BC, если угол BAC равен 30° и расстояние от точки A до центра окружности равно 15.

Сложность «2»

9.211. Общая хорда двух пересекающихся окружностей видна из их центров под углами 90° и 60°. Найти радиус большей окружности, если центры окружностей лежат по разные стороны от хорды, а расстояние между центрами равно $\frac{1+\sqrt{3}}{4}$.

9.212. Общая хорда двух пересекающихся окружностей видна из их центров под углами 90° и 120°. Найти расстояние между центрами окружностей, лежащими по разные стороны от хорды, если длина хорды равна $3-\sqrt{3}$.

9.213. Общая хорда двух пересекающихся окружностей видна из их центров под углами 60° и 90°. Найти радиус большей окружности, если центры окружностей лежат по одну сторону от хорды, а расстояние между центрами равно $3(\sqrt{3}-1)$.

9.214. Общая хорда двух пересекающихся окружностей видна из их центров под углами 90° и 120°. Найти расстояние между центрами окружностей, лежащими по одну сторону от хорды, если длина хорды равна $\frac{3+\sqrt{3}}{4}$.

9.215. Общая хорда двух пересекающихся окружностей видна из их центров, расположенных по разные стороны от хорды, под углами 60° и 120°. Найти расстояние между центрами окружностей, если меньший радиус равен 7.

9.216. Общая хорда двух пересекающихся окружностей видна из их центров под углами 60° и 120°. Найти расстояние между центрами окружностей, лежащими по одну сторону от хорды, если меньший радиус равен 19.

9.217. Общая хорда двух пересекающихся окружностей видна из их центров под углами 90° и 60°. Найти длину хорды, если центры окружностей расположены по разные стороны от хорды, а расстояние между центрами равно $\frac{2}{\sqrt{3}-1}$.

9.218. Общая хорда двух пересекающихся окружностей видна из их центров под углами 90° и 60°. Найти длину хорды, если центры окружностей лежат по одну сторону от хорды, а расстояние между центрами равно $9(\sqrt{3}-1)$.

9.219. Общая хорда двух пересекающихся окружностей видна из их центров под углами 90° и 120°. Найти радиус меньшей окружности, если центры окружностей лежат по разные стороны от хорды, а расстояние между центрами равно $2(\sqrt{3}+1)$.

9.220. Общая хорда двух пересекающихся окружностей видна из их центров под углами 90° и 120°. Найти радиус меньшей окружности, если расстояние между центрами окружностей равно $\frac{7\left(\sqrt{3}-1\right)}{4}$, а центры лежат по одну сторону от хорды.

§ 30. ТРЕУГОЛЬНИКИ И ОКРУЖНОСТЬ

Сложность «1»

9.221. Один из острых углов прямоугольного треугольника равен 40°. Определить острый угол между радиусом описанной окружности, проведенным в вершину прямого угла, и гипотенузой.

9.222. Окружность радиуса $1+\sqrt{2}$ описана около равнобедренного прямоугольного треугольника. Найти радиус вписанной в этот треугольник окружности.

9.223. В окружность радиуса $\sqrt{3}$ вписан прямоугольный треугольник так, что один из катетов в $\sqrt{3}$ раз ближе к центру, чем другой. Определить больший катет.

9.224. В прямоугольном треугольнике ABC $\angle B = 30°$, $\angle C = 90°$, O — центр вписанной окружности. Отрезок OA равен 12. Вычислить радиус вписанной окружности.

9.225. Окружность радиуса $6\sqrt{3}$ описана около равнобедренного треугольника с углом 120°. Найти его основание.

9.226. Радиус окружности, вписанной в равнобедренный прямоугольный треугольник, равен $\sqrt{2}-1$. Найти длину высоты треугольника.

9.227. Боковая сторона равнобедренного треугольника равна 5, а угол при основании равен 30°. Определить диаметр описанной окружности.

9.228. Окружность радиуса $3-\sqrt{3}$ описана около прямоугольного треугольника с острым углом 30°. Найти его периметр.

9.229. Сумма меньшего катета и гипотенузы равна 3. Острый угол прямоугольного треугольника равен 30°. Найти радиус описанной окружности.

9.230. Острый угол между радиусом описанной окружности, проведенным в вершину прямого угла, и меньшим катетом прямоугольного треугольника равен 52°. Определить меньший острый угол треугольника.

Сложность «2»

9.231. Окружность касается одного из катетов равнобедренного прямоугольного треугольника и проходит через вершину противолежащего острого угла. Найти радиус окружности, если ее центр лежит на гипотенузе, длина которой равна $\dfrac{1+\sqrt{2}}{4}$.

9.232. Окружность касается большего катета прямоугольного треугольника с углом 60° и проходит через вершину этого угла. Найти периметр треугольника, если центр окружности лежит на гипотенузе, а длина ее радиуса равна $\dfrac{3-\sqrt{3}}{5}$.

9.233. Найти радиус окружности, описанной около прямоугольного треугольника, если радиус окружности, вписанной в этот треугольник, равен 3, а меньший катет равен 10.

9.234. Окружность касается большего катета прямоугольного треугольника и проходит через вершину противолежащего острого угла. Найти радиус окружности, если ее центр лежит на гипотенузе, а длины катетов равны 3 и $2\sqrt{10}$.

9.235. Радиус окружности, вписанной в прямоугольный треугольник, равен 2. Один из катетов равен 14. Найти гипотенузу.

9.236. В прямоугольном треугольнике точка касания вписанной окружности делит гипотенузу на отрезки 3 и 10. Найти больший катет.

9.237. Точка на гипотенузе прямоугольного треугольника, равноудаленная от обоих катетов, делит ее на отрезки 6 и 8. Найти бóльший катет.

9.238. Найти гипотенузу прямоугольного треугольника, если радиус вписанной окружности равен 3, а один из катетов равен 8.

9.239. Радиус окружности, вписанной в прямоугольный треугольник, равен 4. Один из катетов равен 9. Найти второй катет.

9.240. В прямоугольном треугольнике точка касания вписанной окружности делит гипотенузу на отрезки 5 и 12. Найти меньший катет.

Сложность «2»

9.241. В треугольнике ABC величина угла BAC равна 60°, а радиус окружности с центром в точке O, описанной около треугольника, равен $\sqrt[4]{3}$. Найти площадь треугольника OBC.

9.242. В треугольнике ABC величины углов BAC и ABC равны соответственно 30° и 45°. Найти площадь четырехугольника $AOBC$, если O — центр окружности радиуса $\sqrt{2-\sqrt{3}}$, описанной около треугольника.

9.243. Найти радиус описанной около треугольника ABC окружности, если величина угла BAC равна 60°, а расстояние от центра описанной окружности до стороны BC равно 1,3.

9.244. В треугольнике ABC величины углов BAC и ABC равны соответственно 30° и 45°. Найти периметр четырехугольника $AOBC$, если O — центр описанной около треугольника ABC окружности, а ее радиус равен $3-\sqrt{2}$.

9.245. В треугольнике ABC длина стороны BC равна длине радиуса описанной окружности. Найти величину угла BAC (в градусах).

9.246. В треугольнике ABC величина угла ACB равна 120°. Найти длину стороны AB, если радиус описанной окружности равен $\sqrt{75}$.

9.247. В треугольнике ABC длина стороны BC равна $2\sqrt{2}$, величина угла BAC равна 45°. Найти радиус окружности, описанной около треугольника.

9.248. В треугольнике ABC величины углов BAC и ABC равны соответственно 15° и 45°. Вычислить косинус угла AOB, если O — центр описанной около треугольника окружности.

9.249. Около треугольника ABC с острым углом BAC, величина которого равна 45°, описана окружность с центром в точке O. Найти ее радиус, если площадь треугольника OBC равна 18.

9.250. В треугольнике ABC величина угла ABC равна 45°. Вычислить длину стороны AC, если радиус окружности, описанной около треугольника, равен $\sqrt{8}$.

Сложность «2»

9.251. В треугольнике ABC длина стороны AC равна $\frac{6}{\sqrt{\pi}}$, величина угла ABC равна 60°, а периметр треугольника равен $\frac{15}{\sqrt{\pi}}$. Найти площадь вписанного в треугольник круга.

9.252. Длина медианы прямоугольного треугольника, проведенной к гипотенузе, равна $\frac{5}{\sqrt{\pi}}$. Периметр треугольника равен $\frac{24}{\sqrt{\pi}}$. Найти площадь вписанного в треугольник круга.

9.253. Периметр треугольника ABC равен 9, радиус вписанной в этот треугольник окружности равен $\sqrt{3}$. Найти расстояние от центра вписанной окружности до вершины B, если длина стороны AC равна 3,5.

9.254. В прямоугольном треугольнике расстояние от вершины прямого угла до центра вписанной окружности равно $\sqrt{2}$, а радиус описанной окружности равен 2,5. Найти периметр треугольника.

9.255. В треугольнике ABC длина стороны AC равна $6\sqrt{3}$, величина угла ABC равна 60°, а периметр треугольника равен $14\sqrt{3}$. Найти расстояние от центра вписанной в треугольник окружности до вершины B.

9.256. В треугольнике ABC длина стороны AC равна 13, величина угла ABC равна 120°, а радиус вписанного круга равен $\sqrt{3}$. Найти периметр треугольника.

9.257. В прямоугольном треугольнике отрезки гипотенузы, на которые ее делит точка касания вписанной окружности, равны 2 и 3. Найти радиус вписанной окружности.

9.258. Периметр прямоугольного треугольника равен 24, а радиус описанной около него окружности равен 5. Найти радиус вписанной окружности.

9.259. Радиус вписанной в прямоугольный треугольник окружности равен 3,5, а периметр треугольника равен 36. Найти радиус описанной окружности.

9.260. В треугольнике ABC дано: $AB = BC$ и $AC = 10$. Из середины D стороны AB проведен перпендикуляр DE к стороне AB до пересечения с BC в точке E и точка E соединена с точкой A. Периметр треугольника ABC равен 40. Найти периметр треугольника AEC.

§ 31. РАЗНЫЕ ЗАДАЧИ

Сложность «2»

9.261. В треугольнике со сторонами 2, 3,5 и 4,4 на большей стороне взята точка, равноудаленная от двух других сторон. Найти длины отрезков, на которые эта точка делит большую сторону треугольника.

9.262. В равнобедренном треугольнике высота равна 32, а боковая сторона относится к основанию как 2:1. Определить радиус вписанной окружности.

9.263. В треугольнике со сторонами 5, 6 и 10 к меньшей стороне проведены медиана и биссектриса. Найти расстояние между точками пересечения медианы и биссектрисы с меньшей стороной.

9.264. Дан треугольник со сторонами 8, 12 и 12,5. Проведена окружность, касающаяся меньших сторон и имеющая центр на большей стороне. Найти длины отрезков, на которые центр окружности делит большую сторону.

9.265. В прямоугольнике со сторонами 3 и 4,25 проведены биссектрисы двух углов, прилежащих к большей стороне. Найти расстояние между точками пересечения противоположной стороны с биссектрисами.

9.266. В равнобедренном треугольнике центр вписанного круга делит высоту в отношении 5:3 (считая от вершины), а боковая сторона равна 8,5. Найти длину основания треугольника.

9.267. В прямоугольном треугольнике с катетами 18 и 24 из вершины большего острого угла проведена биссектриса. Найти длину проекции биссектрисы на больший катет.

9.268. В треугольник ABC вписан ромб $BDEF$ так, что вершины D, E и F лежат соответственно на сторонах BC, AC и AB. Найти длину отрезка EC, если $AB = 3$, $BC = 7$, $AC = 5$.

9.269. В равнобедренном треугольнике радиус вписанного круга составляет $\frac{5}{11}$ высоты, опущенной на основание. Найти длину боковой стороны треугольника, если длина основания равна 11.

9.270. В прямоугольном треугольнике с катетами 4 и $\frac{96}{7}$ из вершины большего острого угла проведена биссектриса. Найти ее длину.

Сложность «2»

9.271. В прямоугольном треугольнике ABC из вершины прямого угла B проведены медиана BE и высота BK. Величина угла BCA равна 60°. Найти величину угла KBE.

9.272. В равнобедренном треугольнике длина боковой стороны равна 5, а площадь треугольника равна 12. На основании треугольника взята точка M. Найти сумму расстояний от точки M до боковых сторон треугольника.

9.273. В прямоугольном треугольнике величина угла, образованного медианой и высотой, проведенными к гипотенузе, равна 16°. Найти меньший острый угол треугольника.

9.274. В равнобедренном треугольнике длина боковой стороны равна 6. На основании треугольника взята точка M. Сумма расстояний от точки M до боковых сторон треугольника равна 5. Найти площадь треугольника.

9.275. В прямоугольном треугольнике величина угла между медианой и высотой, проведенными к гипотенузе, равна 24°. Найти величину угла между указанной высотой и большим катетом.

9.276. В равнобедренном треугольнике длина основания равна 9, а величина угла при основании равна 30°. Из точки M, взятой на основании, опущены перпендикуляры на боковые стороны. Найти сумму длин этих перпендикуляров.

9.277. В прямоугольном треугольнике ABC длина гипотенузы AC равна 10, угол при вершине B — прямой, точка E — середина гипотенузы. Величина угла BEC равна 120°. Из точки B опущена высота BK на гипотенузу. Найти длину отрезка AK гипотенузы.

9.278. В прямоугольном треугольнике ABC из вершины прямого угла B проведены медиана BE и высота BK. Найти площадь треугольника BKE, если $BK = \sqrt[4]{3}$, а величина угла BCA равна 30°.

9.279. В прямоугольном треугольнике ABC из вершины прямого угла B проведены медиана BE и высота BK. Длина KE равна 1, а величина угла BAK равна 60°. Найти длину гипотенузы.

9.280. В прямоугольном треугольнике из вершины прямого угла проведены к гипотенузе медиана и высота. Найти острый угол, образованный медианой и высотой, если один из острых углов треугольника равен 40°.

Сложность «3»

9.281. В треугольнике ABC величины углов BAC и BCA равны соответственно 60° и 45°, а радиус описанной около него окружности равен $\sqrt{3-\sqrt{3}}$. Найти площадь треугольника.

9.282. В треугольнике ABC величины углов BAC и ABC равны соответственно 30° и 75°. Найти длину стороны AB, если радиус описанной около треугольника окружности равен $3\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)$.

9.283. Вычислить площадь равнобедренного треугольника, если радиус описанной окружности равен $4\sqrt{3}$, а длина отрезка прямой, соединяющего середины основания и боковой стороны, в $\sqrt{2}$ раз меньше радиуса описанной окружности.

9.284. В треугольнике ABC величины углов BAC и BCA равны соответственно 30° и 75°. Найти расстояние от центра описанной окружности до стороны AC, если длина BC равна $3\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)$.

9.285. В треугольнике ABC величины углов BAC и BCA равны соответственно 45° и 60°, а длина стороны BC равна $\sqrt[4]{12}$. Найти площадь треугольника BOA, где O — центр описанной около треугольника ABC окружности.

9.286. В треугольнике ABC величины углов BAC и BCA равны соответственно 30° и 75°. Найти высоту треугольника, опущенную на сторону BC, если радиус описанной около треугольника окружности равен $2-\sqrt{3}$.

9.287. В треугольнике ABC расстояние от центра описанной окружности до стороны BC равно $\sqrt{6}$, а величины углов BAC и ACB равны соответственно 45° и 60°. Найти длину стороны AB.

9.288. В треугольнике ABC величины углов BAC и BCA равны соответственно 45° и 60°, расстояние от центра описанной окружности до стороны BC равно $3-\sqrt{3}$. Найти длину высоты треугольника, опущенной на сторону BC.

9.289. В треугольнике ABC величины углов BAC и BCA соответственно равны 45° и 60°, а радиус описанной окружности равен $\sqrt{6}-\sqrt{2}$ Найти длину стороны AC.

9.290. В треугольнике ABC величины углов BAC и BCA равны соответственно 45° и 60°, а длина стороны AC равна $\frac{3+\sqrt{3}}{\sqrt{6}}$. Найти радиус окружности, описанной около треугольника.

Сложность «3»

9.291. К окружности, вписанной в равнобедренный треугольник с основанием 8 и боковой стороной 6, проведена касательная, параллельная основанию. Найти длину отрезка касательной, заключенной между сторонами треугольника.

9.292. К окружности, вписанной в равнобедренный треугольник с основанием 16 и боковой стороной 17, проведена касательная, параллельная высоте треугольника. Найти длину отрезка касательной, заключенной между сторонами треугольника.

9.293. Сторона ромба равна 10, большая диагональ равна 16. К окружности, вписанной в ромб, проведена касательная, параллельная его меньшей диагонали. Найти длину отрезка касательной, заключенной между сторонами ромба.

9.294. Около окружности радиуса $\sqrt{3}$ описана равнобочная трапеция с большим основанием 6. Боковые стороны трапеции продолжены до их пересечения. Найти длину боковой стороны полученного равнобедренного треугольника.

9.295. В равнобедренный треугольник с основанием 15,5 вписана окружность. К окружности проведена касательная, параллельная основанию треугольника. Найти боковую сторону треугольника, если длина отрезка касательной, заключенного между сторонами треугольника, равна 10,5.

9.296. К окружности, вписанной в равнобедренный треугольник с основанием 12 и высотой 8, проведена касательная, параллельная оснонию. Найти площадь трапеции, отсекаемой этой касательной от треугольника.

9.297. Полуокружность, центр которой лежит на большем основании AD прямоугольной трапеции $ABCD$, касается остальных сторон трапеции. Стороны AB и DC продолжены до пересечения в точке M. Найти меньшее основание трапеции, если $AM = 6$ и $DM = 10$.

9.298. В ромб, диагонали которого равны 12 и 16, вписана окружность. Найти расстояние от точки касания окружности со стороной ромба до меньшей диагонали.

9.299. В равнобедренный треугольник с боковой стороной 2,5 и основанием 3 вписана полуокружность так, что она касается боковых сторон, а центр окружности лежит на основании. Найти расстояние между точками касания полуокружности с боковыми сторонами треугольника.

9.300. В ромб, длины диагоналей которого равны $\sqrt{3}+1$ и $\sqrt{3}-1$, вписана окружность. Точки касания окружности со сторонами ромба последовательно соединены. Найти площадь полученного четырехугольника.

Сложность «3»

9.301. Определить боковую сторону равнобочной трапеции, описанной около окружности, если острый угол при основании трапеции равен $\pi/3$, а площадь трапеции равна $288\sqrt{3}$.

9.302. Равнобочная трапеция описана около окружности. Боковая сторона трапеции делится точкой касания на отрезки длиной 12 и 48. Найти площадь трапеции.

9.303. Площадь равнобочной трапеции, описанной около окружности, равна 144,5. Найти радиус окружности, если угол при основании трапеции равен $\pi/6$.

9.304. Площадь равнобочной трапеции, описанной около окружности, равна $128\sqrt{3}$. Найти боковую сторону трапеции, если острый угол при основании трапеции равен $\pi/3$.

9.305. Около окружности радиуса $2\sqrt{3}$ описана равнобочная трапеция. Определить площадь трапеции, если ее высота вдвое больше меньшего из оснований трапеции.

9.306. Равнобочная трапеция описана около окружности. Большее основание трапеции видно из центра круга под углом 120°. Найти боковую сторону трапеции, если ее площадь равна $50\sqrt{3}$.

9.307. Площадь равнобочной трапеции, описанной около окружности, равна 162, а высота трапеции вдвое меньше ее боковой стороны. Найти радиус окружности.

9.308. Площадь равнобочной трапеции, описанной около окружности, равна $98\sqrt{3}$. Найти среднюю линию трапеции, если угол при меньшем основании трапеции равен 120°.

9.309. Определить среднюю линию трапеции, описанной около окружности, если площадь трапеции равна 312,5, а угол при основании трапеции равен 30°.

9.310. Определить высоту равнобочной трапеции, описанной около окружности, если площадь трапеции равна 242, а большее основание трапеции видно из центра окружности под углом 150°.

Сложность «3»

9.311. В выпуклом равностороннем шестиугольнике $ABCDEF$ углы при вершинах A, C и E — прямые. Найти площадь шестиугольника, если его сторона равна $3\sqrt{3-\sqrt{3}}$.

9.312. В выпуклом равностороннем шестиугольнике $ABCDEF$ со стороной $\dfrac{11}{\sqrt{4+\sqrt{3}+\sqrt{7}}}$ углы при вершинах B и F — прямые. Найти площадь шестиугольника, зная, что $CE = AB$.

9.313. В выпуклом равностороннем пятиугольнике $ABCDE$ углы при вершинах B и E — прямые. Найти площадь пятиугольника, если его сторона равна $5\sqrt{4-\sqrt{7}}$.

9.314. В выпуклом равностороннем шестиугольнике $ABCDEF$ угол при вершине F — прямой. Найти площадь шестиугольника, если треугольник ACE, образованный диагоналями, — равносторонний со стороной $\sqrt{\dfrac{3-\sqrt{3}}{2}}$.

9.315. В выпуклом равностороннем шестиугольнике $ABCDEF$ углы при вершинах A и E — прямые, а угол при вершине C равен 60°. Найти площадь шестиугольника, если его сторона равна $\dfrac{1}{\sqrt{\sqrt{7}+\sqrt{3}+4}}$.

9.316. В выпуклом равностороннем шестиугольнике $ABCDEF$ углы при вершинах B и F — прямые, а угол при вершине D равен 120°. Найти площадь четырехугольника $ACDE$, если сторона шестиугольника равна $5\sqrt{\sqrt{15}-\sqrt{3}}$.

9.317. В выпуклом равностороннем шестиугольнике $ABCDEF$ со стороной $5\sqrt{3-\sqrt{3}}$ каждый из углов при вершинах A, C и F составляет 150°. Найти площадь шестиугольника.

9.318. В выпуклом равностороннем пятиугольнике $ABCDE$ угол при вершине A — прямой, а углы при вершинах C и D равны между собой. Найти площадь четырехугольника $BCDE$, если сторона пятиугольника равна $\sqrt[4]{56\sqrt{2}-77}$.

9.319. В выпуклом равностороннем пятиугольнике $ABCDE$ со стороной $7\sqrt{2\sqrt{2}-\sqrt{3}}$ угол при вершине A — прямой, а сторона BC перпендикулярна диагонали BE. Найти площадь четырехугольника $BCDE$.

9.320. В выпуклом равностороннем шестиугольнике $ABCDEF$ угол при вершине B — прямой, а сторона CD перпендикулярна диагонали CA. Найти площадь четырехугольника $ACDF$, если диагональ DF равна стороне шестиугольника и равна $\sqrt{2\sqrt{2}-\sqrt{3}}$.

Сложность «3»

9.321. В прямоугольнике $ABCD$ ($BC \parallel AD$) точка M делит диагональ AC в отношении $4:1$ ($AM : MC = 4 : 1$). Найти отношение площади треугольника MCD к площади прямоугольника $ABCD$.

9.322. В параллелограмме $ABCD$ ($BC \parallel AD$) точка K делит диагональ AC в отношении $3 : 1$ ($AK : KC = 3 : 1$). Найти отношение площади треугольника AKD к площади параллелограмма $ABCD$.

9.323. В трапеции $ABCD$ ($BC \parallel AD$) точка M делит сторону CD в отношении $1 : 3$ ($CM : MD = 1 : 3$). Известно, что $AD = 2BC$. Найти отношение площади треугольника ACM к площади трапеции $ABCD$.

9.324. В прямоугольнике $ABCD$ ($BC \parallel AD$) точка M делит сторону AB в отношении $2 : 1$ ($AM : MB = 2 : 1$), а точка K — середина стороны BC. Найти отношение площади треугольника MBK к площади прямоугольника $ABCD$.

9.325. В параллелограмме $ABCD$ ($BC \parallel AD$) точка K делит диагональ AC в отношении $2 : 1$ ($AK : KC = 2 : 1$), а точка M — середина стороны AB. Найти отношение площади треугольника AMD к площади параллелограмма $ABCD$.

9.326. В трапеции $ABCD$ ($BC \parallel AD$) точка M делит диагональ AC в отношении $1 : 2$ ($AM : MC = 1 : 2$). Найти отношение площади треугольника AMD к площади трапеции $ABCD$.

9.327. В прямоугольнике $ABCD$ ($BC \parallel AD$) точка M делит диагональ AC в отношении $1 : 4$ ($MC = 4AM$), а точка K делит сторону CD в отношении $2 : 3$ ($3CK = 2KD$). Найти отношение площади треугольника CMK к площади прямоугольника $ABCD$.

9.328. В параллелограмме $ABCD$ ($BC \parallel AD$) точка M делит диагональ AC в отношении $2 : 3$ ($3AM = 2MC$), а точка K делит сторону CD в отношении $1 : 2$ ($2CK = KD$). Найти отношение площади треугольника CMK к площади параллелограмма $ABCD$.

9.329. В трапеции $ABCD$ ($BC \parallel AD$) точка M делит диагональ AC в отношении $1 : 3$ ($3AM = MC$), а точка K — середина DC. Найти отношение площади треугольника MCK к площади трапеции $ABCD$, если $AD = 2BC$.

9.330. В трапеции $ABCD$ ($BC \parallel AD$) точка M делит диагональ AC пополам, а точка K делит сторону CD в отношении $1 : 3$ ($3CK = KD$). Найти отношение площади треугольника MKD к площади трапеции $ABCD$, если $AD = 4BC$.

Сложность «3»

9.331. В трапеции $ABCD$ ($BC \parallel AD$) точка K делит основание AD в отношении $1 : 3$ ($KD = 3AK$). Точка M есть точка пересечения BK с диагональю AC. Найти отношение площади треугольника AMK к площади трапеции $ABCD$, если $AD = 2BC$.

9.332. В прямоугольнике $ADCD$ ($AD \parallel BC$) дано: $AB = 3$, $AD = 4$. Биссектриса угла CAD, образованного диагональю AC и стороной AD, пересекает диагональ BD в точке K, а сторону CD в точке N. Найти площадь треугольника KND.

9.333. В параллелограмме $ABCD$ ($AD \parallel BC$) проведена биссектриса угла BAD. K — точка пересечения биссектрисы с диагональю BD, а M — точка пересечения биссектрисы со стороной параллелограмма BC. Найти отношение площади треугольника BKM к площади параллелограмма $ABCD$, если $AB : AD = 1 : 3$.

9.334. В трапеции $ABCD$ ($BC \parallel AD$) точка N делит AD в отношении $5 : 1$ ($AN = 5ND$). Точка K есть точка пересечения BD и NC. Найти отношение площади треугольника ABD к площади трапеции $ABCD$, если $2BK = 3KD$.

9.335. В параллелограмме $ABCD$ ($AD \parallel BC$) точка M — середина AB, а точка K делит диагональ BD так, что $BK = 3KD$. Через точки M и K проведена прямая, которая пересекает сторону DC в точке N. Найти отношение площади треугольника KND к площади параллелограмма $ABCD$.

9.336. В прямоугольнике $ABCD$ ($AD \parallel BC$) точка M делит сторону AB в отношении $4 : 1$ ($AM = 4MB$), а точка K делит диагональ BD в отношении $3 : 1$ ($BK : KD = 3 : 1$). Через точки M и K проведена прямая, которая пересекает сторону CD в точке N. Найти отношение площади треугольника KND к площади прямоугольника $ABCD$.

9.337. В трапеции $ABCD$ ($BC \parallel AD$) точка N делит AD в отношении $5 : 1$ ($AN = 5ND$). Точка K есть точка пересечения BD и NC. Найти отношение площади треугольника ABD к площади трапеции $ABCD$, если $2BK = 3KD$.

9.338. В трапеции $ABCD$ ($BC \parallel AD$) точка K — середина AD, точка N — точка пересечения BD и KC. Найти отношение площади треугольника DCN к площади трапеции $ABCD$, если $AD = 2BC$.

9.339. В равнобокой трапеции $ABCD$ ($BC \parallel AD$) дано: $CN \perp AD$. Точка K (точка пересечения высоты CN и диагонали BD) делит диагональ BD в отношении 3 : 1 ($3KD = BK$). Найти площадь трапеции, если площадь треугольника NKD равна $\frac{1}{2}$.

9.340. В равнобокой трапеции $ABCD$ ($BC \parallel AD$), BN — высота, O — точка пересечения диагоналей BD и AC, причем $OD = 3BO$, точка K — точка пересечения высоты BN и диагонали AC. Найти отношение площади треугольника AKN к площади трапеции $ABCD$.

Сложность «3»

9.341. В прямоугольнике $ABCD$ ($BC \parallel AD$) точка N делит сторону CD в отношении 1 : 3 ($3CN = ND$). Прямая AN пересекает диагональ BD в точке K. Найти площадь треугольника KND, если площадь прямоугольника равна 56.

9.342. В параллелограмме $ABCD$ ($BC \parallel AD$) точка N делит боковую сторону CD в отношении 1 : 2 ($2CN = ND$). Прямая AN пересекает диагональ BD в точке K. Найти отношение площади треугольника KND к площади параллелограмма $ABCD$.

9.343. В трапеции $ABCD$ ($BC \parallel AD$) точка N делит боковую сторону CD в отношении 2 : 3 ($3CN = 2ND$). Прямая AN пересекает диагональ BD в точке K. Найти отношение площади треугольника KND к площади трапеции $ABCD$, если $3BC = AD$.

9.344. В прямоугольнике $ABCD$ ($BC \parallel AD$) точка N делит сторону CD в отношении 2 : 3 ($3CD = 2ND$). Прямая AN пересекает биссектрису угла ABC в точке K, а прямая BK пересекает сторону AD в точке L. Найти отношение площади треугольника AKL к площади прямоугольника, если $AB : AD = 1 : 3$.

9.345. В параллелограмме $ABCD$ ($AD \parallel BC$) точка N делит сторону CD в отношении 1 : 2 ($CN : ND = 1 : 2$). Биссектриса угла ABC пересекает AN в точке K, а AD в точке M. Найти отношение площади треугольника ABK к площади параллелограмма, если $AD = 2AB$.

9.346. В трапеции $ABCD$ ($AD \parallel BC$) точка N делит сторону CD в отношении 1 : 2 ($CN : ND = 1 : 2$). Высота трапеции, опущенная из вершины B на основание AD, пересекает AN в точке M, а AD в точке K. Найти отношение площади треугольника AMK к площади трапеции, если $AD = 3BC$.

9.347. В прямоугольнике $ABCD$ ($AB \parallel CD$) точка N делит сторону CD в отношении 1 : 2 ($2CN = ND$). Прямая AN пересекает диагональ BD в точке K. Найти отношение площади треугольника KND к площади прямоугольника, если $BC : AB = 2 : 3$.

9.348. В параллелограмме $ABCD$ ($BC \parallel AD$) точка N делит боковую сторону CD в отношении 1 : 3 ($3CN = ND$). Прямая AN пересекает диагональ BD в точке K. Найти площадь параллелограмма, если площадь треугольника KND равна 2.

9.349. В трапеции $ABCD$ ($AD \parallel BC$) точка O делит диагональ AC в отношении 2 : 1 ($AO : OC = 2 : 1$). Прямая BO пересекает сторону CD в точке N. Найти отношение площади треугольника CON к площади трапеции, если $AD : BC = 3 : 2$.

9.350. В прямоугольнике $ABCD$ ($BC \parallel AD$) точка N делит сторону CD в отношении 1 : 2 ($2CN = ND$). Прямая AN пересекает биссектрису угла ABC в точке K, а прямая BK пересекает сторону AD в точке L. Найти площадь прямоугольника, если площадь треугольника ALK равна 3, и $AB : AD = 1 : 2$.

Раздел X

СТЕРЕОМЕТРИЯ

§ 31. МНОГОГРАННИКИ

1°. Призма. *Призмой* называется многогранник, у которого две грани (основания призмы) — равные многоугольники с соответственно параллельными сторонами, а все остальные грани — параллелограммы, плоскости которых параллельны одной прямой.

Призма, боковые ребра которой перпендикулярны основаниям, называется *прямой призмой*. Прямая призма называется *правильной*, если ее основания — правильные многоугольники.

Площадь боковой поверхности призмы вычисляется по формуле:

$$\boxed{S_{\text{бок.пр}} = Pl}$$

где P — периметр перпендикулярного сечения призмы, l — длина бокового ребра.

Объем призмы находится по формулам:

$$\boxed{V_{\text{пр}} = S_{\text{пер.сеч}}l, \quad V_{\text{пр}} = S_{\text{осн}}H}$$

где $S_{\text{пер.сеч}}$ — площадь перпендикулярного сечения призмы, $S_{\text{осн}}$ — площадь основания призмы, H — высота призмы.

2°. Параллелепипед и куб. *Параллелепипедом* называется призма, у которой основаниями служат параллелограммы.

Прямым параллелепипедом называется параллелепипед, боковые ребра которого перпендикулярны основаниям.

Прямоугольным параллелепипедом называется прямой параллелепипед, основаниями которого являются прямоугольники.

Объем прямоугольного параллелепипеда вычисляется по формуле:

$$\boxed{V_{\text{пар.}} = abc}$$

где a, b, c — длины трех ребер прямоугольного параллелепипеда, выходящие из одной вершины.

Кубом называется прямоугольный параллелепипед с равными ребрами.

Объем куба вычисляется по формуле:

$$\boxed{V_{\text{куба}} = a^3}$$ где a — длина ребра куба.

Сложность «0»

10.001. Боковая поверхность куба равна 3. Чему равна длина диагонали куба?

10.002. Ребро куба равно $\frac{2}{\sqrt[3]{\pi}}$. Найти объем прямого цилиндра, вписанного в куб так, что его осью служит прямая, проходящая через центры оснований куба.

10.003. Полная поверхность куба равна 3. Чему равна длина диагонали грани куба?

10.004. Диагональ грани куба равна $2\sqrt{2}$. Найти объем куба.

10.005. Ребро куба равно $5\sqrt{2}$. Найти расстояние от плоскости диагонального сечения до не пересекающего его ребра.

10.006. Площадь основания куба равна 9. Найти его объем.

10.007. Площадь сечения куба плоскостью, проходящей через диагонали верхнего и нижнего оснований, равна $16\sqrt{2}$. Найти длину ребра куба.

10.008. Объем куба равен $2\sqrt{2}$. Чему равен радиус окружности, описанной около грани куба?

10.009. Площадь сечения куба плоскостью, проходящей через три несмежные вершины, равна $18\sqrt{3}$. Найти длину ребра куба.

10.010. Диагональ куба равна $3\sqrt{3}$. Какова его полная поверхность?

Сложность «0»

10.011. Основанием призмы служит ромб со стороной 2 и острым углом 30°. Найти объем призмы, если ее высота равна 3.

10.012. Основанием призмы служит трапеция, средняя линия которой равна 7, а высота трапеции равна 4. Найти объем призмы, если ее высота равна 0,5.

10.013. Основанием призмы является треугольник со сторонами 5 и 4 и углом 30° между ними. Найти объем призмы, если ее высота равна 0,2.

10.014. Основанием призмы служит равнобочная трапеция с острым углом 45°, боковой стороной 2 и средней линией $2\sqrt{2}$. Найти объем призмы, если ее высота равна 5.

10.015. Основание призмы — прямоугольник со сторонами 3 и 4. Найти объем призмы, если ее высота равна диагонали прямоугольника.

10.016. Основание призмы — квадрат со стороной $6\sqrt{2}$. Найти объем призмы, если ее высота равна удвоенной диагонали квадрата.

10.017. В прямой треугольной призме две стороны основания равны $\sqrt{11}$ и 3, а синус угла между ними равен $\frac{\sqrt{11}}{6}$. Найти объем призмы, если боковое ребро равно 4.

10.018. Основанием прямой призмы является равнобедренный прямоугольный треугольник с гипотенузой $2\sqrt{2}$. Найти объем призмы, если боковое ребро равно катету.

10.019. Основание призмы — равносторонний треугольник, площадь которого равна $9\sqrt{3}$. Найти объем призмы, если ее высота в $\sqrt{3}$ раз больше стороны основания.

10.020. Основанием призмы служит равнобедренный треугольник, основание которого равно 6, а боковая сторона равна 5. Найти объем призмы, если ее высота равна высоте треугольника, опущенной на его основание.

Сложность «0»

10.021. Основанием прямой призмы служит равнобедренный треугольник, основание которого равно 8, а боковая сторона равна 5. Найти площадь боковой поверхности призмы, если ее высота равна высоте треугольника, проведенной к его основанию.

10.022. Высота прямоугольного параллелепипеда равна 7, а стороны его основания равны 4 и 5. Найти площадь боковой поверхности параллелепипеда.

10.023. В правильной треугольной призме сторона основания равна 1, а площадь боковой поверхности равна $3\sqrt{15}$. Найти длину диагонали боковой грани призмы.

10.024. Основанием прямой призмы является равнобочная трапеция, боковая сторона которой равна 5, а основания равны 7 и 9. Найти площадь боковой поверхности призмы, если ее высота равна 12.

10.025. В прямом параллелепипеде стороны основания равны 26 и 10, а синус угла между ними равен $\frac{4}{13}$. Определить площадь боковой поверхности параллелепипеда, если его объем равен 40.

10.026. Основание прямой призмы — треугольник со сторонами 3, 4 и 6. Найти площадь боковой поверхности призмы, если ее высота равна 0,5.

10.027. Найти полную поверхность правильной треугольной призмы, если сторона ее основания равна $\sqrt[4]{3}$, а боковое ребро равно $\sqrt[4]{27}$.

10.028. Основанием прямой призмы является равносторонний треугольник, площадь которого равна $9\sqrt{3}$. Найти площадь боковой поверхности призмы, если ее высота в 3 раза больше стороны основания.

10.029. В прямой треугольной призме стороны основания равны 25, 26 и 29, а боковая поверхность равна 1620. Найти высоту призмы.

10.030. Основанием прямой призмы служит равнобедренный прямоугольный треугольник, площадь которого равна 18. Найти площадь боковой поверхности призмы, если ее высота равна $2-\sqrt{2}$.

Сложность «I»

10.031. Определить объем прямоугольного параллелепипеда, диагональ которого равна 13, а диагонали его боковых граней равны $4\sqrt{10}$ и $3\sqrt{17}$.

10.032. Диагонали боковых граней прямоугольного параллелепипеда составляют с плоскостью основания углы 30° и 60°. Вычислить величину $A=\sqrt{\frac{10}{3}}\operatorname{tg}\varphi$, где φ — угол между диагональю параллелепипеда и плоскостью основания.

10.033. Найти объем прямого параллелепипеда, зная, что его высота равна $\sqrt{3}$, диагонали составляют с основанием углы 45° и 60°, а основанием служит ромб.

10.034. Угол между диагоналями основания прямоугольного параллелепипеда равен 30°. Диагональ параллелепипеда составляет с плоскостью основания угол 45°. Найти высоту параллелепипеда, если его объем равен 2.

10.035. В прямоугольном параллелепипеде диагональ основания равна 3 и составляет со стороной основания угол 45°. Через эту сторону и противоположную ей сторону верхнего основания проведена плоскость, образующая с плоскостью основания угол 45°. Найти площадь боковой поверхности параллелепипеда.

10.036. Стороны основания прямоугольного параллелепипеда равны 3 и 4. Диагональ параллелепипеда наклонена к плоскости основания под углом 45°. Определить площадь боковой поверхности параллелепипеда.

10.037. В прямом параллелепипеде стороны основания, равные 2 и 8, образуют угол 30°. Площадь боковой поверхности равна 10. Определить объем параллелепипеда.

10.038. Диагональ прямоугольного параллелепипеда равна $5\sqrt{2}$ и образует с плоскостью основания угол 45°. Найти площадь боковой поверхности параллелепипеда, если площадь его основания равна 12.

10.039. В основании прямого параллелепипеда лежит параллелограмм со сторонами 1 и 4 и острым углом 60°. Большая диагональ параллелепипеда равна $\sqrt{33}$. Определить его объем.

10.040. Стороны основания прямоугольного параллелепипеда равны 4 и 3. Диагональ параллелепипеда составляет с плоскостью основания угол, тангенс которого равен $\frac{1}{35}$. Определить полную поверхность параллелепипеда.

Сложность «2»

10.041. Основанием наклонной призмы служит параллелограмм со сторонами 3 и 6 и острым углом 45°. Боковое ребро призмы равно $4\sqrt{2}$ и наклонено к плоскости основания под углом 30°. Найти объем призмы.

10.042. Определить объем правильной четырехугольной призмы, если ее диагональ образует с плоскостью боковой грани угол 30°, а сторона основания равна $\sqrt{2}$.

10.043. Основанием призмы служит квадрат со стороной $\sqrt{4-\sqrt{3}}$. Одна из боковых граней также квадрат, другая — ромб с углом 60°. Определить полную поверхность призмы.

10.044. Наибольшая диагональ правильной шестиугольной призмы равна 4 и составляет с боковым ребром призмы угол 30°. Найти объем призмы.

10.045. Найти объем наклонной треугольной призмы, основанием которой служит равносторонний треугольник со стороной 2, если боковое ребро призмы равно стороне основания и наклонено к плоскости основания под углом 60°.

10.046. Найти объем правильной треугольной призмы, если сторона ее основания равна 2, а площадь боковой поверхности равна сумме площадей оснований.

10.047. В правильной треугольной призме площадь сечения, проходящего через боковое ребро призмы перпендикулярно противолежащей боковой грани, равна $\sqrt{3}$, а сторона основания призмы равна $\sqrt[4]{3}$. Найти площадь полной поверхности призмы.

10.048. Основанием прямой призмы служит ромб, а площади ее диагональных сечений равны 3 и 4. Найти площадь боковой поверхности призмы.

10.049. Площади двух боковых граней прямой треугольной призмы равны 3 и 4, а угол между сторонами основания, через которые проходят эти боковые грани, равен 30°. Боковое ребро равно 1. Найти объем призмы.

10.050. Основанием прямой призмы служит равнобедренный треугольник, основание которого равно $\sqrt[3]{\sqrt{2}+1}$, а угол при нем равен 45°.

Найти объем призмы, если ее боковая поверхность равна сумме площадей оснований.

Сложность «3»

10.051. В кубе $ABCDA'B'C'D'$ через вершины A, C' и середину ребра $D'D$ проведено сечение. Найти ребро куба, если площадь сечения равна $50\sqrt{6}$.

10.052. Через концы трех ребер прямоугольного параллелепипеда, выходящих из одной вершины, проведена плоскость, образующая с плоскостью основания угол, косинус которого равен $\frac{1}{8}$. Длины сторон основания равны 5 и 3. Определить площадь полученного сечения.

10.053. В кубе $ABCDA'B'C'D'$ через середины ребер $A'D'$, $D'D$ и вершину B' проведено сечение. Найти площадь сечения, если ребро куба равно $4\sqrt{5}$.

10.054. В правильной четырехугольной призме диагональ равна $2\cdot\left(\sqrt[4]{3}\right)$ и наклонена к плоскости основания под углом 45°. Определить площадь сечения, проходящего через две противоположные стороны оснований.

10.055. В кубе $ABCDA'B'C'D'$ через середины ребер $A'B'$, $B'B$ и $D'C'$ проведено сечение. Найти объем куба, если площадь сечения равна $8\sqrt{2}$.

10.056. В правильной четырехугольной призме $ABCDA'B'C'D'$ через вершину B' и диагональ основания AC проведено сечение. Найти его площадь, если $AB = \sqrt[4]{2}$, а угол наклона сечения к основанию равен 45°.

10.057. В кубе $ABCDA'B'C'D'$ через середины ребер $A'B'$, $D'C'$ и вершину B проведено сечение. Найти объем куба, если площадь сечения равна $\frac{9\sqrt{5}}{2}$.

10.058. В прямоугольном параллелепипеде диагональ основания равна 5, а косинус угла, который она составляет с большей стороной нижнего основания, равен 0,8. Через эту сторону и противоположную ей сторону верхнего основания проведена плоскость, косинус угла наклона которой к плоскости нижнего основания равен 0,3. Найти площадь этого сечения.

10.059. В кубе через сторону основания проведено сечение под углом 30° к плоскости основания. Найти площадь сечения, если ребро куба равно $\sqrt[4]{3}$.

10.060. Через вершины A, C и D' правильной четырехугольной призмы $ABCDA'B'C'D'$ проведена плоскость, образующая с плоскостью основания угол 60°. Найти площадь сечения призмы этой плоскостью, если сторона основания призмы равна 4.

§ 32. ПИРАМИДА

1°. Пирамида. *Пирамидой* называется многогранник, у которого одна грань, называемая основанием, представляет собой многоугольник, а все остальные грани — треугольники, имеющие общую вершину.

Правильной пирамидой называется пирамида, основанием которой является правильный многоугольник, а высота пирамиды проходит через центр ее основания.

Тетраэдром называется пирамида, в основании которой лежит треугольник. Тетраэдр называется *правильным*, если все его ребра равны.

Объем пирамиды вычисляется по формуле:

$$\boxed{V_{\text{пир}} = \frac{1}{3} SH}$$

где S — площадь основания пирамиды, H — высота пирамиды.

2°. Усеченная пирамида. *Усеченной пирамидой* называется часть пирамиды, заключенная между основанием и секущей плоскостью, параллельной основанию.

Объем усеченной пирамиды вычисляется по формуле:

$$\boxed{V_{\text{ус. пир}} = \frac{1}{3} H\left(S_1 + \sqrt{S_1 S_2} + S_2\right)}$$

где H — высота усеченной пирамиды, а S_1 и S_2 — площади ее оснований.

Для усеченной пирамиды справедливы следующие соотношения:

$$\boxed{\frac{S_1}{S_2} = \frac{a_1^2}{a_2^2} = \frac{h_1^2}{h_2^2}}$$

где a_1 и a_2 — длины сторон ее оснований, h_1 и h_2 — расстояния от оснований усеченной пирамиды до вершины полной пирамиды.

Сложность «1»

10.061. Основанием четырехугольной пирамиды служит ромб со стороной 3 и острым углом 45°. Найти объем пирамиды, если ее высота равна $\sqrt{2}$.

10.062. Высота правильной четырехугольной пирамиды равна 7, а сторона основания равна 8. Определить боковое ребро.

10.063. Основанием треугольной пирамиды является прямоугольный треугольник с меньшим катетом $\sqrt{3}$ и острым углом 30°. Найти объем пирамиды, если ее высота равна гипотенузе основания.

10.064. Найти объем правильного тетраэдра с ребром $3\sqrt{2}$.

10.065. Объем правильной четырехугольной пирамиды равен 171. Найти объем другой правильной четырехугольной пирамиды, у которой сторона основания в 3 раза меньше, а высота равна высоте данной пирамиды.

10.066. Чему равна площадь полной поверхности правильной пирамиды, боковое ребро которой равно 5, а основанием служит квадрат со стороной 6?

10.067. Основанием треугольной пирамиды служит прямоугольный треугольник с гипотенузой 8 и острым углом 45°. Найти объем пирамиды, если ее высота равна 3.

10.068. Найти объем правильной четырехугольной пирамиды, все ребра которой равны $3\sqrt{2}$.

10.069. Боковые грани треугольной пирамиды — прямоугольные треугольники, а боковые ребра равны $\sqrt{3-\sqrt{3}}$. Вычислить полную поверхность пирамиды.

10.070. В правильной треугольной пирамиде высота равна стороне основания и равна $\sqrt[6]{3}$. Найти объем пирамиды.

Сложность «1»

10.071. Стороны оснований правильной усеченной треугольной пирамиды равны 12 и 4. Найти объем усеченной пирамиды, если ее высота равна $\sqrt{3}$.

10.072. Стороны оснований правильной четырехугольной усеченной пирамиды равны 3 и 1. Найти объем усеченной пирамиды, если ее высота равна 3.

10.073. Основаниями усеченной пирамиды служат равнобедренные прямоугольные треугольники, гипотенузы которых равны 7 и 5. Найти объем усеченной пирамиды, если ее высота равна 12.

10.074. Основаниями усеченной пирамиды служат прямоугольные треугольники с острым углом 30°. Гипотенузы треугольников равны 6 и 4. Найти объем усеченной пирамиды, если ее высота равна $\sqrt{3}$.

10.075. Основаниями усеченной пирамиды служат ромбы с острым углом 60° и сторонами, равными 8 и 6. Найти объем усеченной пирамиды, если ее высота равна $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

10.076. Основаниями усеченной пирамиды служат равнобедренные треугольники с углом 120°. Боковые стороны треугольников равны 12 и 6. Найти объем усеченной пирамиды, если ее высота равна $\frac{1}{7\sqrt{3}}$.

10.077. Стороны оснований правильной шестиугольной усеченной пирамиды равны 4 и 2. Найти объем усеченной пирамиды, если ее высота равна $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

10.078. Основаниями усеченной пирамиды служат равнобедренные треугольники с углом 60° при вершине. Высоты треугольников равны 3 и 4. Найти объем усеченной пирамиды, если ее высота равна $15\sqrt{3}$.

10.079. Стороны оснований правильной треугольной усеченной пирамиды равны 3 и 7. Ребро усеченной пирамиды равно $2\sqrt{5}$. Найти площадь ее боковой поверхности.

10.080. Стороны оснований правильной четырехугольной усеченной пирамиды равны 5 и 3. Ребро усеченной пирамиды равно $\sqrt{17}$. Найти площадь ее полной поверхности.

Сложность «I»

10.081. В правильной четырехугольной пирамиде плоскость, параллельная основанию, делит высоту пополам. Найти сторону основания пирамиды, если площадь сечения равна 36.

10.082. В правильной треугольной пирамиде плоскость, параллельная основанию, делит высоту в отношении 2:1 (считая от основания). Найти площадь сечения, если сторона основания равна $6 \cdot \left(\sqrt[4]{3}\right)$.

10.083. В правильной четырехугольной пирамиде со стороной основания $13\sqrt{5}$ проведена плоскость, параллельная основанию. Найти площадь сечения, если боковое ребро пирамиды делится этой плоскостью в отношении 1:4 (считая от вершины пирамиды).

10.084. На каком расстоянии от вершины правильной четырехугольной пирамиды следует провести плоскость, параллельную основанию, чтобы рассечь пирамиду на две равные по объему части, если высота пирамиды равна $\sqrt[3]{2}$?

10.085. Основание пирамиды — ромб со стороной $15\sqrt{3}$ и острым углом 30°. Найти площадь сечения, параллельного основанию, если плоскость сечения делит высоту в отношении 4:1 (считая от вершины пирамиды).

10.086. Основанием пирамиды служит прямоугольный треугольник с катетом 35. Плоскость, параллельная основанию, делит высоту пирамиды в отношении 2:3 (считая от вершины пирамиды). Найти второй катет основания, если площадь сечения равна 126.

10.087. Объем пирамиды равен 120. Через середину высоты проведена плоскость, параллельная основанию. Найти объем полученной усеченной пирамиды.

10.088. В четырехугольной пирамиде плоскость, параллельная основанию, делит высоту пирамиды пополам. Основанием пирамиды служит прямоугольник со стороной 5. Найти вторую сторону основания, если площадь полученного сечения равна 133.

10.089. В пирамиде на расстоянии 5 от вершины проведена плоскость, параллельная основанию пирамиды. Найти высоту пирамиды, если площади сечения и основания соответственно равны 16 и 25.

10.090. В пирамиде сечение, параллельное основанию, делит высоту в отношении 1:1. Площадь основания больше площади сечения на 381. Найти площадь основания.

Сложность «I»

10.091. Сторона основания правильной треугольной пирамиды равна 6, двугранный угол при основании равен 45°. Определить объем пирамиды.

10.092. Сторона основания правильной треугольной пирамиды равна 1, а ее боковая поверхность $0,5\sqrt{3}$. Найти высоту пирамиды.

10.093. Найти объем правильной треугольной пирамиды, высота которой равна $\sqrt{3}$, а все плоские углы при вершине — прямые.

10.094. Боковая поверхность правильной треугольной пирамиды в $\sqrt{3}$ раз больше площади ее основания. Найти $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$, где α — плоский угол при вершине пирамиды.

10.095. Боковое ребро правильной треугольной пирамиды равно 4 и составляет с плоскостью основания угол 60°. Найти объем пирамиды.

10.096. Высота правильной треугольной пирамиды равна $\sqrt[4]{3}$, двугранный угол при основании равен 60°. Найти полную поверхность пирамиды.

10.097. Найти объем правильной четырехугольной пирамиды, если сторона ее основания равна $\sqrt{3}$, а двугранный угол при основании равен 60°.

10.098. Диагональ квадрата, лежащего в основании правильной четырехугольной пирамиды, равна ее боковому ребру и равна $\sqrt{3}$. Найти объем пирамиды.

10.099. Найти объем правильной четырехугольной пирамиды, если ее боковое ребро составляет с плоскостью основания угол 45°, а площадь диагонального сечения равна 36.

10.100. Сторона основания правильной четырехугольной пирамиды равна $3\cdot\left(\sqrt[6]{2}\right)$. Найти ее объем, если диагональное сечение равновелико основанию.

Сложность «2»

10.101. Основаниями правильной усеченной пирамиды служат квадраты, диагонали которых равны 8 и 5. Боковые ребра наклонены к плоскости основания под углом 45°. Определить объем усеченной пирамиды.

10.102. Определить объем правильной четырехугольной усеченной пирамиды, если ее диагональ равна 18, а длины сторон оснований равны 14 и 10.

10.103. Определить объем правильной усеченной четырехугольной пирамиды, если стороны оснований равны $4\sqrt{2}$ и $\sqrt{2}$, а острый угол боковой грани равен 60°.

10.104. Площади оснований правильной усеченной четырехугольной пирамиды равны 1 и 4, а ее объем равен 21. Найти объем полной пирамиды.

10.105. В правильной усеченной четырехугольной пирамиде стороны оснований равны 1 и 3, а боковая поверхность равна половине полной поверхности. Найти объем усеченной пирамиды.

10.106. Высота правильной четырехугольной усеченной пирамиды равна 3, сторона большего основания равна $9\sqrt{2}$. Боковое ребро составляет с основанием угол 45°. Найти объем усеченной пирамиды.

10.107. Боковое ребро правильной четырехугольной усеченной пирамиды и сторона меньшего основания равны $\sqrt{3\sqrt{3}-5}$. Угол между боковым ребром и стороной большего основания равен 60°. Найти площадь полной поверхности усеченной пирамиды.

10.108. В правильной усеченной четырехугольной пирамиде боковое ребро равно 2, сторона большего основания равна 3, а высота $\sqrt{2}$. Найти площадь диагонального сечения усеченной пирамиды.

10.109. Высота правильной усеченной четырехугольной пирамиды равна $\sqrt{3}$, боковое ребро равно $\sqrt{5}$, а сторона большего основания равна 4. Найти площадь боковой поверхности усеченной пирамиды

10.110. В правильной усеченной четырехугольной пирамиде площадь большего основания равна 16, боковое ребро равно $\sqrt{9,5}$, а высота равна 3. Найти объем усеченной пирамиды.

Сложность «3»

10.111. Боковые ребра пирамиды наклонены к плоскости основания под углом 30°. Основание пирамиды — треугольник со сторонами $\sqrt{3}$, 2 и 3. Найти объем пирамиды.

10.112. Основанием пирамиды служит ромб с острым углом 60°. Боковые грани наклонены к плоскости основания под углом 60°. Определить объем пирамиды, если радиус вписанного в ромб круга равен $\sqrt{3}$.

10.113. Основание пирамиды — равнобедренный треугольник, основание которого равно 6, а высота равна 9. Каждое боковое ребро равно 13. Вычислить объем пирамиды.

10.114. Основанием пирамиды служит прямоугольный треугольник с гипотенузой, равной $2\sqrt{3}$, и острым углом 30°. Боковые ребра пирамиды наклонены к плоскости основания под углом 45°. Найти объем пирамиды.

10.115. Основание четырехугольной пирамиды — прямоугольник с диагональю, равной $2\sqrt{3}$, и углом 60° между диагоналями. Каждое из боковых ребер образует с плоскостью основания угол 45°. Найти объем пирамиды.

10.116. Основанием пирамиды служит треугольник со сторонами 2, $\sqrt{3}$ и 2. Боковые ребра наклонены к плоскости основания под углом 60°. Определить объем пирамиды.

10.117. Основание пирамиды есть прямоугольный треугольник. Боковые ребра пирамиды равны, а боковые грани, проходящие через катеты, составляют с плоскостью основания углы 30° и 60°. Найти объем пирамиды, если ее высота равна 3.

10.118. Основанием пирамиды является прямоугольный треугольник с острым углом 45°. Найти площадь основания пирамиды, если ее боковые ребра наклонены к плоскости основания под углом 60°, а высота пирамиды равна 12.

10.119. Основанием пирамиды служит треугольник со сторонами 5, 6 и 5. Боковые грани пирамиды образуют с ее основанием равные двугранные углы по 45° каждый. Определить объем пирамиды.

10.120. Основание четырехугольной пирамиды — прямоугольник, площадь которого равна $\sqrt{27}$. Боковые ребра пирамиды равны между собой и образуют с плоскостью основания равные углы по 45°. Угол между диагоналями основания равен 60°. Найти объем пирамиды.

§ 34. ФИГУРЫ ВРАЩЕНИЯ

1°. Цилиндр. *Прямым круговым цилиндром* называется фигура, полученная при вращении прямоугольника вокруг оси, проходящей через одну из его сторон.

Объем цилиндра вычисляется по формуле:

$$\boxed{V_{\text{цил}} = \pi R^2 H}$$

площадь его боковой поверхности — по формуле:

$$\boxed{S_{\text{бок цил}} = 2\pi RH}$$

а площадь полной поверхности — по формуле:

$$\boxed{S_{\text{полн цил}} = 2\pi RH + 2\pi R^2}$$

Здесь R — радиус основания, H — высота цилиндра.

2°. Конус и усеченный конус. *Прямым круговым конусом* называется фигура, полученная при вращении прямоугольного треугольника вокруг оси, содержащей его катет.

Объем конуса вычисляется по формуле:

$$\boxed{V_{\text{кон}} = \frac{1}{3}\pi R^2 H}$$

а площадь боковой поверхности конуса — по формуле:

$$\boxed{S_{\text{бок кон}} = \pi RL}$$

Здесь R — радиус основания, H — высота, L — образующая конуса.

Усеченным конусом называется часть конуса, ограниченная его основанием и сечением, параллельным плоскости основания.

Объем усеченного конуса вычисляется по формуле:

$$\boxed{V_{\text{ус кон}} = \frac{1}{3}\pi h\,(R_1^2 + R_1R_2 + R_2^2)}$$

а площадь его боковой поверхности — по формуле:

$$\boxed{S_{\text{бок ус кон}} = \pi(R_1 + R_2)l}$$

Здесь h — высота усеченного конуса, R_1 и R_2 — радиусы его верхнего и нижнего оснований, l — его образующая.

3°. Шар и сфера. Фигура, полученная в результате вращения полукруга вокруг диаметра, называется *шаром*. Поверхность, образуемая при этом полуокружностью, называется *сферой*.

Объем шара радиуса R вычисляется по формуле:

$$\boxed{V_{\text{шара}} = \frac{4}{3}\pi R^3}$$

а площадь сферы радиуса R — по формуле:

$$\boxed{S_{\text{сферы}} = 4\pi R^2}$$

Сложность «0»

10.121. Найти диаметр шара, если его объем равен $\frac{2048\pi}{3}$.

10.122. Объем конуса равен 162π. Найти диаметр основания конуса, если его высота равна 6.

10.123. Площадь полной поверхности цилиндра равна 1596π. Найти высоту цилиндра, если диаметр его основания равен 12.

10.124. Площадь боковой поверхности конуса равна 11, а длина образующей $\frac{11}{\sqrt{2\pi}}$. Найти площадь основания конуса.

10.125. Площадь полной поверхности конуса равна 133π. Найти образующую, если диаметр основания равен 14.

10.126. Длина окружности основания цилиндра равна 56π. Найти объем цилиндра, если его высота равна $\frac{7}{\pi}$.

10.127. Найти площадь полной поверхности конуса, если площадь основания конуса равна 144, а образующая равна $\frac{23}{\sqrt{\pi}}$.

10.128. Площадь основания цилиндра равна 256, а его высота равна $\frac{9}{\sqrt{\pi}}$. Найти полную поверхность цилиндра.

10.129. Найти диаметр шара, если площадь его поверхности равна 289π.

10.130. Найти высоту конуса, если его объем равен 275π, а диаметр основания $5\sqrt{2}$.

Сложность «0»

10.131. Основание конуса равновелико основанию цилиндра, а высоты конуса и цилиндра равны. Найти объем конуса, если объем цилиндра равен 447.

10.132. В куб вписан шар. Найти площадь поверхности шара, если площадь полной поверхности куба равна $\frac{1170}{\pi}$.

10.133. Площадь поверхности шара равно 330. Найти площадь полной поверхности цилиндра, описанного около шара.

10.134. Цилиндр вписан в правильную четырехугольную призму так, что ось цилиндра совпадает с осью симметрии призмы. Объем призмы равен $\frac{772}{\pi}$. Найти объем цилиндра.

10.135. В куб вписан шар. Найти объем шара, если объем куба равен $\frac{156}{\pi}$.

10.136. Основанием конуса служит круг, вписанный в грань куба, а вершина конуса лежит на противоположной грани куба. Найти объем конуса, если объем куба равен $\frac{444}{\pi}$.

10.137. Около шара описан цилиндр. Найти объем цилиндра, если объем шара равен 168.

10.138. Основанием конуса служит круг, вписанный в основание правильной четырехугольной призмы. Вершина конуса лежит на другом основании призмы. Найти объем призмы, если объем конуса равен 17π.

10.139. Основаниями цилиндра служат круги, вписанные в две противоположные грани куба. Объем куба равен $\frac{284}{\pi}$. Найти объем цилиндра.

10.140. В правильную четырехугольную пирамиду вписан конус. Найти объем конуса, если объем пирамиды равен $\frac{288}{\pi}$.

Сложность «0»

10.141. Найти высоту конуса, если его объем равен 48π, а диаметр основания равен $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

10.142. Осевым сечением конуса является равносторонний треугольник. Найти диаметр основания, если площадь полной поверхности конуса равна 363π.

10.143. Диаметр основания конуса равен образующей и равен $2\left(\sqrt[6]{\frac{3}{\pi^2}}\right)$. Найти объем конуса.

10.144. Образующая конуса равна $\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{\pi}}$. Найти площадь полной поверхности конуса, если угол при вершине осевого сечения конуса — прямой.

10.145. Высота конуса равна диаметру основания. Найти радиус основания конуса, если объем конуса равен $\frac{128\pi}{3}$.

10.146. Объем конуса равен 384. Найти площадь осевого сечения конуса, если длина окружности основания конуса равна 15.

10.147. Образующая конуса равна диаметру основания. Найти высоту конуса, если площадь его боковой поверхности равна 150π.

10.148. Площадь осевого сечения конуса равна $4\sqrt{3}$. Найти объем конуса, если его высота равна 2π.

10.149. Осевым сечением конуса является равносторонний треугольник со стороной $\sqrt[6]{\frac{3}{\pi^2}}$. Найти объем конуса.

10.150. Высота конуса равна длине окружности основания. Найти диаметр основания конуса, если его объем равен $18\pi^2$.

Сложность «0»

10.151. Осевым сечением цилиндра является квадрат с диагональю $3\left(\sqrt[6]{\frac{2}{\pi^2}}\right)$. Найти объем цилиндра.

10.152. Площадь полной поверхности цилиндра равна 172π. Найти площадь осевого сечения цилиндра, если диаметр его основания равен 8.

10.153. Площадь боковой поверхности цилиндра равна 15π. Найти площадь основания цилиндра, если его высота равна длине окружности основания.

10.154. Высота цилиндра равна длине окружности основания. Найти диаметр основания цилиндра, если его объем равен $432\pi^2$.

10.155. Площадь полной поверхности цилиндра равна 784π. Найти площадь осевого сечения, если высота цилиндра равна радиусу его основания.

10.156. Осевым сечением цилиндра служит квадрат, площадь которого равна $\frac{25}{\pi}$. Найти площадь полной поверхности цилиндра.

10.157. Площадь боковой поверхности цилиндра равна 125π. Найти площадь осевого сечения, если образующая цилиндра равна радиусу его основания.

10.158. Площадь основания цилиндра равна 121. Найти площадь полной поверхности цилиндра, если его высота равна $\frac{4}{\sqrt{\pi}}$.

10.159. Объем цилиндра равен $171{,}5\pi$. Найти высоту цилиндра, если она вдвое меньше радиуса основания.

10.160. Боковая поверхность цилиндра равна 80. Осевым сечением цилиндра является квадрат. Найти полную поверхность цилиндра.

Сложность «0»

10.161. Площадь поверхности шара равна 43. Найти площадь поверхности другого шара, объем которого в 27 раз больше объема данного шара.

10.162. Объем конуса равен 112. Найти объем другого конуса, у которого радиус основания в 5 раз больше, а высота в 2 раза больше, чем у данного.

10.163. Площадь полной поверхности цилиндра равна 156. Найти площадь полной поверхности цилиндра, у которого радиус основания и высота в 2 раза меньше, чем у данного.

10.164. Объем шара равен 135. Найти объем другого шара, диаметр которого в 3 раза больше, чем у данного.

10.165. Объем цилиндра равен 16. Найти объем другого цилиндра, у которого площадь основания в 4 раза больше, чем у данного, а высота равна высоте данного цилиндра.

10.166. Площадь поверхности шара равна 393. Найти площадь поверхности другого шара, у которого радиус в $\sqrt{3}$ меньше, чем у данного.

10.167. Объем конуса равен 3. Найти объем другого конуса, у которого площадь основания в 25 раз больше, чем у данного, а высота равна высоте данного конуса.

10.168. Объем шара равен 12. Найти объем другого шара, у которого площадь поверхности в 9 раз больше, чем у данного шара.

10.169. Объем цилиндра равен 572. Найти объем другого цилиндра, у которого диаметр основания в 3 раза больше, а высота в 3 раза меньше, чем у данного цилиндра.

10.170. Во сколько раз поверхность шара, радиус которого равен 12, больше поверхности шара, радиус которого составляет 0,25 радиуса первого шара?

Сложность «1»

10.171. Площадь сечения шара плоскостью равна 15. Секущая плоскость отстоит от центра шара на $\sqrt{\dfrac{30}{\pi}}$. Найти площадь поверхности шара.

10.172. Через конец радиуса шара под углом 45° к нему проведена секущая плоскость. Найти площадь полученного сечения, если площадь поверхности шара равна 125.

10.173. Площадь сечения шара плоскостью равна 16π. Найти расстояние от плоскости сечения до центра шара, если объем шара равен $\dfrac{500\pi}{3}$.

10.174. Площадь сечения шара плоскостью в 8 раз меньше площади поверхности шара. Найти расстояние от плоскости сечения до центра шара, если радиус шара равен $\sqrt{242}$.

10.175. Через конец радиуса шара под углом 60° к нему проведена плоскость. Найти объем шара, если площадь полученного сечения равна $\sqrt[3]{36\pi}$.

10.176. Плоскость сечения шара делит его радиус, перпендикулярный этой плоскости, в отношении 1:3 (считая от центра шара). Площадь поверхности шара равна 96. Найти площадь сечения.

10.177. Радиус шара, перпендикулярный плоскости сечения, делится этой плоскостью в отношении 2:1 (считая от центра шара). Площадь сечения равна 2,1. Найти площадь поверхности шара.

10.178. Радиус круга, полученного при сечении шара плоскостью, вдвое меньше радиуса шара. Найти объем шара, если площадь сечения равна $\frac{9}{4}\cdot(\sqrt[3]{\pi})$.

10.179. Шар пересечен плоскостью, отстоящей от центра шара на $\sqrt{\frac{10}{\pi}}$. Найти площадь сечения, если площадь поверхности шара равна 78

10.180. Через конец радиуса шара проведена плоскость под углом 60° к нему. Площадь полученного сечения равна 11. Найти площадь поверхности шара.

Сложность «I»

10.181. Развертка боковой поверхности цилиндра представляет собой квадрат, площадь которого равна 76π. Найти площадь основания цилиндра.

10.182. Высота цилиндра равна диаметру основания. Площадь развертки боковой поверхности цилиндра равна 104. Найти площадь основания цилиндра.

10.183. Развертка боковой поверхности конуса представляет собой треть круга радиуса $\sqrt{\frac{990}{\pi}}$. Найти площадь основания конуса.

10.184. Развертка боковой поверхности конуса представляет собой полукруг радиуса $\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt[3]{\pi}}$. Найти объем конуса.

10.185. Радиус основания конуса равен $\sqrt[6]{\frac{15}{\pi^2}}$, а угол при вершине в развертке его боковой поверхности равен 90°. Определить объем конуса.

10.186. Высота цилиндра равна радиусу его основания. Площадь развертки боковой поверхности цилиндра равна 1002. Найти площадь основания цилиндра.

10.187. Найти высоту конуса, если развертка боковой поверхности конуса представляет собой четверть круга радиуса 60.

10.188. Высота цилиндра равна длине окружности его основания. Найти объем цилиндра, если площадь развертки боковой поверхности цилиндра равна $\sqrt[3]{2304\pi^2}$.

10.189. Развертка боковой поверхности конуса представляет собой четверть круга радиуса $\sqrt{\frac{176}{\pi}}$. Найти площадь основания конуса.

10.190. Развертка боковой поверхности цилиндра представляет собой квадрат со стороной $\sqrt[3]{40\pi}$. Найти объем цилиндра.

Сложность «2»

10.191. Высота конуса равна $\sqrt{\frac{3}{\pi}}$, а образующая равна $\sqrt{\frac{5}{\pi}}$. Найти поверхность вписанного в конус полушара, основание которого лежит на основании конуса.

10.192. Конус и полушар имеют общее основание, радиус которого равен $\sqrt[4]{\frac{5}{\pi^2}}$. Найти площадь боковой поверхности конуса, если его объем равен объему полушара.

10.193. В шар радиуса $\frac{4}{\sqrt[3]{\pi}}$ вписан конус, угол при вершине осевого сечения которого равен 120°. Найти объем конуса.

10.194. Определить площадь поверхности шара, описанного около конуса, у которого радиус основания равен $\frac{2}{\sqrt{\pi}}$, а высота равна $\frac{1}{\sqrt{\pi}}$.

10.195. Объем шара, вписанного в конус, равен $\frac{4}{5}$, угол при вершине осевого сечения конуса равен 60°. Найти объем конуса.

10.196. В шар вписан конус. Площадь осевого сечения конуса равна $\sqrt[3]{\frac{9}{\pi^2}}$, а угол между высотой и образующей равен 45°. Найти объем шара.

10.197. В конус, осевое сечение которого есть равносторонний треугольник, вписан шар. Найти объем конуса, если объем шара равен $\frac{32}{3}$.

10.198. Высота конуса равна 8, а образующая равна 10. Найти радиус вписанного в конус шара.

10.199. В шар вписан конус, образующая которого равна диаметру основания. Найти отношение полной поверхности конуса к поверхности шара.

10.200. В шар вписан конус, высота и радиус основания которого соответственно равны 3 и $3\sqrt{3}$. Найти радиус шара.

Сложность «2»

10.201. Прямоугольник со сторонами $\sqrt{\frac{3}{\pi}}$ и $\sqrt{\frac{27}{\pi}}$ вращается вокруг меньшей стороны. Найти площадь полной поверхности фигуры вращения.

10.202. Равнобедренный треугольник с основанием $2\sqrt{\frac{5}{\pi}}$ и высотой $\frac{5}{2\sqrt{\pi}}$ вращается вокруг высоты. Найти площадь полной поверхности фигуры вращения.

10.203. Квадрат со стороной $\sqrt[6]{\frac{9}{8\pi^2}}$ вращается вокруг диагонали. Найти объем фигуры вращения.

10.204. Равнобедренный треугольник с основанием $\frac{9}{\pi}$ и высотой $7\sqrt{2}$ вращается вокруг основания. Найти объем фигуры вращения.

10.205. Прямоугольный треугольник с гипотенузой $\frac{2}{\sqrt[3]{\pi}}$ и острым углом 30° вращается вокруг гипотенузы. Найти объем фигуры вращения.

10.206. Равносторонний треугольник со стороной $\sqrt[3]{\frac{7}{\pi}}$ вращается вокруг одной из сторон. Найти объем фигуры вращения.

10.207. Ромб с диагоналями $\sqrt{15}$ и $\frac{60}{\pi}$ вращается вокруг большей диагонали. Найти объем фигуры вращения.

10.208. Равносторонний треугольник вращается вокруг высоты, длина которой равна $2\sqrt{\frac{19}{\pi}}$. Найти площадь полной поверхности фигуры вращения.

10.209. Прямоугольник со сторонами $\sqrt{\frac{7}{\pi}}$ и $\sqrt{\frac{1}{7\pi}}$ вращается вокруг прямой, проходящей через середины больших сторон. Найти площадь полной поверхности фигуры вращения.

10.210. Прямоугольный треугольник с катетами $\frac{6}{\sqrt{\pi}}$ и $\frac{8}{\sqrt{\pi}}$ вращается вокруг меньшего катета. Найти площадь полной поверхности фигуры вращения.

§ 35. РАЗНЫЕ ЗАДАЧИ

Сложность «3»

10.211. В равнобедренном треугольнике основание в 1,5 раза больше боковой стороны. Высота треугольника, проведенная к основанию, образует с плоскостью P угол, равный α, а основание треугольника лежит в этой плоскости. Найти угол, образованный боковой стороной треугольника с плоскостью P, если $\sin\alpha = \frac{2}{\sqrt{7}}$.

10.212. Острый угол ромба равен 60°. Стороны ромба образуют с плоскостью P углы, равные α, а его меньшая диагональ лежит в этой плоскости. Определить величину двугранного угла, образованного плоскостью ромба и плоскостью P, если $\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{4}$.

10.213. В прямоугольном треугольнике один катет вдвое больше другого. Меньший катет треугольника лежит в плоскости P, а больший катет образует с этой плоскостью угол, равный α. Найти величину угла, образованного гипотенузой треугольника и плоскостью P, если $\sin\alpha = \frac{\sqrt{10}}{4}$.

10.214. В прямоугольнике одна из сторон вдвое больше другой. Большая сторона прямоугольника лежит в плоскости P, а диагонали прямоугольника образуют с этой плоскостью углы, равные α. Найти величину двугранного угла, образованного плоскостью прямоугольника и плоскостью P, если $\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{10}}$.

10.215. В равнобедренном треугольнике высота, опущенная на основание, равна основанию. Боковые стороны треугольника образуют с плоскостью P углы, равные α. Найти величину двугранного угла, образованного плоскостью треугольника и плоскостью P, если $\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$, а основание треугольника лежит в плоскости P.

10.216. Две стороны равностороннего треугольника образуют с плоскостью P углы, равные α, а третья сторона лежит в этой плоскости. Найти величину двугранного угла, образованного плоскостью треугольника и плоскостью P, если $\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{4}$.

10.217. Диагонали квадрата образуют с плоскостью P углы, равные α. Найти величину двугранного угла, образованного плоскостью квадрата и плоскостью P, если $\sin\alpha = \frac{\sqrt{6}}{4}$, а одна из сторон квадрата лежит в плоскости P.

10.218. Катеты равнобедренного прямоугольного треугольника образуют с плоскостью P углы, равные α. Найти величину двугранного угла, образованного плоскостью треугольника и плоскостью P, если $\sin\alpha = \frac{\sqrt{2}}{4}$, а гипотенуза треугольника лежит в плоскости P.

10.219. Стороны квадрата образуют с плоскостью P углы, равные α, а одна из диагоналей лежит в этой плоскости. Найти синус двугран-

...ого угла, образованного плоскостью квадрата и плоскостью P, если $\sin\alpha = \frac{\sqrt{2}}{10}$.

10.220. Величина угла при вершине равнобедренного треугольника равна $120°$. Боковые стороны треугольника образуют с плоскостью P углы, равные α. Найти величину двугранного угла, образованного плоскостью треугольника и плоскостью P, если $\sin\alpha = \frac{\sqrt{2}}{4}$, а основание треугольника лежит в плоскости P.

Сложность «3»

10.221. В равнобочной трапеции большее основание вдвое больше каждой из остальных сторон. Боковые стороны трапеции образуют с плоскостью P равные углы α. Найти косинус угла между диагональю трапеции и плоскостью P, если $\cos\alpha = \sqrt{0,43}$, а основания трапеции лежат в этой плоскости.

10.222. Одна из сторон ромба лежит в плоскости P, а его меньшая диагональ наклонена к этой плоскости под углом α. Тупой угол ромба равен $120°$. Найти косинус двугранного угла, образованного плоскостью ромба и плоскостью P, если $\cos\alpha = \frac{\sqrt{19}}{8}$.

10.223. В равнобочной трапеции большее основание вдвое больше каждой из остальных сторон. Диагонали трапеции образуют с плоскостью P равные углы α. Найти косинус двугранного угла, образованного плоскостью трапеции и плоскостью P, если $\cos\alpha = \sqrt{0,79}$, а основания трапеции лежат в плоскости P.

10.224. Одна из сторон ромба лежит в плоскости P. Острый угол ромба равен $60°$, а его большая диагональ наклонена к этой плоскости под углом α. Найти косинус двугранного угла, образованного плоскостью ромба и плоскостью P, если $\cos\alpha = \frac{\sqrt{19}}{5}$.

10.225. В параллелограмме одна из сторон вдвое больше другой, а острый угол равен $60°$. Одна из больших сторон параллелограмма лежит в плоскости P, а его большая диагональ образует с этой плоскостью угол α. Найти величину косинуса двугранного угла, образованного плоскостью параллелограмма и плоскостью P, если $\cos\alpha = \sqrt{\frac{103}{112}}$.

10.226. В прямоугольной трапеции боковая сторона равна меньшему основанию и образует с большим основанием угол $60°$. Большая диагональ трапеции наклонена к плоскости P под углом α, а основания трапеции лежат в этой плоскости. Найти косинус двугранного угла, образованного плоскостью трапеции и плоскостью P, если $\cos\alpha = \sqrt{0,76}$.

10.227. В параллелограмме одна из сторон вдвое больше другой, а острый угол равен 60°. Одна из меньших сторон параллелограмма лежит в плоскости P, а его большая диагональ образует с этой плоскостью угол α. Найти косинус угла, образованного меньшей диагональю параллелограмма с плоскостью P, если $\cos\alpha = \sqrt{\frac{67}{112}}$.

10.228. В равнобочной трапеции высота равна меньшему основанию и втрое меньше большего основания. Диагонали трапеции наклонены к плоскости P под углом α. Найти косинус двугранного угла, образованного плоскостью трапеции и плоскостью P, если $\cos\alpha = \sqrt{0,818}$, а основания трапеции лежат в плоскости P.

10.229. Меньшая диагональ параллелограмма перпендикулярна его меньшей стороне и в 3 раза больше ее. Большая диагональ параллелограмма образует с плоскостью P угол α, а его меньшие стороны лежат в этой плоскости. Найти величину двугранного угла, образованного плоскостью параллелограмма и плоскостью P, если $\cos\alpha = \sqrt{\frac{17}{26}}$.

10.230. В параллелограмме одна из диагоналей перпендикулярна боковой стороне и равна ей. Одна из больших сторон параллелограмма лежит в плоскости P, а его большая диагональ образует с этой плоскостью угол α. Найти косинус двугранного угла, образованного плоскостью параллелограмма и плоскостью P, если $\cos\alpha = \sqrt{0,936}$.

Сложность «3»

10.231. Угол между высотой правильной треугольной пирамиды и боковой гранью равен 30°. Найти длину стороны основания, если радиус вписанного в пирамиду шара равен 1.

10.232. Угол между высотой правильной треугольной пирамиды и боковой гранью равен 30°. Найти длину бокового ребра, если радиус вписанного в пирамиду шара равен $2\sqrt{21}$.

10.233. Угол между высотой правильной треугольной пирамиды и боковой гранью равен 30°. Найти объем пирамиды, если радиус вписанного в нее шара равен $\sqrt{3}$.

10.234. Апофема правильной треугольной пирамиды равна $\sqrt[4]{3}$. Центр вписанного в пирамиду шара отстоит от вершины пирамиды на расстоянии, вдвое большем радиуса шара. Найти площадь основания пирамиды.

10.235. Апофема правильной треугольной пирамиды равна 5, а высота пирамиды равна 4. Найти радиус вписанного в пирамиду шара.

10.236. Угол между высотой правильной треугольной пирамиды и боковой гранью равен 30°. Найти площадь боковой поверхности пирамиды, если радиус вписанного в нее шара равен $\sqrt[4]{3}$.

10.237. Найти косинус угла наклона боковой грани к плоскости основания правильной треугольной пирамиды, если радиус вписанного в пирамиду шара в 3 раза меньше ее высоты.

10.238. Вычислить радиус шара, вписанного в треугольную пирамиду, все ребра которой равны $\sqrt{1,5}$.

10.239. В треугольную пирамиду, все ребра которой равны между собой, вписан шар, радиус которого равен $\sqrt{3}$. Найти объем пирамиды.

10.240. Найти длину ребра треугольной пирамиды, у которой все ребра равны между собой, если радиус вписанного в пирамиду шара равен $\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$.

Сложность «3»

10.241. Длина бокового ребра правильной треугольной пирамиды равна $\sqrt{3}$. Боковое ребро составляет с плоскостью основания угол 60°. Найти радиус описанного около пирамиды шара.

10.242. Радиус описанного около правильной треугольной пирамиды шара равен 4. Боковое ребро составляет с плоскостью основания угол 30°. Найти длину высоты пирамиды.

10.243. Высота правильной треугольной пирамиды равна 1, а радиус описанного около пирамиды шара равен 8. Найти косинус угла между боковым ребром и высотой.

10.244. Высота правильной треугольной пирамиды равна 2, а радиус описанного около пирамиды шара равен 1,25. Найти тангенс угла наклона боковой грани к плоскости основания.

10.245. Сторона основания правильной треугольной пирамиды равна $\sqrt{3}$. Боковое ребро равно $\sqrt{5}$. Найти радиус описанного около пирамиды шара.

10.246. Боковое ребро правильной треугольной пирамиды равно 1, а радиус описанного около пирамиды шара равен 1. Найти длину стороны основания.

10.247. Сторона основания правильной треугольной пирамиды равна $\sqrt{6}$, а радиус описанного около пирамиды шара равен $\sqrt{2}$. Найти длину бокового ребра.

10.248. Высота правильной треугольной пирамиды равна $\sqrt{\frac{11}{3}}$, а радиус описанного около пирамиды шара равен $\frac{2,5\sqrt{3}}{\sqrt{11}}$. Найти длину апофемы.

10.249. Длина бокового ребра правильной треугольной пирамиды равна $\sqrt{10}$, а радиус описанного около пирамиды шара равен $\frac{5\sqrt{3}}{\sqrt{26}}$. Найти длину апофемы.

10.250. Апофема правильной треугольной пирамиды равна $\frac{\sqrt{5}}{2}$, а сторона основания равна $\sqrt{3}$. Найти радиус описанного около пирамиды шара.

РЕШЕНИЯ И УКАЗАНИЯ

Раздел I

Арифметические преобразования

§ 1. Арифметические действия

1.001. 1) $26{,}7-13\frac{1}{5}=26{,}7-13{,}2=13{,}5$. 2) $13{,}5:1{,}8=7{,}5$;
3) $1{,}88+2\frac{3}{25}=1{,}88+2{,}12=4$; 4) $0{,}125\cdot4=0{,}5$; 5) $7{,}5+0{,}5=8{,}0$;
6) $22\ \frac{3}{5{,}5}=\frac{66}{5{,}5}=12$; 7) $8{,}0+12=20$.
Ответ: 20.

1.011. 1) $\frac{41}{18}-\frac{17}{36}=\frac{65}{36}$; 2) $\frac{65}{36}\cdot\frac{18}{65}=\frac{1}{2}$; 3) $\frac{8}{7}-\frac{23}{49}=\frac{33}{49}$;
4) $\frac{33}{49}\cdot\frac{99}{49}=\frac{1}{3}$; 5) $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{7}{6}=2$.
Ответ: 2.

1.021. 1) $2{,}3+5:\frac{25}{4}=2{,}3+\frac{4}{5}=2{,}3+0{,}8=3{,}1$; 2) $3{,}1\cdot7=21{,}7$;
3) $0{,}8\ \ 0{,}125=0{,}1$; 4) $0{,}1+6{,}9=7$; 5) $21{,}7:7=3{,}1$.
Ответ. 3,1.

1.031. 1) $\frac{108}{75}+0{,}56=1{,}44+0{,}56=2$; 2) $9\cdot2=18$; 3) $0{,}25:\frac{5}{6}=0{,}3$;
4) $0{,}3-\frac{4}{25}=0{,}14$; 5) $\frac{33}{2}-\frac{124}{9}=\frac{49}{18}$; 6) $0{,}14:\frac{49}{18}=\frac{2{,}52}{49}=\frac{36}{700}$;
7) $\frac{18}{5x}=\frac{36}{700}$; 8) $x=\frac{700\ \ 18}{36\cdot5}=70$.
Ответ: 70.

1.041. Рассмотрим числа, обратные данным, т.е. $\frac{1}{2};\frac{1}{3};\frac{1}{5};1$. Тогда их сумма составит $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+1=\frac{61}{30}$. Найдем искомые части: 1) $18{,}3:\frac{61}{30}\cdot\frac{1}{2}=4{,}5$;
2) $9\cdot\frac{1}{3}=3$; 3) $9\ \frac{1}{5}=1{,}8$; 4) $9\ \ 1=9$.
Ответ: 4,5; 3; 1,8; 9.

1.051. $0{,}(7)=0{,}777\ldots=0{,}7+0{,}07+0{,}007+\ldots=\frac{0{,}7}{1-0{,}1}=\frac{7}{9}$.
Ответ. $\frac{7}{9}$.

1.055. Указание. Представить число 28,1 (51) в виде
$28{,}151515151\ldots=28{,}1+0{,}051+0{,}00051+\ldots$

§ 2. Проценты

1.061. $75 \cdot \frac{4}{100} = 3$.

Ответ: 3

1.065. Указание. Представить $18\frac{1}{3}$ % в виде $\frac{55}{3} \cdot \frac{1}{100}$

1.071. $24 : 0{,}08 = 300$.

Ответ: 300.

1.081. $\frac{200-150}{200} \cdot 100\% = 25\%$.

Ответ: 25%.

1.091. 1) $15{,}5 \cdot 0{,}23 = 3{,}565$; 2) $3{,}565 : 0{,}05 = 71{,}3$.

Ответ: 71,3.

1.101. $14\frac{2}{25} : 0{,}88 = 16$.

Ответ: 16.

1.111. Если первое число принять за x, а второе — за y, то после их увеличения получим $1{,}3x \cdot 1{,}2y = 1{,}56xy$, что по отношению к xy составляет 156%.

Ответ: 56%.

§ 3. Действия со степенями и радикалами

1.121. 1) $6 \cdot \left(\frac{5}{18}\right)^0 = 6 \cdot 1 = 6$; 2) $8-6 = 2$; 3) $2^{-2} = \frac{1}{4} = 0{,}25$.

Ответ: 0,25.

1.131. 1) $(2^{-1/2})^{-6} = 2^3 = 8$; 2) $(0{,}125)^{-1} = \left(\frac{1}{8}\right)^{-1} = 8$;

3) $(2^{1/2})^0 = 2^0 = 1$; 4) $8-8+1 = 1$.

Ответ: 1.

1.141. 1) $3 \cdot 2^7 \cdot 4^5 \cdot \left(\frac{1}{32}\right)^2 = 3 \cdot 2^7 \cdot 2^{10} \cdot \left(\frac{1}{2^5}\right)^2 = 3 \cdot 2^{17} \cdot \frac{1}{2^{10}} = 3 \cdot 2^7$; 2) $\frac{2^5}{4} = 2^3$;

3) $3 \cdot 2^7 + 2^3 = 2^3(3 \cdot 2^4 + 1) = 2^3 \cdot 49 = 8 \cdot 49 = 392$; 4) $392 : 245 = 1{,}6$.

Ответ: 1,6.

1.151. 1) $63^2-27^2 = (63-27)(63+27) = 36 \cdot 90 = 3240$; 2) $3240 : 5 = 648$;

3) $\frac{12}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{648} = 12\sqrt{\frac{648}{2}} = 12\sqrt{324} = 12 \cdot 18 = 216$; 4) $\sqrt[3]{216} = 6$

Ответ: 6.

1.161. 1) $(10^{1/3}-7^{1/3})\left(\sqrt[3]{100}+\sqrt[3]{70}+\sqrt[3]{49}\right) = (10^{1/3}-7^{1/3})(10^{2/3}+7^{1/3} \cdot 10^{1/3}+7^{2/3}) =$
$= (10^{1/3})^3 - (7^{1/3})^3 = 10-7 = 3$;

2) $\left(3\sqrt{16}-3\sqrt{6}\right)^2\left(\frac{\sqrt{16}}{3}+\frac{\sqrt{6}}{3}\right)^2 = 9\left(\sqrt{16}-\sqrt{6}\right)^2 \cdot \frac{1}{9}\left(\sqrt{16}+\sqrt{6}\right)^2 =$

$= \left(\left(\sqrt{16}-\sqrt{6}\right)\left(\sqrt{16}+\sqrt{6}\right)\right)^2 = (16-6)^2 = 100$; 3) $3 : 100 = 0{,}03$.

Ответ: 0,03.

1.171. 1) $(12^{1/2}-\sqrt{8}\,)\cdot 3^{1/2}=(12^{1/2}-8^{1/2})\ \ 3^{1/2}=(12\cdot 3)^{1/2}-(8\cdot 3)^{1/2}=$
$=36^{1/2}-24^{1/2}=6-2\ \ \sqrt{6}\,;$
2) $36^{1/2}-2\sqrt{6}\ =6-2\sqrt{6}\,;$
3) $\dfrac{6-2\sqrt{6}}{\left(6-2\sqrt{6}\,\right)\left(2+\dfrac{2}{9}\right)}=0{,}45.$

Ответ: 0,45.

1.181. 1) $\sqrt{34}+\sqrt{8}+\sqrt{17}+2=\sqrt{2}\cdot\sqrt{17}+2\sqrt{2}+\sqrt{17}+2=$
$=\left(\sqrt{2}\cdot\sqrt{17}+\sqrt{17}\,\right)+2\sqrt{2}+2=\sqrt{17}\left(\sqrt{2}+1\right)+2\left(\sqrt{2}+1\right)=$
$=\left(\sqrt{17}+2\right)\left(\sqrt{2}+1\right);$
2) $\left(\sqrt{17}-2\right)\left(\sqrt{17}+2\right)\left(\sqrt{2}+1\right)=(17-4)\left(\sqrt{2}+1\right)=13\left(\sqrt{2}+1\right);$
3) $\dfrac{13\left(\sqrt{2}+1\right)}{\sqrt{2}+1}=13.$
Ответ: 13.

1.191. 1) $4\sqrt{7}-\sqrt{119}-4\sqrt{3}+\sqrt{51}=4\sqrt{7}-\sqrt{7}\cdot\sqrt{17}-4\sqrt{3}+\sqrt{3}\ \ \sqrt{17}=$
$=\left(4\sqrt{7}-4\sqrt{3}\,\right)-\left(\sqrt{7}\cdot\sqrt{17}-\sqrt{3}\cdot\sqrt{17}\,\right)=4\left(\sqrt{7}-\sqrt{3}\,\right)-\sqrt{17}\left(\sqrt{7}-\sqrt{3}\,\right)=$
$=\left(4-\sqrt{17}\,\right)\left(\sqrt{7}-\sqrt{3}\,\right);$
2) $4\sqrt{7}+\sqrt{119}+4\sqrt{3}+\sqrt{51}=4\sqrt{7}+\sqrt{7}\cdot\sqrt{17}+4\sqrt{3}+\sqrt{3}\ \ \sqrt{17}=$
$=\left(4\sqrt{7}+4\sqrt{3}\,\right)+\left(\sqrt{7}\cdot\sqrt{17}+\sqrt{3}\cdot\sqrt{17}\,\right)=4\left(\sqrt{7}+\sqrt{3}\,\right)+\sqrt{17}\left(\sqrt{7}+\sqrt{3}\,\right)=$
$=\left(4+\sqrt{17}\,\right)\left(\sqrt{7}+\sqrt{3}\,\right);$
3) $\left(4-\sqrt{17}\,\right)\left(\sqrt{7}+\sqrt{3}\,\right)\left(\sqrt{7}+\sqrt{3}\,\right)\left(4+\sqrt{17}\,\right)=$
$=\left(4-\sqrt{17}\,\right)\left(4+\sqrt{17}\,\right)\left(\sqrt{7}-\sqrt{3}\,\right)\left(\sqrt{7}+\sqrt{3}\,\right)=(16-17)(7-3)=-4$
Ответ: -4.

1.201. $\left(\sqrt{21}-2\right)\sqrt{25+2\sqrt{84}}=\sqrt{\left(\sqrt{21}-2\right)^2\left(25+2\sqrt{84}\,\right)}=$
$=\sqrt{\left(25-4\sqrt{21}\,\right)\left(25+4\sqrt{21}\,\right)}=\sqrt{25^2-16\cdot 21}=\sqrt{289}=17.$

Ответ: 17.

1.211. Пусть алгебраическая операция * над двумя числами a и b определена таким образом, что $a*b=\dfrac{ab}{a+b}$. Имеем $2*x=\dfrac{2x}{2+x}$, $3*4=\dfrac{3\cdot 4}{3+4}$, откуда $\dfrac{2x}{2+x}=\dfrac{12}{7}$, или $14x=24+12x$, откуда $x=12$.

Ответ: 12.

Раздел II

Алгебраические преобразования

§ 4. Многочлены

2.001. $(a+5)(a^2-5a+25)=a^3+5a^2-5a^2+25a-25a+125=a^3+125.$
Ответ: $a^3+125.$

2.010. Указание. Полезно сначала раскрыть скобки.

2.011. $5a\,(2x-3)-3x\,(2x-3)+(3-2x)=5a\,(2x-3)-3x\,(2x-3)-(2x-3)=$
$=(2x-3)\,(5a-3x-1).$
Ответ: $(2x-3)\,(5a-3x-1).$

2.021. Используя формулу $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$, найдем $4x^2+12x+9=$
$=(2x+3)^2$. Поэтому $\otimes=2;\ \lozenge=12.$
Ответ: $\otimes=2;\ \lozenge=12.$

2.031. $(2c+1)^3-27=(2c+1)^3-3^3=(2c+1-3)\,((2c+1)^2+3(2c+1)+3^2)=$
$=(2c-2)(4c^2+1+4c+6c+3+9)=2(c-1)(4c^2+10c+13).$
Ответ: $2(c-1)(4c^2+10c+13).$

2.036. Указание. Сгруппировать слагаемые в виде $(27a^3-8)-(3a^2-2a).$

2.041. $x^2-2x+5=(x^2-2x+1)+4=(x-1)^2+4.$
Ответ: $(x-1)^2+4.$

2.051.

$$\begin{array}{r|l}
-\,a^3+3a^2+4a+2 & a+1 \\ \cline{2-2}
\underline{a^3+a^2} & a^2+2a+2 \\
-\,2a^2+4a+2 & \\
\underline{2a^2+2a} & \\
-\,2a+2 & \\
\underline{2a+2} & \\
0 &
\end{array}$$

Ответ: $a^2+2a+2.$

2.061. 1) $-2x+x^2-1+2x^3=2x^3+x^2-2x-1;$

2)
$$\begin{array}{r|l}
-\,2x^3+x^2-2x-1 & x+1 \\ \cline{2-2}
\underline{2x^3+2x^2} & 2x^2-x-1 \\
-\,-x^2-2x-1 & \\
\underline{-x^2-x} & \\
-\,-x-1 & \\
\underline{-x-1} & \\
0 &
\end{array}$$

Ответ: $2x^2-x-1.$

2.071. Раскроем скобки и приведем подобные члены:

$(x-3)^3-(2x(3+(x-3)^2)-10)=$
$=x^3-9x^2+27x-27-(2x(3+x^2-6x+9)-10)=$
$=x^3-9x^2+27x-27-24x-2x^3+12x^2+10=-x^3+x^2+3x-17$

Ответ: -1.

2.081. 1) $\frac{8x-35a-3}{15a}=\frac{8}{15a}x-\frac{35a+3}{15a}$;

2) $\left(\frac{7}{3}+\frac{1}{5a}\right)(x-1)+\frac{x}{3}=\left(\frac{8}{3}+\frac{1}{5a}\right)x-\left(\frac{7}{3}+\frac{1}{5a}\right)$;

3) $\frac{8}{15a}x-\frac{35a+3}{15a}=\left(\frac{8}{3}+\frac{1}{5a}\right)x-\left(\frac{7}{3}+\frac{1}{5a}\right)$.

Так как последнее равенство по условию есть тождество (верно для всех x), то должно быть:

а) $\frac{8}{15a}=\frac{8}{3}+\frac{1}{5a}$; б) $-\frac{35a+3}{15a}=-\left(\frac{7}{3}+\frac{1}{5a}\right)$.

Равенство б) выполняется тождественно. Из равенства а) находим $8=40a+3$, откуда $a=\frac{1}{8}=0{,}125$

Ответ: 0,125.

2.091. 1) $(3x+4)^2=9x^2+24x+16$;
2) $9x^2+24x+16=(3b-4a)x^2+\frac{12}{b}(17-a)x+16$.

Следовательно, $\begin{cases}9=3b-4a\\ 24=\frac{12}{b}(17-a)\end{cases}$ или $\begin{cases}3b-4a=9\\ 2b+a=17\end{cases}$

откуда $a=3$, $b=7$.

Ответ: 3; 7.

§ 5. Алгебраические дроби

2.101. 1) $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3=(a+b)^3$;

2) $\frac{(a+b)^3}{(a-b)(a+b)}=\frac{(a+b)^2}{a-b}$.

Ответ: $\frac{(a+b)^2}{a-b}$.

2.111. $\frac{a^2+4a+2}{a}-a-\frac{2}{a}=\frac{a^2+4a+2-a^2-2}{a}=4$.

Ответ: 4.

2.121. $\frac{x}{a^2+ax}+\frac{1}{a+x}=\frac{x}{a(a+x)}+\frac{1}{a+x}=\frac{x+a}{a(a+x)}=\frac{1}{a}$.

Ответ: $\frac{1}{a}$.

2.131. $\frac{b^2}{a^2+ab+b^2}+\frac{4a^2b-ab^2}{b^3-a^3}+\frac{a}{a-b}=$

$$=\frac{b^2(b-a)+4a^2b-ab^2+(a^2+ab+b^2)(-a)}{b^3-a^3}=$$

$$=\frac{b^3-3ab^2+3a^2b-a^3}{b^3-a^3}=\frac{(b-a)^3}{b^3-a^3}=\frac{(b-a)^2}{b^2+ab+a^2}.$$

Ответ: $\frac{(b-a)^2}{b^2+ab+a^2}$.

2.141. 1) $\frac{a}{a-3}+\frac{12a^2-9a}{27-a^3}+\frac{9}{a^2+3a+9}=\frac{-a(a^2+3a+9)+12a^2-9a+9(3-a)}{27-a^3}=$

$$=\frac{-a^3+9a^2-27a+27}{27-a^3}=\frac{(3-a)^3}{27-a^3}=\frac{(3-a)^2}{9+3a+a^2}.$$

2) $1:\frac{(3-a^2)}{9+3a+a^2}=\frac{a^2+3a+9}{(3-a)^2}$;

3) $\frac{9a}{(3-a)^2}-\frac{a^2+3a+9}{(3-a)^2}=\frac{-a^2+6a-9}{(3-a)^2}=-\frac{(a-3)^2}{(3-a)^2}=-1.$

Ответ: -1.

2.151. 1) $\frac{6a}{a^3-8}+\frac{2a}{a^2+2a+4}+\frac{1}{2-a}=\frac{6a+2a(a-2)-(a^2+2a+4)}{a^3-8}=$

$$=\frac{a^2-4}{a^3-8}=\frac{a+2}{a^2+2a+4};$$

2) $\frac{a+2}{a-2}:\frac{a+2}{a^2+2a+4}=\frac{a^2+2a+4}{a-2}$; 3) $\frac{a^2+2a+4}{a-2}-\frac{4a+4}{a-2}=\frac{a^2-2a}{a-2}=a.$

Ответ: 19,25.

2.161. 1) $\frac{m}{n}-\frac{n}{m}=\frac{m^2-n^2}{nm}$; 2) $\frac{m^2-n^2}{nm}:(m+n)=\frac{m-n}{nm}$;

3) $m\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{m}\right)=\frac{m-n}{n}$; 4) $\frac{m-n}{nm}+\frac{m-n}{n}=\frac{(m-n)(m+1)}{nm}$;

5) $\frac{(m-n)(m+1)}{nm}:\frac{(m+1)}{nm}=m-n.$

Ответ: 177.

2.171. Разделим многочлен, стоящий в числителе дроби, на многочлен, стоящий в знаменателе дроби (уголком).

$$\begin{array}{r|l} x^4-1 & x^2+3 \\ \cline{2-2} -\;x^4+3x^2 & x^2-3 \\ \cline{1-1} -3x^2-1 & \\ -\;-3x^2-9 & \\ \cline{1-1} 8 & \end{array}$$

Таким образом, целая часть дроби равна $x^2 - 3$, а остаток равен 8,

то есть $\frac{x^4-1}{x^2+3} = x^2 - 3 + \frac{8}{x^2+3}$.

Ответ: $\frac{x^4-1}{x^2+3} = x^2 - 3 + \frac{8}{x^2+3}$.

2.172. Указание: Расположить многочлены, стоящие в числителе и в знаменателе дроби, по убывающим степеням буквы x.

2.181. Имеем $\frac{1}{x(x-1)(x+2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+2}$.

1) Умножив обе части равенства на x (это можно сделать, так как $x \neq 0$), получим:

$$\frac{1}{(x-1)(x+2)} = A + x\left(\frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+2}\right)$$

Положим $x = 0$ (теперь это можно сделать, так как в полученном равенстве уже нет ограничения $x \neq 0$). Тогда $\frac{1}{(-1)\cdot 2} = A$, откуда $A = -\frac{1}{2}$.

2) Умножив обе части равенства на $(x - 1)$ и подставив $x = 1$ в полученное равенство, найдем $B = \frac{1}{3}$.

3) Умножив обе части равенства на $(x + 2)$ и затем подставив $x = -2$ в полученное равенство, найдем $C = \frac{1}{6}$.

Замечание: Фактически таким способом осуществляется предельный переход.

Ответ: $-\frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{1}{6}$.

§ 6. Степени и радикалы

2.191. 1) $\frac{1+(a+x)^{-1}}{1-(a+x)^{-1}} = \frac{1+\frac{1}{a+x}}{1-\frac{1}{a+x}} = \frac{a+x+1}{a+x-1}$;

2) $1 - \frac{1-(a^2+x^2)}{2ax} = \frac{(a+x)^2-1}{2ax} = \frac{(a+x-1)(a+x+1)}{2ax}$;

3) $\frac{a+x+1}{a+x-1} \cdot \frac{(a+x-1)(a+x+1)}{2ax} = \frac{(a+x+1)^2}{2ax}$.

Ответ: $\frac{(a+x+1)^2}{2ax}$.

2.201. 1) $\frac{a^{1.5}+b^{1.5}}{a^{0.5}+b^{0.5}} = \frac{(a^{0.5}+b^{0.5})(a-(ab)^{0.5}+b)}{a^{0.5}+b^{0.5}} = a-(ab)^{0.5}+b = a-\sqrt{ab}+b$;

2) $a - \sqrt{ab} + b - \sqrt{ab} = a - 2\sqrt{ab+b} = \left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right)^2$;

3) $\frac{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2}{a-b}=\frac{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2}{(\sqrt{a})^2-\left(\sqrt{b}\right)^2}=\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$;

4) $\frac{2b^{0,5}}{a^{0,5}+b^{0,5}}=\frac{2\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$;

5) $\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}+\frac{2\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}=\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}+2\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}=\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}=1$

Ответ: 1.

2.211. 1) $\frac{1}{a-\sqrt{b}}+\frac{1}{a+\sqrt{b}}=\frac{2a}{a^2-b}$; 2) $\frac{2a}{a^2-b}:\frac{a}{a^2-b}=2.$

Ответ: 2.

2.221. 1) $m\sqrt{m^3}+5\sqrt{m^3}+m\sqrt{18}+15\sqrt{2}=m^2\sqrt{m}+5m\sqrt{m}+3m\sqrt{2}+15\sqrt{2}=$

$=m\sqrt{m}\,(m+5)+3\sqrt{2}\,(m+5)=(m+5)\left(m\sqrt{m}+3\sqrt{2}\right)$;

2) $(m+5)\left(m\sqrt{m}+3\sqrt{2}\right):\frac{3(m+5)}{2\left(m\sqrt{m}-3\sqrt{2}\right)}=\frac{2}{3}(m^3-18)$;

3) $\left.\frac{2}{3}(m^3-18)\right|_{m=3}=\frac{2}{3}(27-18)=6.$

Ответ: 6.

2.231. 1) $\frac{\sqrt{a^3}+a\sqrt{18}+6\sqrt{a}+2\sqrt{2}}{\sqrt{a^3}+2\sqrt{a}+a\sqrt{2}+\sqrt{8}}-1=\frac{2a\sqrt{2}+4\sqrt{a}}{a\sqrt{a}+2\sqrt{a}+a\sqrt{2}+2\sqrt{2}}=$

$=\frac{2\sqrt{a}\cdot\sqrt{2}\left(\sqrt{a}+\sqrt{2}\right)}{\sqrt{a}\,(a+2)+\sqrt{2}\,(a+2)}=\frac{2\sqrt{2a}\left(\sqrt{a}+\sqrt{2}\right)}{(a+2)\left(\sqrt{a}+\sqrt{2}\right)}=\frac{2\sqrt{2a}}{a+2}$;

2) $\left.\frac{2\sqrt{2a}}{a+2}\right|_{a=2}=\frac{2\sqrt{4}}{2+2}=1.$

Ответ: 1.

Раздел III

Алгебраические уравнения и системы уравнений

§ 7. Рациональные уравнения

3.001. Заметим, что $6x - 9 \neq 0$, иначе дробь в левой части уравнения не имеет смысла. Умножив обе части уравнения на $3(6x-9)$, получим $3(71 - 3x) = 6x - 9$, откуда $x = 14{,}8$.

Ответ: 14,8.

3.011. Раскрыв скобки и перенеся все члены в одну сторону, после приведения подобных членов получим уравнение $20x^2 + 24x + 7 = 0$, откуда $x_1 = -0{,}5$, $x_2 = -0{,}7$.

Ответ: $-0{,}7$.

3.021. Так как $x \neq 0$ (иначе дробь $2/x$ не имеет смысла), то, умножив обе части уравнения на x, получим $8x^2 = 2 - 15x$ или $8x^2 + 15x - 2 = 0$, откуда $x_1 = 0.125$; $x_2 = -2$.

Ответ: -2; 0,125.

3.031. Заметим, что $a \neq -b$ и $a \neq b$, иначе выражения в левой и правой частях уравнения теряют смысл. Умножив обе части уравнения на $a^2 - b^2$, получим $(ax - b)(a - b) + (a + bx)(a + b) = (a + b)^2$. Раскрыв скобки и приведя подобные члены, находим $x = \dfrac{2ab}{a^2 + b^2}$.

Ответ: $x = \dfrac{2ab}{a^2 + b^2}$.

3.041. Поскольку $x \neq 0$ (иначе дробь $27/x$ не имеет смысла), умножив обе части уравнения на x^2, получим $x^5 + 3x^3 + 27x^2 + 81 = 0$, или $x^3(x^2 + 3) + 27(x^2 + 3) = 0$, откуда $(x^3 + 27)(x^2 + 3) = 0$. Так как $x^2 + 3 > 0$ для всех действительных x, то $x^3 + 27 = 0$, откуда $x = -3$.

Ответ: -3.

3.051. Перенеся все члены уравнения в одну сторону и вынеся за скобки общие множители, получим $(x + 0{,}5)(x + 3)(x-3-2(x + 3)) = 0$. Таким образом, $x_1 = -0{,}5$; $x_2 = -3$ и $x_3 = -9$.

Ответ: -9; -3; $-0{,}5$.

3.061. Заметим, что $x \neq 2$, иначе дробь в левой части уравнения не имеет смысла. Поэтому левую часть уравнения можно преобразовать так: $\dfrac{x^3 - 8}{2(x-2)} =$

$$= \frac{(x^2 + 2x + 4)(x - 2)}{2(x - 2)} = \frac{x^2 + 2x + 4}{2}.$$

Тогда уравнение примет вид: $\dfrac{x^2 + 2x + 4}{2} = 12x - 18$, откуда $x^2 - 22x + 40 = 0$ и $x_1 = 20$; $x_2 = 2$. Так как $x \neq 2$, то значение x_2 не годится.

Ответ: 20.

3.071. Представим левую часть уравнения в виде $\frac{(x-1)(5x-2)}{(x-1)(4x+5)}$; поскольку $x-1\neq0$, сократив на $x-1$, получим $\frac{5x-2}{4x+5}$. Аналогично в правой части уравнения получим $\frac{4x-5}{4x+5}$. Следовательно, уравнение примет вид $\frac{5x-2}{4x+5}=\frac{4x-5}{4x+5}$. Так как $4x+5\neq0$ (иначе обе части уравнения не имеют смысла), то умножив обе части уравнения на $4x+5$, имеем $5x-2=4x-5$, откуда $x=-3$.

Ответ: -3.

3.081. Пусть x_1 и x_2 — корни уравнения. Тогда, по теореме Виета, $x_1x_2=6/2=3$, $x_1+x_2=-\frac{p-10}{2}$. Кроме того, согласно условию $\frac{x_1}{x_2}=12$. Решив систему уравнений $\begin{cases}\frac{x_1}{x_2}=12,\\ x_1x_2=3,\end{cases}$ получим $x_1=6$, $x_2=0{,}5$ или $x_1=-6$, $x_2=-0{,}5$.

Таким образом: $p_1=-3$, $p_2=23$.

Ответ: -3; 23.

3.091. Пусть $x^2+2x+2=y$. Тогда уравнение примет вид $\frac{y}{y+1}-\frac{1}{y}=\frac{1}{6}$.

Учитывая, что $y\neq0$, $y+1\neq0$, умножим обе части уравнения на $6y(y+1)$. Получим $6(y^2-(y+1))=y(y+1)$, или $5y^2-7y-6=0$, откуда $y_1=2$, $y_2=-0{,}6$. Таким образом: 1) $x^2+2x+2=2$, откуда $x_1=0$, $x_2=-2$;

2) $x^2+2x+2=-0{,}6$, или $x^2+2x+2{,}6=0$. Так как в данном случае $D=4-4\cdot2{,}6<0$, то действительных корней нет.

Ответ: -2; 0.

3.101. Разложив знаменатели дробей на множители, имеем

$$\frac{19-2x}{(x+1)(x+4)}-\frac{2x+9}{(x+1)(x+2)}=\frac{4x}{(x+1)(x+4)}.$$

После умножения обеих частей уравнения на $(x+1)(x+2)(x+4)$ ($x\neq-1$, $x\neq-2$, $x\neq-4$) получим $(19-2x)(x+2)-(2x+9)(x+4)=4x(x+1)$, или $4x^2+3x-1=0$, откуда $x_1=-1$; $x_2=0{,}25$ ($x_1=-1$ не годится).

Ответ: 0,25.

3.111. 1) Если $n=\pm k$, то уравнение примет вид $1-\frac{2k}{x-k}=0$, откуда $x=3k$.

2) Если $n\neq\pm k$, то, умножив обе части уравнения на $(x-k)^2\neq0$, получаем $(x-k)^2-2k(x-k)-(n^2-k^2)=0$, откуда $x-k=k\pm\sqrt{k^2+(n^2-k^2)}=k\pm|n|$, $x=2k\pm|n|$, или $x=2k\pm n$.

Ответ: если $n=\pm k$, то $x=3k$; если $n\neq\pm k$, то $x=2k\pm n$.

3.121. Поделив обе части уравнения на x^2, получим

$$x^2-2x-1-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}=0\Rightarrow\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-2\left(x+\frac{1}{x}\right)-1=0$$

Замена $x+\frac{1}{x}=t$ с учетом того, что

$$x^2+\frac{1}{x^2}=t^2-2,\ \text{дает}\ t^2-2t-3=0\Rightarrow t_1=-1,\ t_2=3.$$

1) $x+\frac{1}{x}=-1 \Rightarrow \varnothing$;

2) $x+\frac{1}{x}=3 \Rightarrow x_{1,2}=\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$.

Ответ: $x_{1,2}=\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$.

3.131. Введем замену: $x-\frac{3+4+7+8}{4}=t \Rightarrow x=t+5,5$. Тогда уравнение примет вид

$$(t+2,5)(t+1,5)(t-1,5)(t-2,5)=60 \Rightarrow t^4-\frac{17}{2}t^2+\frac{225}{16}-60=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} t^2=\frac{49}{4} \\ t^2=-\frac{15}{4} \end{array}\right. \Rightarrow t^2=\frac{49}{4} \Rightarrow t_1=-3,5;\ t_2=3,5 \Rightarrow x_1=2;\ x_2=9.$$

Ответ: $x_1=2$; $x_2=9$.

3.136. Указание: сделать вначале замену $t=12x$, а затем замену $z=t-2,5$.

3.140. Указание: перемножить первые два и последние два сомножителя и затем сделать замену $x^2-\frac{5}{6}x=t$.

3.141. Преобразуем уравнение, перенеся свободный член — целое число в правую часть уравнения, а левую часть уравнения разложив на множители.

$$y^2-xy-2x^2=13 \Rightarrow (x+y)(y-2x)=13$$

Так как сумма и разность целых чисел есть целое число, то мы должны представить число 13 в виде произведения целых чисел, что возможно только в двух случаях: $13=13\cdot 1$ или $13=(-13)\cdot(-1)$. Получаем четыре системы уравнений:

$a)\ \begin{cases} x+y=1 \\ y-2x=13 \end{cases}$ $b)\ \begin{cases} x+y=13 \\ y-2x=1 \end{cases}$ $c)\ \begin{cases} x+y=-1 \\ y-2x=-13 \end{cases}$ $d)\ \begin{cases} x+y=-13 \\ y-2x=-1 \end{cases}$

Ответ: $(-4;\ 5)$, $(4;\ 9)$, $(4;\ -5)$, $(-4;\ -9)$.

3.147. Указание: выделив полный квадрат, преобразовать к виду:

$$(x+1)^2-y^2-3=0$$

3.150. Указание: решить квадратное уравнение относительно $t=x+1$.

3.151. Если перенести 4 в правую часть уравнения, то левая часть не разлагается на множители. Поэтому можно поступить следующим образом. Выразив неизвестное y из уравнения, получим: $y=\frac{x^2-4}{x+1}$. Выделяя целую часть, найдем $y=\frac{x^2-1-3}{x+1}=x-1-\frac{3}{x+1} \Rightarrow y-x+1=-\frac{3}{x+1} \Rightarrow (x+1)(x-y-1)=3$

Последнее уравнение распадается на четыре системы уравнений:

$a)\ \begin{cases} x+1=3 \\ x-y-1=1 \end{cases}$ $b)\ \begin{cases} x+1=1 \\ x-y-1=3 \end{cases}$ $c)\ \begin{cases} x+1=-3 \\ x-y-1=-1 \end{cases}$ $d)\ \begin{cases} x+1=-1 \\ x-y-1=-3 \end{cases}$

Ответ: $(2;\ 0)$, $(0;\ -4)$, $(-4;\ -4)$, $(-2;\ 0)$.

3.155. Указание: выразить из уравнения не y, а $3y$.

3.161. Запишем уравнение в стандартном виде: $x^2 + 2x + (a^2-2a + 2) = 0$ $\Rightarrow x_{1,2} = -1 \pm \sqrt{-(a-1)^2}$. Т. к. $(a-1)^2 \geq 0$ при всех a, то уравнение имеет решение только при $a = 1$, а именно $x = -1$.
Приведем другое решение.
Уравнение можно преобразовать к виду:

$$(x+1)^2+(a-1)^2=0 \Rightarrow \begin{cases} (x+1)^2=0 \\ (a-1)^2=0 \end{cases} \Rightarrow x=-1;\ a=1.$$

Ответ: $x = -1$; $a = 1$.

3.171. $$ax^2 - 2x + \frac{1}{3} = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} a=0 \Rightarrow x = \dfrac{1}{6} \\ a \neq 0 \Rightarrow x_{1,2} = \dfrac{1 \pm \sqrt{1-\frac{a}{3}}}{a} \end{array} \right. \Rightarrow x_1 = x_2 = \frac{1}{3} \text{ при } a = 3.$$
Ответ: $a = 0$; $a = 3$.

3.181. Уравнение $ax - a + 2 - x = 0$ преобразуем к виду $x(a-1) = a-2$. Аналогично поступим и с уравнением $ax - a - x - 2 = 0 \Rightarrow x(a-1) = a+2$.
Пусть $a = 1$, это дает для первого уравнения $0 \cdot x = -1$, что невозможно ни при каких значениях x.
Точно так же второе уравнение при $a = 1$ дает $0 \cdot x = 3$, что тоже невозможно. Таким образом, оба уравнения при $a = 1$ не имеют решений, следовательно, они равносильны при этом значении параметра a.
Если же $a \neq 0$, то из первого уравнения следует $x = \frac{a-2}{a-1}$, а из второго $x = \frac{a+2}{a-1}$, и для того, чтобы уравнения были равносильны, должно выполняться условие $\frac{a-2}{a-1} = \frac{a+2}{a-1}$, что невозможно ни при каких значениях параметра $a \neq 1$.

Ответ: 1.

§ 8. Системы рациональных уравнений

3.191. Из второго уравнения найдем $x = -1 + 3y$ и подставим это выражение в первое уравнение. Получим $2(-1 + 3y) + 11y = -2$, откуда $y = 0$, $x = -1$.
Ответ: $(-1; 0)$.

3.201. Так как $y \neq 0$ и $4x + 13 \neq 0$ (иначе выражения $\frac{3}{4x+13}$ и $\frac{1}{y}$ не имеют смысла), то, умножив обе части второго уравнения на $y(4x + 13)$, найдем $3y-(4x + 13) = 0$. Отсюда $y = \frac{4x+13}{3}$. Подставляя это выражение в первое уравнение, получим $7x + 8(4x + 13) = 65$, откуда $x = -1$ и соответственно $y = 3$.
Ответ: $(-1; 3)$.

3.211. Представим периодическую дробь 0,(13) в виде обыкновенной $0,(13) = \frac{13}{99}$

Из второго уравнения найдем $x = \frac{13}{99}y$ и подставим это выражение в первое уравнение. Получим $2y - \frac{13}{99}y = 318$, откуда $y = 198$ и соответственно $x = 26$

Ответ: (26, 198).

3.221. Умножив первое уравнение на -2 и прибавив ко второму, получим $-z = -1$, откуда $z = 1$. Затем, умножив первое уравнение на (-1) и прибавив к третьему, получим $2y + z = 2$, откуда с учетом того, что $z = 1$, найдем $y = 0{,}5$. Наконец, из первого уравнения найдем $x = -0{,}5$.

Ответ: $(-0{,}5;\ 0{,}5;\ 1)$.

3.231. Из второго уравнения выразим $y = 3x + 7$ и подставим в первое. Получим $x^2 + x(3x + 7) + 3 = 0$, или $4x^2 + 7x + 3 = 0$, откуда $x_1 = -0{,}75$; $x_2 = -1$ Так как требуется найти целочисленные решения системы, то $x_1 = -0{,}75$ не годится. Находим $y_2 = 4$.

Ответ: $(-1;\ 4)$.

3.241. Из второго уравнения выразим $y = \frac{32-7x}{6}$. Первое уравнение представим в виде $(3x^2 - 5xy) - (6x - 10y) = 0$, откуда $x(3x - 5y) - 2(3x - 5y) = 0$, или $(3x - 5y)(x - 2) = 0$. Таким образом, либо $3x - 5y = 0$, либо $x = 2$. В случае $x_1 = 2$ имеем $y_1 = 3$. Рассмотрим теперь случай $3x - 5y = 0$, откуда $y = \frac{3}{5}x$ Учитывая второе уравнение системы, найдем $\frac{32-7x}{6} = \frac{3}{5}x$, откуда $x_2 = \frac{160}{53}$. Так как требуется найти целочисленные решения системы, то x_2 не годится.

Ответ: (2; 3).

3.251. Умножив обе части второго уравнения на $x-9$ $(x \neq 9)$, получим $x + 3y = 10$ или $x = 10-3y$. Первое уравнение преобразуем так: $(x^2y-3x)-(9xy-27) = 0$, или $x(xy-3)-9(xy-3) = 0$, откуда $(x-9)(xy-3) = 0$. Поскольку $x \neq 9$, должно быть $xy-3 = 0$. Подставляя в это уравнение выражение $x = 10-3y$, получим $y(10-3y)-3 = 0$ или $3y^2-10y + 3 = 0$, откуда $y_1 = 3$; $y_2 = \frac{1}{3}$

Соответственно находим $x_1 = 1$; $x_2 = 9$. Так как должно быть $x \neq 9$, то $x_2 = 9$ не годится

Ответ (1; 3)

3.261. Рассмотрим первое уравнение системы. Заметим, что $x \neq 0$, $y \neq 0$. Произведя замену $\frac{y}{x} = t$, получим относительно t квадратное уравнение $\frac{1}{t} + t = \frac{25}{12}$, или $t^2 - \frac{25}{12}t + 1 = 0$, откуда $t_1 = \frac{4}{3}$, $t_2 = 0{,}75$. Следовательно, должно быть $\frac{y}{x} = \frac{4}{3}$, либо $\frac{y}{x} = \frac{3}{4}$.

Рассмотрим первый случай: $\frac{y}{x} = \frac{4}{3}$, или $y = \frac{4}{3}x$. Подставляя во второе уравнение системы это выражение, найдем $x^2 - \frac{16}{9}x^2 = 7$, откуда $-\frac{7}{9}x^2 = 7$, что невозможно. Таким образом, в первом случае система не имеет решения

Рассмотрим второй случай: $\frac{y}{x} = \frac{3}{4}$, или $y = \frac{3}{4}x$. Подставляя во второе уравнение системы это выражение, найдем $x^2 - \frac{16}{9}x^2 = 7$, откуда $x_1 = 4$; $x_2 = -4$ Соответственно получим $y_1 = 3$; $y_2 = -3$.

Ответ (4; 3), $(-4;\ -3)$.

3.271. Прибавив к первому уравнению системы второе, получим $x^2 + 4xy + 4y^2 = 169$, или $(x + 2y)^2 = 169$, откуда $x + 2y = \pm 13$.

Рассмотрим два случая.

1) Если $x + 2y = 13$, то $y = \frac{13 - x}{2}$. Подставив вместо y его выражение в первое уравнение, имеем $x^2 + 3x\frac{13 - x}{2} = 54$, или $x^2 - 39x + 108 = 0$, откуда $x_1 = 36$, $x_2 = 3$. Соответственно находим $y_1 = -11{,}5$; $y_2 = 5$.

2) Если $x + 2y = -13$, то $y = -\frac{13 + x}{2}$. Подставив вместо y его выражение в первое уравнение, имеем $x^2 - 3x\frac{13 + x}{2} = 54$, или $x^2 + 39x + 108 = 0$, откуда $x_3 = -3$, $x_4 = -36$. Соответственно находим $y_3 = -5$, $y_4 = 11{,}5$.

Ответ: $(-3; -5)$, $(-36; 11{,}5)$, $(36; -11{,}5)$, $(3; 5)$.

3.278. Указание. Умножив второе уравнение на 2 и вычтя из него первое уравнение, получим квадратное уравнение относительно $x + y$.

3.281. Приведем только графическое решение ввиду его простоты и наглядности. График уравнения $|x| + |y| = 1$ имеет вид квадрата, вершины которого лежат на осях координат в точках $(1; 0)$, $(-1; 0)$, $(0; 1)$, $(0; -1)$.

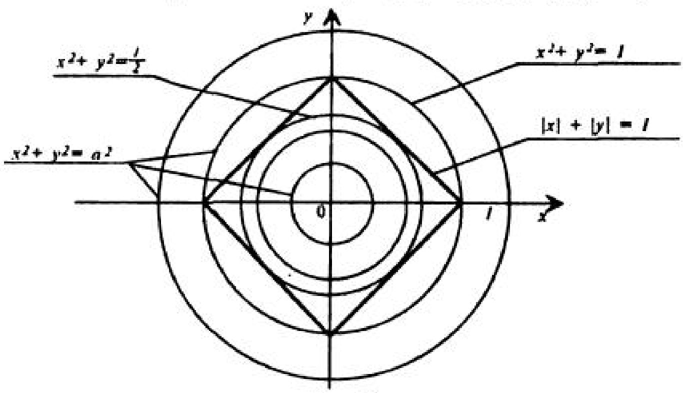


Рис. 6

График уравнения $x^2 + y^2 = a^2$ есть семейство окружностей радиуса $|a|$ с центром в начале координат. Эти кривые имеют 4 общие точки только при $|a| = 1$ и $|a| = \frac{\sqrt{2}}{2}$ (Рис. 6).

Ответ: 1.

§ 9. Уравнения и системы уравнений, содержащие неизвестные под знаком абсолютной величины

3.291. Если $5 - 4x \geq 0$, то $5 - 4x = 1$, откуда $x_1 = 1$. Если же $5 - 4x < 0$, то $-(5 - 4x) = 1$, откуда $x_2 = 1{,}5$.

Ответ: 1; 1,5.

3.301. Если $x - 2 \geq 0$, то $x^2 - x - 4 = 0$, откуда $x_1 \cong 2{,}56$, $x_2 \cong -1{,}56$. Второй корень не подходит, так как не выполнено условие $x \geq 2$. Если же $x - 2 < 0$, то $x^2-5x+4=0$, откуда $x_3=4$, $x_4=1$. Так как должно быть $x<2$, то x_3 не годится.

Ответ: 1; $\frac{1+\sqrt{17}}{2}$.

3.311. На числовой оси отметим нули выражений, стоящих под знаком модуля $x=0{,}5$; $x=2$. Удобно воспользоваться следующей схемой (рис. 7).
Рассмотрим исходное уравнение на каждом из трех интервалов.

1) Если $x \ge 2$, то $2x-1+6x=2x-4+15$, откуда $x=2$.

2) Если $0{,}5 \le x < 2$, то $2x-1+6x=-(2x-4)+15$, откуда $x=2$, что не годится, так как не выполняется условие $0{,}5 \le x < 2$.

3) Если $x<0{,}5$, то $-(2x-1)+6x=-(2x-4)+15$, откуда $x=3$, что не отвечает условию $x<0{,}5$.

Ответ: 2.

3.321. На числовой оси отметим нули выражений, стоящих под знаком модуля: $x=-2$, $x=3$, $x=1$. Воспользуемся следующей схемой (рис. 8):
Рассмотрим исходное уравнение на каждом из четырех интервалов.

1) Если $x \ge 3$, то $(x+2)-(x-3)+(x-1)=4$, откуда $x=0$, что не годится, поскольку условие $x \ge 3$ не выполнено.

2) Если $1 \le x < 3$, то $(x+2)+(x-3)+(x-1)=4$, откуда $x=2$.

3) Если $-2 \le x < 1$, то $(x+2)+(x-3)-(x-1)=4$, откуда $x=4$, что не отвечает условию $-2 \le x < 1$.

4) Если $x<-2$, то $-(x+2)+(x-3)-(x-1)=4$, откуда $x=-8$.

Ответ: -8; 2.

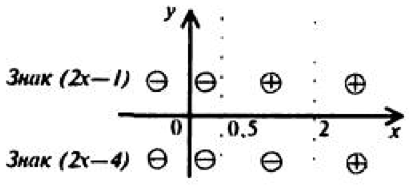


Рис. 7

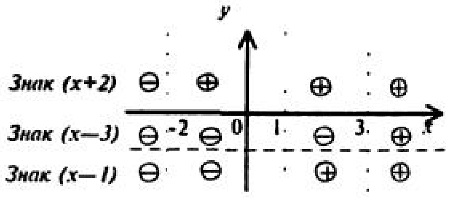


Рис. 8

3.331. Графическое решение. Построим график функции
$$y=|x^2-2x-3| \quad \text{(рис. 9).}$$
Уравнение $y=a$ определяет семейство прямых, параллельных оси Ox. Из этого семейства только прямая $y=4$ пересекает график функции
$$y=|x^2-2x-3|$$
в трех точках. Таким образом, исходное уравнение имеет ровно три корня при $a=4$.

Ответ: $a=4$.

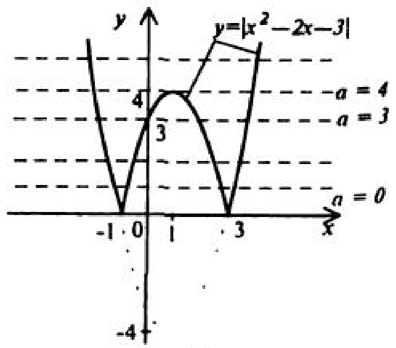


Рис. 9

3.341. 1) Пусть $y_1 = x^2 - 6|x| + 5$, $y_2 = a$.
Строим график функции $y = x^2 - 6x + 5$ для $x \geq 0$
и отражаем его зеркально относительно оси ординат. График $y_2 = a$ пересекает нашу кривую ровно в трех точках только при $a = 5$ (рис. 10).

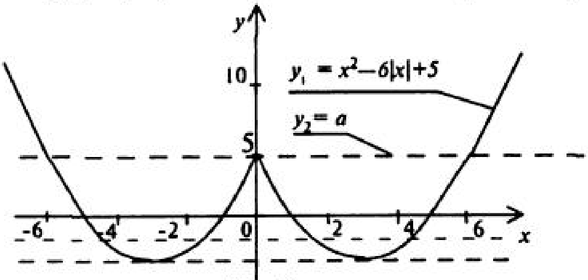


Рис. 10

2) А н а л и т и ч е с к о е р е ш е н и е. Замена $|x| = t$ дает $t^2 - 6t + 5 - a = 0$, откуда $t_{1,2} = 3 \pm \sqrt{4+a} \Rightarrow |x| = 3 \pm \sqrt{4+a} \geq 0$. Так как $3 + \sqrt{4+a} > 0$ для всех $a \geq -4$, то в этом случае два корня уравнения всегда существуют, а третий корень, равный нулю, найдется из условия $\sqrt{4+a} = 3 \Rightarrow a = 5$.

Ответ: 5

3.351. 1) Г р а ф и ч е с к о е р е ш е н и е. Пусть $y_1 = |x^2 - 2ax|$, $y_2 = a$.
Т.к. $a = |x^2 - 2ax| \geq 0$, то из рис. 11 следует, что данное уравнение имеет три корня, если $a^2 = a \Rightarrow a = 1$.

2) А н а л и т и ч е с к о е р е ш е н и е.

$$|x^2 - 2ax| = a \geq 0 \Rightarrow x^2 - 2ax = \pm a \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 - 2ax - a = 0 \\ x^2 - 2ax + a = 0 \end{array} \right. .$$

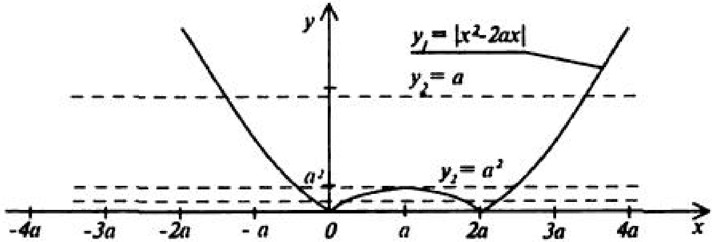


Рис. 11

Первое уравнение имеет два корня при любых $a > 0$, т.к. $D_1 = 4a^2 + 4a > 0$. (Отметим, что при $a = 0$ первоначальное уравнение имеет всего один корень, а именно $x = 0$.) Тогда второе уравнение обязано иметь один корень, а это возможно при $D_2 = 4a^2 - 4a = 0$, откуда $a = 1$.

Ответ: 1

3.361. Из второго уравнения найдем (с учетом, что $x \neq 4$) $y = 2x + 22$ и подставим это выражение в первое уравнение.

Получим $|2x + 22 - 10| - |x + 6| = 10$, или $2|x + 6| - |x + 6| = 10$, или $|x + 6| = 10$. Отсюда $x_1 = -16$, $x_2 = 4$ (x_2 не годится по условию). Найдем $y_1 = 2(-16) + 22 = -10$.

Ответ: $(-16; -10)$.

3.371. Из второго уравнения следует, что $-x-1 > 0$, откуда $x < -1$, и $3-5y \le 0$, откуда $y \ge \frac{3}{5}$. Таким образом, $|x| = -x$, а $|y| = y$. После преобразований система примет вид

$$\begin{cases} 2y+7x+7,04=0, \\ 3-5y=-2(-x-1), \end{cases} \text{ или } \begin{cases} 7x+2y=-7,04, \\ 2x+5y=1, \end{cases} \text{ откуда } x = -1,2,\ y = 0,68.$$

Ответ: $(-1,2; 0,68)$.

3.381. Из первого уравнения следует, что $3 + y \ge 0$. Значит, $|y + 3| = y + 3$ и система примет вид $\begin{cases} |x+1|=y+3, \\ y+3+4x=10. \end{cases}$ Прибавив к первому уравнению второе, получим $|x + 1| + 4x = -10$, или $|x + 1| = -4x-10$. Так как $-4x-10 \ge 0$ (в силу того, что $|x + 1| \ge 0$), то $x \le -2,5$ и $x + 1 \le -1,5$. Поэтому $|x + 1| = -(x + 1)$ и уравнение преобразуется к виду $-(x + 1) = -4x-10$, или $x = -3$. Соответственно найдем $y = -1$.

Ответ: $(-3; -1)$.

3.391. Для решения системы удобно рассмотреть координатную плоскость xOy (рис. 12). Отметим нули выражений, стоящих под знаком модулей: $y = -2$, $x = -0,5$. Соответствующие прямые разбивают плоскость xOy на четыре части, в каждой из которых определены знаки выражений $(x+0,5)$ и $\left(\frac{y}{2}+1\right)$. Знак выражения $(x + 0,5)$ будем отмечать сверху, а знак выражения $\left(\frac{y}{2}+1\right)$ — снизу.

Рассмотрим исходную систему на каждом из четырех квадрантов.

1) Если $x \ge -0,5$, $y \ge -2$, то

$$\begin{cases} \frac{y}{2}+1=2x+4, \\ x+\frac{1}{2}=\frac{5}{2}-y, \end{cases} \text{ или } \begin{cases} 4x-y=6, \\ x+y=2, \end{cases}$$

откуда $x = -0,8$, $y = 2,8$, что не удовлетворяет условиям $x \ge -0,5$; $y \ge -2$

2) Если $x < -0,5$, $y \ge -2$, то

$$\begin{cases} -(x+0,5)=2,5-y, \\ 0,5y+1=2x+4, \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x-y=-3, \\ 4x-y=-6, \end{cases}$$

откуда $x = -1$, $y = 2$.

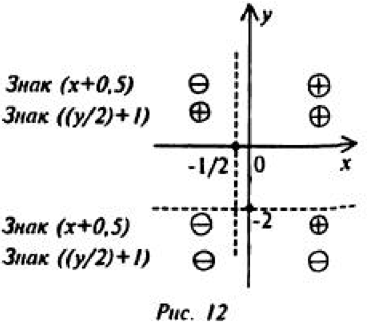


Рис. 12

3) Если $x < -0{,}5$, $y < -2$, то $\begin{cases} -(0,5y+1)=2x+4, \\ -(x+0,5)=2,5-y, \end{cases}$ или $\begin{cases} x-y=-3, \\ 4x+y=-10, \end{cases}$

откуда $x = -2{,}6$, $y = 0{,}4$, что не удовлетворяет условиям $x < -0{,}5$; $y < -2$.

4) Если $x \geq -0{,}5$, $y < -2$, то

$\begin{cases} -(0,5y+1)=2x+4, \\ x+0,5=2,5-y, \end{cases}$ откуда $x = -4$, $y = 6$,

что не удовлетворяет условиям $x \geq -0{,}5$, $y < -2$.

Ответ: $(-1; 2)$.

3.401. Рассмотрим исходную систему на каждом из четырех квадрантов.

1) Если $x \geq -2$, $y \geq 1$, тогда система примет вид

$\begin{cases} x+2-12x-y+1=0 \\ y-1+13x-\dfrac{y}{3}-1=0, \end{cases}$ откуда $x = 0$, $y = 3$.

2) Если $x < -2$, $y \geq 1$, то в этом случае система имеет вид

$\begin{cases} -(x+2)-12x-y+1=0, \\ y-1+13x-\dfrac{y}{3}-1=0, \end{cases}$ откуда $x = \dfrac{8}{13}$, $y = -9$, что не годится,

поскольку условия $x < -2$, $y \geq 1$ не выполнены.

3) Если $x < -2$, $y < 1$, то система имеет вид

$\begin{cases} -(x+2)-12x-y+1=0, \\ -(y-1)+13x-\dfrac{y}{3}-1=0, \end{cases}$ откуда $x = -\dfrac{4}{91}$, $y = -\dfrac{3}{7}$,

что не удовлетворяет условиям $x < -2$, $y < 1$.

4) Если $x \geq -2$, $y < 1$, тогда система примет вид

$\begin{cases} x+2-12x-y+1=0, \\ -(y-1)+13x-\dfrac{y}{3}-1=0, \end{cases}$ откуда $x = \dfrac{12}{83}$, $y = \dfrac{117}{83}$, что не удовлетворяет

условиям $x \geq -2$, $y < 1$.

Ответ: $(0; 3)$.

§ 10. Иррациональные уравнения и системы уравнений

3.411. Возведя обе части уравнения в квадрат, получим $x + 1 + \sqrt{2} = \sqrt{2}$, откуда $x + 1 = 0$ и $x = -1$.

Ответ: -1.

3.421. Возведя обе части уравнения в квадрат, получим $\dfrac{9-5x}{3-8x} = \dfrac{1}{2}$, или $2(9-5x) = 3 - 8x$, откуда $x = 7{,}5$.

Ответ: $7{,}5$.

3.431. Возводя обе части уравнения в квадрат, найдем $\frac{1}{1-x}+\frac{1}{x}=\frac{4}{1-x}$, или $\frac{1}{x}=\frac{3}{1-x}$, откуда $1-x=3x$ и $x=0{,}25$.

Ответ 0,25.

3.441. Возводя обе части уравнения в квадрат, найдем
$x+2=4+x-6+4\sqrt{x-6}$, или $\sqrt{x-6}=1$.
Далее, снова возводя в квадрат, найдем $x-6=1$, откуда $x=7$.

Ответ: 7.

3.451. Из уравнения следует, что $x^2+4x=0$ или $x-3=0$, откуда $x_1=0$, $x_2=-4$, $x_3=3$. Учитывая область определения выражения $\sqrt{x-3}$, т.е. условие $x-3\ge 0$, первый и второй корень отбрасываем.

Ответ: 3.

3.461. Возведя обе части уравнения в квадрат, получим $x+1=(11-x)^2$, откуда $x^2-23x+120=0$ и $x_1=15$, $x_2=8$. Проверка показывает, что первый корень не годится, так как в этом случае правая часть уравнения отрицательна, а левая — положительна.

Ответ. 8.

3.471. Пусть $\sqrt{x+1}=y$. Тогда $2y-\frac{4}{y}+7=0$, или $2y^2+7y-4=0$, откуда $y_1=0{,}5$, $y_2=-4$. Второй корень не годится, так как $y=\sqrt{x+1}\ge 0$. Имеем $\sqrt{x+1}=0{,}5$, откуда $x+1=0{,}25$ и $x=-0{,}75$.

Ответ: $-0{,}75$.

3.481. Пусть $\sqrt{10-x}=y$. Тогда $\frac{8}{y}-y=2$, или $y^2+2y-8=0$, откуда $y_1=2$, $y_2=-4$. Второй корень не годится, поскольку $y=\sqrt{10-x}\ge 0$. Таким образом, имеем $\sqrt{10-x}=2$, откуда $10-x=4$ и $x=6$.

Ответ: 6.

3.491. Так как $\sqrt{|x-4|}\ge 0$, то из уравнения следует, что $x-4\ge 0$, а значит, $|x-4|=x-4$. Тогда уравнение примет вид $\sqrt{x-4}=x-4$, или $\sqrt{x-4}\left(1-\sqrt{x-4}\right)=0$. Отсюда $x_1=4$, $x_2=5$

Ответ: 4; 5.

3.501. Возведя обе части уравнения в квадрат, получим $|x-7|=(x-1)^2$
Рассмотрим два случая.
1) Если $x\ge 7$, то $x-7=(x-1)^2$, или $x^2-3x+8=0$. Последнее уравнение действительных корней не имеет.
2) Если $x<7$, то $-(x-7)=(x-1)^2$, или $x^2-x-6=0$, откуда $x_1=3$, $x_2=-2$. *Ответ*: -2; 3.

3.511. *Рассмотрим два случая.*
1) Если $x\ge 2$, то $\sqrt{4x^2-1}+x=x-2$, или $\sqrt{4x^2-1}=-2$, что невозможно
2) Если $x<2$, то $\sqrt{4x^2-1}+x=-(x-2)$, или $\sqrt{4x^2-1}=2-2x$. Возведя в квадрат, получим $4x^2-1=4x^2+4-8x$, откуда $x=\frac{5}{8}$.

Ответ. $\frac{5}{8}$.

3.521. А н а л и т и ч е с к о е р е ш е н и е. Данное уравнение эквивалентно системе

$$\begin{cases} x+a=(x+1)^2, \\ x+1\ge 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1=-\dfrac{1}{2}+\sqrt{a-\dfrac{3}{4}}\,;\, x_2=-\dfrac{1}{2}-\sqrt{a-\dfrac{3}{4}}\,. \\ x\ge -1 \end{cases}$$

Для существования действительного решения должно быть $a-\frac{3}{4}\ge 0$. При этом, если $a=\frac{3}{4}$, то решение будет единственным, а именно $x=-\frac{1}{2}$, причем условие $x\ge -1$ соблюдается. В том случае, когда оба корня меньше -1, система не имеет решений; в том же случае, когда оба корня больше -1, она имеет два решения. Таким образом, оба эти случая не годятся. Остается одна возможность для получения единственного решения: меньший корень меньше -1, а больший корень больше -1. В этом случае имеем систему

$$\begin{cases} -\dfrac{1}{2}+\sqrt{a-\dfrac{3}{4}}>-1 \\ -\dfrac{1}{2}-\sqrt{a-\dfrac{3}{4}}<-1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{a-\frac{3}{4}}>\frac{1}{2}\Rightarrow a>1$$

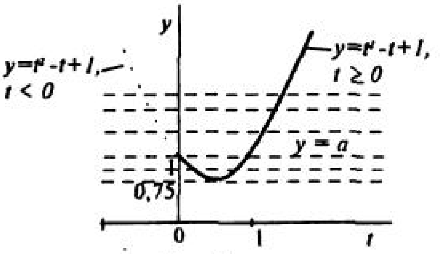


Рис. 13

Графическое решение.

Пусть $\sqrt{x+a}=t\ge 0$.

Тогда $x=t^2-a$ и данное уравнение эквивалентно системе

$$\begin{cases} t=t^2-a+1, \\ t\ge 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t^2-t+1=a, \\ t\ge 0. \end{cases}$$

График функции

$$y=t^2-t+1$$

при условии $t\ge 0$ (рис. 13) пересекается семейством прямых $y=a$ в одной точке при $a=\frac{3}{4}$ и при $a>1$.

Ответ: $a=\frac{3}{4}$; $a>1$.

3.531. Выразив из второго уравнения $y=7+x$ и подставив в первое уравнение системы, получим $\sqrt{x}+\sqrt{7+2x}=4$. Уединив $\sqrt{7+2x}$, имеем $\sqrt{7+2x}=4-\sqrt{x}$. Возводя в квадрат, получим $7+2x=16+x-8\sqrt{x}$, или $8\sqrt{x}=9-x$. Снова возводя в квадрат, имеем $64x=(9-x)^2$, откуда $x^2-82x+81$ и $x_1=1$, $x_2=81$. Второй корень не удовлетворяет уравнению $8\sqrt{x}=9-x$. Найдем $y_1=8$.
Ответ: (1; 8).

3.541. Возводя оба уравнения системы в квадрат, получим

$$\begin{cases} 2x+y+2=9, \\ x+2y+5=(y-x)^2. \end{cases}$$

Выразим из первого уравнения $y=7-2x$ и подставим во второе уравнение системы $x+2(7-2x)+5=(7-2x-x)^2$, откуда $3x^2-13x+10=0$ и $x_1=1$.

$x_2 = \frac{10}{3}$. В силу условия задачи (требуется найти целочисленные решения) второй корень не годится. Найдем $y_1 = 5$.
Ответ: (1; 5)

3.551. Пусть $\sqrt{\frac{y}{x}} = t$. Тогда первое уравнение примет вид $\frac{1}{t} + t = \frac{5}{2}$, или $t^2 - \frac{5}{2}t + 1 = 0$, откуда $t_1 = 2$, $t_2 = 0{,}5$. Рассмотрим два случая.

1) $\sqrt{\frac{y}{x}} = 2$ или $\frac{y}{x} = 4$, т.е. $y = 4x$. Учитывая второе уравнение системы получаем $\begin{cases} y = 4x, \\ x + y = 10, \end{cases}$ откуда $x = 2$, $y = 8$.

2) $\sqrt{\frac{y}{x}} = \frac{1}{2}$ или $\frac{y}{x} = \frac{1}{4}$, т.е $x = 4y$ и $x = 8$, $y = 2$.

Ответ: (2; 8), (8; 2).

§ 11. Задачи на составление уравнений

3.561. Пусть s — расстояние между городами. Тогда скорый поезд проходит это расстояние за время $\frac{s}{60}$, а пассажирский — за $\frac{s}{40}$. Согласно условию, $\frac{s}{60} + 2\frac{15}{60} = \frac{s}{40}$, откуда $s = 270$.
Ответ: 270 км.

3.571. Обозначим первоначальную цену на хрустальную люстру через x. Тогда после первого повышения люстра стоила $x + 0{,}45x = 1{,}45x$, а после второго повышения она стоила $1{,}45x + 0{,}2 \cdot 1{,}45x = 1{,}74x$. Таким образом, после двух повышений цена люстры увеличилась на 74%.
Ответ: 74.

3.581. В 100г 30%-ной соляной кислоты содержится 30 г соляной кислоты и 70 г воды. Чтобы получить 10%-ную соляную кислоту, надо добавить x г воды к 100 г 30%-ной соляной кислоты. В результате получим $(70 + x)$ г воды и 30 г соляной кислоты. По условию, $\frac{30}{70 + x + 30} = 0{,}1$, откуда $x = 200$.
Ответ: 200 г.

3.591. Пусть первая труба наполняет бассейн за x часов, а вторая — за y часов. Согласно условию, $x + 5 = y$. Обозначим вместимость бассейна через V. Тогда первая труба за час наполнит часть бассейна, равную $\frac{V}{x}$, а вторая — часть, равную $\frac{V}{y}$. Вместе они за час наполнят часть бассейна, равную $\frac{V}{x} + \frac{V}{y}$, а за 6 ч они наполнят весь бассейн, т.е $\left(\frac{V}{x} + \frac{V}{y}\right)6 = V$. Таким образом, приходим к системе уравнений:

$$\begin{cases} y = x + 5 \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{6} \end{cases}$$

Заменив во втором уравнении y на $x + 5$, получим квадратное уравнение относительно x. Решив это уравнение, найдем $x_1 = 10$, $x_2 = -3$. Однако

значение x_2 не годится, так как по смыслу задачи время наполнения бассейна не может быть отрицательным. Поэтому $x = 10$ и $y = 15$.
Ответ: (10; 15).

3.601. Пусть x — первоначальная скорость поезда. Тогда время, которое он должен был затратить на путь 54 км, равно $\frac{54}{x}$. С другой стороны, действительное время нахождения поезда в пути равно сумме трех слагаемых: времени, затраченному на путь в 14 км, т.е. $\frac{14}{x}$; времени стоянки у светофора 10 мин, т.е. $\frac{1}{6}$ ч; наконец, времени, затраченному на оставшиеся 40 км, которые были пройдены со скоростью $x + 10$, т.е. $\frac{40}{x+10}$. Учитывая опоздание на 2 мин, т.е. на $\frac{1}{30}$ ч, получим уравнение $\frac{54}{x} - \frac{1}{30} = \frac{14}{x} + \frac{1}{6} + \frac{40}{x+10}$, которое после преобразований приводится к виду $x^2 + 10x - 2000 = 0$, откуда $x_1 = 40$, $x_2 = -50$. Отрицательный корень не годится по смыслу задачи.
Ответ: 40 км/ч.

3.611. Обозначим сумму первоначального вклада через x. Тогда через год сумма вклада составит $x + 0{,}03x = 1{,}03x$, через 2 года $1{,}03x + 1{,}03x \cdot 0{,}03 = 1{,}03^2x$, через 3 года $1{,}03^3x$ и, наконец, через 4 года $1{,}03^4x = 1{,}1255x$. Итак, через четыре года вклад принесет доход $\approx 12{,}55\%$.
Ответ. 12,55.

Раздел IV

Логарифмы. Показательные и логарифмические уравнения

§ 12. Логарифмы

4.001. $\log_2 0{,}25 = \log_2 2^{-2} = -2\log_2 2 = -2$.

Ответ: -2

4.011. $\log_3^2 9 = (\log_3 3^2)^2 = (2\log_3 3)^2 = 4$.

Ответ: 4.

4.021. $\log_2 27 - 2\log_2 3 + \log_2 \frac{2}{3} = \log_2 3^3 - 2\log_2 3 + \log_2 2 - \log_2 3 =$

$= 3\log_2 3 - 2\log_2 3 + 1 - \log_2 3 = 1$.

Ответ: 1.

4.031. $2^{\log_{\sqrt{2}} 5} = \left(\sqrt{2}\right)^{2\log_{\sqrt{2}} 5} = \left(\sqrt{2}\right)^{\log_{\sqrt{2}} 25} = 25$.

Ответ: 25

4.041. $\log_{\sqrt{2}} \log_{1/3} \frac{1}{9} = \log_{\sqrt{2}} \log_{1/3} \left(\frac{1}{3}\right)^2 =$

$= \log_{\sqrt{2}} \left(2\log_{1/3} \frac{1}{3}\right) = \log_{\sqrt{2}} 2 = \log_{\sqrt{2}} \left(\sqrt{2}\right)^2 = 2\log_{\sqrt{2}} \sqrt{2} = 2$.

Ответ: 2.

4.051. $27^{\frac{1}{3\log_{16}81}}=\left(27^{1/3}\right)^{\frac{1}{\log_{16}81}}=3^{\frac{1}{\log_{16}81}}=3^{\log_{81}16}=3^{\log_3 2}=2$

Ответ: 2.

4.061. $\log_{1/4}(\log_2 3\cdot\log_3 4)=\log_{1/4}(\log_2 3\cdot 2\log_3 2)=$

$$=\log_{1/4}(2\log_2 3\cdot\log_3 2)=\log_{1/4}2=\frac{1}{\log_2\frac{1}{4}}=-\frac{1}{2\log_2 2}=-\frac{1}{2}.$$

Ответ: $-0{,}5$.

4.071. $\dfrac{\log_2^2 10+\log_2 10\cdot\log_2 5-2\log_2^2 5}{\log_2 10+2\log_2 5}=$

$$=\frac{(\log_2 2+\log_2 5)^2+(\log_2 2+\log_2 5)\log_2 5-2\log_2^2 5}{\log_2 5+\log_2 2+2\log_2 5}=$$

$$=\frac{(1+\log_2 5)^2+\log_2 5(1+\log_2 5)-2\log_2^2 5}{1+3\log_2 5}=\frac{1+3\log_2 5}{1+3\log_2 5}=1.$$

Ответ: 1.

4.081. Имеем $3\log_{\frac{\sqrt{a}}{b}}\left(\dfrac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt{b}}\right)+\log_{\frac{\sqrt{a}}{b}}b=3\dfrac{\log_b\dfrac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt{b}}}{\log_b\dfrac{\sqrt{a}}{b}}+\dfrac{1}{\log_b\dfrac{\sqrt{a}}{b}}=$

$$=\frac{3\left(\log_b(\sqrt[3]{a})-\log_b\sqrt{b}\right)}{\log_b\sqrt{a}-\log_b b}+\frac{1}{\log_b\sqrt{a}-\log_b b}=\frac{\log_b a-\frac{3}{2}}{\frac{1}{2}\cdot\log_b a-1}+\frac{1}{\frac{1}{2}\cdot\log_b a-1}$$

Подставляя вместо $\log_b a=3$, найдем $\dfrac{3-\frac{3}{2}}{\frac{1}{2}\cdot 3-1}+\dfrac{1}{\frac{1}{2}\cdot 3-1}=5.$

Ответ: 5.

4.091. 1) $3^{1+\frac{1}{2\log_4 3}}=3^{1+\frac{\log_3 4}{2}}=3^{1+\log_3 2}=3\cdot 3^{\log_3 2}=3\cdot 2=6;$

2) $8^{\frac{1}{3\log_9 2}}=2^{\frac{1}{\log_9 2}}=2^{\log_2 9}=9;$

3) $(6+9+1)^{1/2}=4.$

Ответ: 4.

4.101. 1) $\log_2 3 + \log_3 16 + 4 = \log_2 3 + 4\log_3 2 + 4 =$

$$= \frac{1}{\log_3 2} + 4\log_3 2 + 4 = \frac{1 + 4\log_3 2 + 4\log_3^2 2}{\log_3 2} = \frac{(1+2\log_3 2)^2}{\log_3 2};$$

2) $\log_2 3 - 2\log_{12} 3 = \frac{1}{\log_3 2} - \frac{2}{\log_3 12} = \frac{1}{\log_3 2} - \frac{2}{1+2\log_3 2} = \frac{1}{\log_3 2(1+2\log_3 2)};$

3) $\frac{(1+2\log_3 2)^2}{\log_3 2} \quad \frac{1}{\log_3 2(1+2\log_3 2)} \quad \log_3 2 - \log_2 3 = \frac{1+2\log_3 2}{\log_3 2} - \frac{1}{\log_3 2} = 2.$

Ответ: 2.

§ 13. Показательные уравнения и системы уравнений

4.111. Имеем $\frac{49}{16} = \left(\frac{7}{4}\right)^2 = \left(\frac{4}{7}\right)^{-2}$. Поэтому $\left(\frac{4}{7}\right)^{-2(x+1)} = \left(\frac{4}{7}\right)^9$, откуда $-2(x+1) = 9$, т.е. $x = -5{,}5$.
Ответ: $-5{,}5$.

4.121. Имеем $2\sqrt{2} = 2^{x-1}$; так как $2\sqrt{2} = 2^{3/2}$, то $2^{3/2} = 2^{x-1}$, откуда $\frac{3}{2} = x - 1$, т.е. $x = 2{,}5$.

Ответ: 2,5.

4.131. Имеем $\sqrt[3]{5^{2x-3}} = \frac{5}{\sqrt[4]{5}}$ или $5^{\frac{2x-3}{3}} = 5^{\frac{3}{4}}$, откуда $\frac{2x-3}{3} = \frac{3}{4}$, т.е. $x = 2{,}625$.

Ответ: 2,625.

4.141. Имеем $2^x + \frac{5}{2}\ 2^x = \frac{7}{32}$, откуда $2^x\left(1 + \frac{5}{2}\right) = \frac{7}{32}$ или $2^x = 2^{-4}$, т.е. $x = -4$.
Ответ: -4.

4.151. Так как $\frac{28}{5} = \left(\frac{5}{28}\right)^{-1}$, то $\left(\frac{5}{28}\right)^{(28x^2-5)} = \left(\frac{5}{28}\right)^{5x^2-127}$,
откуда $-28x^2 + 5 = 5x^2 - 127$, откуда $x_1 = 2$, $x_2 = -2$.
Ответ: -2; 2.

4.161. Имеем $7^{x-1} = 6^{2-2x}$, или $7^{x-1} = 36^{1-x}$, откуда $7^{x-1} = \left(\frac{1}{36}\right)^{x-1}$ и, значит, $(7 \cdot 36)^{x-1} = 1$. Отсюда $x - 1 = 0$, т.е. $x = 1$.

Ответ: 1.

4.171. Имеем $8 \cdot 3^x = 243 \cdot 2^{x-2}$; так как $8 = 2^3, 243 = 3^5$; то $2^3 \cdot 3^x = 3^5 \cdot 2^{x-2}$, или $3^{x-5} = 2^{x-5}$. Отсюда $x - 5 = 0$, т.е. $x = 5$.

Ответ: 5.

4.181. Запишем уравнение в виде $3^{2x} - 25 \cdot 3^x - 54 = 0$. Пусть $3^x = y$, тогда $y^2 - 25y - 54 = 0$, откуда $y_1 = 27$, $y_2 = -2$. Второй корень не годится (по условию $y > 0$). Таким образом, $3^x = 27$, т.е. $x = 3$.
Ответ: 3.

4.191. Имеем $2^{3x}\ 2^{10} + 2^{3x}\ 2^9 = 3^{3x}\ 2^9 - 3^{3x}\ 3^7$.

Далее, $2^{3x}\cdot 2^9(2+1)=3^{3x}\cdot 3^7(3^2-1)$, или $3^{3x}\cdot 2^9\cdot 3=3^{3x}\cdot 3^7\cdot 2^3$, или $2^{3x+6}=3^{3x+6}$, или $3x+6=0$, откуда $x=-2$.
Ответ: -2.

4.201. Имеем $\frac{2}{2^x}+\frac{1}{2^x2^3}-\frac{1}{2^x2^4}-\frac{1}{2^x2^5}=130$. Отсюда $\frac{1}{2^x}\left(2+\frac{1}{8}-\frac{1}{16}-\frac{1}{32}\right)=130$, или $\frac{1}{2^x}=64$. Поэтому $2^{-x}=2^6$, т.е. $x=-6$
Ответ: -6.

4.211. Пусть $5^{\frac{1}{\sqrt{x}}}=z$, $3^{\frac{1}{\sqrt{x}}}=t$. Тогда уравнение примет вид $9z^2+2tz-75t^2=0$. Разделив обе части уравнения на t^2, получим $9\left(\frac{z}{t}\right)^2+2\frac{z}{t}-75=0$. Положим $\frac{z}{t}=u$. Тогда $9u^2+2u-75=0$, откуда $u_1=\frac{25}{9}$, $u_2=-3$. Второй корень отбрасываем, поскольку $z>0$, $t>0$. Таким образом $\frac{z}{t}=\frac{25}{9}$, откуда $\left(\frac{5}{3}\right)^{\frac{1}{\sqrt{x}}}=\left(\frac{5}{3}\right)^2$, или $\frac{1}{\sqrt{x}}=2$, т.е. $x=0,25$.
Ответ: 0,25.

4.221. Возведя в квадрат обе части уравнения, получим $5^x-1=(7-5^x)^2$. Пусть $5^x=y$, тогда $y-1=(7-y)^2$, откуда $y^2-15y+50=0$, т.е. $y_1=10$, $y_2=5$. Согласно условию, $7-5^x\geq 0$, т.е. $5^x\leq 7$ или $y\leq 7$. Поэтому y_1 не годится.
Итак, $5^x=5$, т.е. $x=1$.
Ответ. 1

4.231. Обозначим $y_1=2^x$ и $y_2=2-x$ (рис. 14), построим графики этих функций. Число точек пересечения графиков определит число корней исходного уравнения. В данном случае имеется одна такая точка.
Ответ: 1.

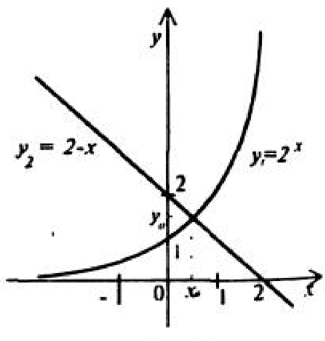


Рис. 14

4.241. Умножив обе части уравнения на 2^x, получим $2^{3x}-7\cdot 2^{\frac{3x-3}{2}}=1$. Пусть $\frac{3x-3}{2}=y$, откуда $3x=2y+3$. Тогда уравнение примет вид $2^{2y+3}-7\cdot 2^y=1$ или $8\cdot 2^{2y}-7\cdot 2^y-1=0$. Полагая теперь $2^y=z$, получим $8z^2-7z-1=0$, откуда $z_1=1$, $z_2=-\frac{1}{8}$. Второй корень не годится, так как $z=2^y>0$. Отсюда $x=1$.
Ответ: 1.

4.251. А н а л и т и ч е с к о е р е ш е н и е. Данное уравнение является квадратным *относительно* $t=2^x$; *поэтому* $2^{x_1}=2+\sqrt{a+4}$, $2^{x_2}=2-\sqrt{a+4}$. Каждое из полученных уравнений не может иметь более одного корня в силу монотонности функции $t=2^x$ и, согласно условию, эти корни должны быть различны. Для существования двух различных корней должны быть выполнены следующие условия:

$$\begin{cases} a+4>0, \\ 2-\sqrt{a+4}>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a>-4, \\ \sqrt{a+4}<2 \end{cases} \Leftrightarrow -4<a<0.$$

Заметим, что значение $a = -4$ не годится, так как в этом случае исходное уравнение имеет один корень.

Графическое решение. Пусть $2^x = t > 0$, тогда уравнение примет вид $t^2 - 4t = a$. График параболы $y = t^2 - 4t$ при условии $t > 0$ пересекается семейством горизонтальных прямых $y = a$ ровно в двух точках только в области, расположенной под осью t (рис.15). Искомые значения параметра $a = -3$; $a = -2$; $a = -1$.

Ответ: $a = -3$; $a = -2$; $a = -1$.

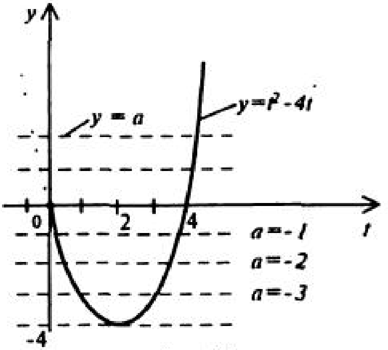


Рис. 15

4.261. Из второго уравнения системы найдем $y = x + 3$ и подставим в первое уравнение. Тогда получим $3^{x+3} \cdot 2^x = 972$, или $3^x \cdot 3^3 \cdot 2^x = 972$, откуда $6^x = 36$, т.е. $x = 2$. Отсюда находим $y = 5$.

Ответ: (2; 5).

4.271. Запишем систему в виде $\begin{cases} 3^x \cdot 5^{2y} = 5625, \\ 5^x \cdot 3^{2y} = 2025 \end{cases}$ и, разделив первое уравнение на второе, имеем $3^{x-2y} \cdot 5^{2y-x} = \frac{25}{9}$, или $\frac{5^{2y-x}}{3^{2y-x}} = \frac{5^2}{3^2}$, или $\left(\frac{5}{3}\right)^{2y-x} = \left(\frac{5}{3}\right)^2$, откуда $2y - x = 2$. Перемножив оба уравнения системы, найдем $3^x \cdot 5^x \cdot 3^{2y} \cdot 5^{2y} = 5625 \cdot 2025$ или $15^{x+2y} = 15^6$, откуда $x + 2y = 6$. Остается решить систему $\begin{cases} 2y - x = 2, \\ 2y + x = 6 \end{cases}$, из которой находим $x = 2$, $y = 2$.

Ответ: (2; 2).

§ 14. Логарифмические уравнения и системы уравнений

4.281. Согласно определению логарифма, $2x = 4^{1/2} = 2$, откуда $x = 1$.

Ответ: 1.

4.291. Имеем $3x + 1 = 0{,}5^{-2} = 4$, откуда $x = 1$.

Ответ: 1.

4.301. Здесь $\sqrt{x-1} = 2$, откуда $x - 1 = 4$, т.е. $x = 5$.

Ответ: 5.

4.311. Имеем $\log_{\frac{12-x}{x}} 3 = 1$, откуда $3 = \frac{12-x}{x}$, или $3x = 12 - x$, т.е. $x = 3$.

Ответ: 3.

4.321. Имеем $2 + \log_2(3 + x) = 1$, откуда $\log_2(3 + x) = -1$, или $3 + x = 0{,}5$, т.е. $x = -2{,}5$.

Ответ: $-2{,}5$.

4.331. Так как $\log_2(x^2 + 4x + 11) = \log_{0,5} 0{,}5^3 = 3$, то $x^2 + 4x + 11 = 8$, или $x^2 + 4x + 3 = 0$. Отсюда $x_1 = -1$, $x_2 = -3$.

Ответ: -1; -3.

4.341. Здесь $3x^2 + 2x - 1 = (x + 1)^2$, или $2x^2-2 = 0$, откуда $x_1 = 1$, $x_2 = -1$. Второй корень не годится, так как $x + 1 > 0$.

Ответ: 1.

4.351. Преобразуем правую часть:

$$\frac{1}{\log_4 81} = \frac{1}{\log_4 3^4} = \frac{1}{4\log_4 3} = \frac{1}{4}\log_3 4 = \frac{1}{2}\log_3 2 = \log_3\sqrt{2}$$

Тогда $\log_3\left(\sqrt{2}\,(x+5)\right) = \log_3\sqrt{2}$, или $\sqrt{2}\,(x+5) = \sqrt{2}$, откуда $x + 5 = 1$, т.е. $x = -4$.

Ответ: -4.

4.361. Перейдем к логарифмам по основанию 3: $\log_{\frac{1}{3}} 27 = \dfrac{\log_3 27}{\log_3 \frac{1}{3}} = -3$;

$$\log_{\frac{1}{9}}(2x-3) = \frac{\log_3(2x-3)}{\log_3\frac{1}{9}} = \frac{\log_3(2x-3)}{-2} = -\frac{1}{2}\log_3(2x-3).$$

Тогда получим уравнение: $-3 + \log_3(2x-3) = -\frac{1}{2}\log_3(2x-3)$ или $\frac{3}{2}\log_3(2x-3) = 3$, откуда $\log_3(2x-3) = 2$, или $2x-3 = 9$, т.е. $x = 6$.

Ответ: 6.

4.371. Так как $3\log_6\left(\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}\right) = -\log_6 x$ и $\frac{1}{2}\log_6(2x+4)^2 = \log_6(2x+4)$, то уравнение примет вид $\log_6(x - 1) + \log_6 16 - \log_6 x = \log_6(2x + 4)$, или $\log_6\dfrac{16(x-1)}{x} = \log_6(2x+4)$, или $\dfrac{16(x-1)}{x} = 2x+4$, откуда $2x^2 - 12x + 16 = 0$, т.е. $x_1 = 4$, $x_2 = 2$.

Ответ: 2, 4

4.381. Имеем $\log_4 x\,(x-5)\dfrac{x-5}{x} = 0$, или $\log_4(x-5)^2 = 0$, или $2\log_4|x-5| = 0$, откуда $|x-5| = 1$, т.е. $x_1 = 6$; $x_2 = 4$. Второй корень не годится, т.к. должно быть $\dfrac{x-5}{x} > 0$.

Ответ: 6.

4.391. Так как $3^{\log_3 9} = 9$, то уравнение примет вид $\log_2^2 x - 3\log_2 x + 5 = 9$, или $\log_2^2 x - 3\log_2 x - 4 = 0$. Пусть $\log_2 x = y$; тогда $y^2-3y-4 = 0$, откуда $y_1 = -1$, $y_2 = 4$. Из уравнения $\log_2 x = -1$ находим $x_1 = 0{,}5$; из уравнения $\log_2 x = 4$ находим $x_2 = 16$.

Ответ: 0,5; 16.

4.394. Указание. Преобразовать первый член уравнения:

$$\log_2^2(x^3) = \log_2(x^3)\log_2(x^3) = 9\log_2^2 x$$

4.401. Переходя к логарифмам по основанию 3, получим

$$\log_3 x+\frac{\log_3 9}{\log_3 x}=3 \text{ или } \log_3 x+\frac{2}{\log_3 x}=3.$$

Пусть $\log_3 x = y$, тогда $y+\frac{2}{y}=3$, откуда $y^2-3y+2=0$, т.е. $y_1=1$, $y_2=2$. Следовательно, $\log_3 x=1$, т.е. $x_1=3$; $\log_3 x=2$, т.е. $x_2=9$.

Ответ: 3; 9.

4.411. Обозначив $y_1 = 1-x$ и $y_2 = \log_2 x$, построим графики этих функций (рис. 16). Поскольку графики пересекаются в одной точке (1; 0), уравнение имеет один корень.

Ответ: 1.

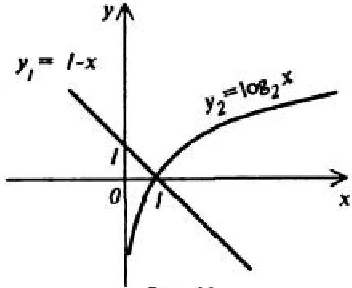


Рис. 16

4.421. Так как $2^{\log_3 x^2}=2^{2\log_3 x}=4^{\log_3 x}$, то $4^{\log_3 x}5^{\log_3 x}=400$, или $20^{\log_3 x}=20^2$, откуда $\log_3 x = 2$ т.е. $x = 9$.

Ответ: 9.

4.431. Предварительно выполним преобразования:

$$\frac{4}{3}\log_3^2(5x-6)^3=\frac{4}{3}\cdot 9\log_3^2(5x-6)=12\log_3^2(5x-6);$$

$$\log_3(5x-6)^2\log_3 x^6=18\log_3(5x-6)\cdot\log_3 x; \qquad -6\log_3^2\frac{1}{x}=-6\log_3^2 x.$$

Поэтому уравнение примет вид

$$12\log_3^2(5x-6)-18\log_3(5x-6)\cdot\log_3 x=-6\log_3^2 x.$$

Разделив обе части уравнения на $\log_3^2 x$, получим

$$2\left(\frac{\log_3(5x-6)}{\log_3 x}\right)^2-3\frac{\log_3(5x-6)}{\log_3 x}=-1.$$

Пусть $\frac{\log_3(5x-6)}{\log_3 x}=y$. Тогда $2y^2-3y+1=0$, откуда $y_1=1$, $y_2=0{,}5$.

а) $\frac{\log_3(5x-6)}{\log_3 x}=1$, или $\log_x(5x-6)=1$, откуда $5x-6=x$, т.е. $x=1{,}5$.

б) $\log_x(5x-6)=0{,}5$, или $5x-6=\sqrt{x}$, или $5x-\sqrt{x}-6=0$.

Пусть $\sqrt{x}=z$; тогда $5z^2-z-6=0$, откуда $z_1=-1$, $z_2=\frac{6}{5}$. Первый корень не годится. Значит, $\sqrt{x}=1{,}2$, т.е. $x=1{,}44$.

Ответ: 1,44; 1,5.

4.441. Имеем.

$$4^{\log_4^2(x-1)}=\left(4^{\log_4(x-1)}\right)^{\log_4(x-1)}=(x-1)^{\log_4(x-1)};$$

$$(x-1)^{\log_4(x-1)^2}=(x-1)^{2\log_4(x-1)};$$

$$11(x-1)^{\log_4(x-1)}-3(x-1)^{2\log_4(x-1)}=-4$$

Пусть $(x-1)^{\log_4(x-1)} = y$. Тогда получим уравнение $11y - 3y^2 + 4 = 0$, или $3y^2 - 11y - 4 = 0$, откуда $y_1 = 4$, $y_2 = -\frac{1}{3}$. Второй корень не годится, так как $y > 0$. Значит, $(x-1)^{\log_4(x-1)} = 4$. Логарифмируя обе части этого уравнения по основанию 4, приходим к уравнению $\log_4^2(x-1) = 1$, откуда $\log_4(x-1) = \pm 1$.

1) $\log_4(x-1) = 1$, $x-1 = 4$, $x = 5$;

2) $\log_4(x-1) = -1$, $x-1 = \frac{1}{4}$, $x = 1{,}25$.

Ответ: 1,25; 5.

4.451. Пусть $y_1 = |\log_2 x|$, $y_2 = \left(\frac{1}{2}\right)^x - \frac{1}{2}$. Построив графики этих функций (рис. 17), убеждаемся, что они пересекаются в одной точке.

Ответ: 1.

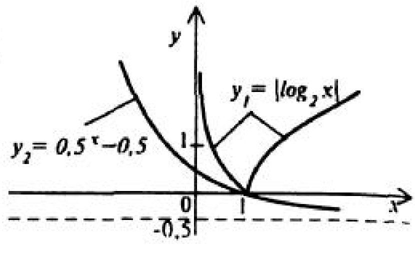


Рис. 17

4.461. Преобразуем левую часть уравнения:

$$\frac{\log_5 \log_5 x}{\log_5 x} = \log_x \log_5 x;$$

$x^{\log_x \log_5 x} = \log_5 x$. Следовательно, $\log_5 x = \log_5 14$, откуда $x = 14$.

Ответ: 14.

4.471. Логарифмируя обе части уравнения по основанию 10, найдем $\lg^2|x| = 4$, откуда $\lg|x| = \pm 2$.

а) $\lg|x| = 2$, $|x| = 100$, $x_1 = -100$, $x_2 = 100$;

б) $\lg|x| = -2$, $|x| = 0{,}01$, $x_3 = -0{,}01$, $x_4 = 0{,}01$.

Ответ: $-0{,}01$; -100; $0{,}01$; 100.

4.481. Из второго уравнения системы выразим $y = 4x - 1$ и подставим в первое уравнение: $\log_3 2x - \log_3 \frac{2}{4x-1} = 1$, откуда $\log_3 x(4x-1) = 1$, или $4x^2 - x - 3 = 0$, т.е. $x_1 = 1$, $x_2 = -\frac{3}{4}$. Второй корень не годится, так как, для того чтобы имело смысл первое уравнение системы, должны быть выполнены условия $x > 0$, $y > 0$. Итак, $x = 1$, $y = 3$.

Ответ: (1; 3).

4.491. После перехода к логарифмам по основанию 2 система примет вид:

$$\begin{cases} \log_2 x - \frac{1}{2} \cdot \log_2 y = 0 \\ \frac{1}{2} \log_2 x + \log_2 y = 1 \end{cases}$$

Умножив второе уравнение на -2 и прибавив к первому, получим $5 - 2{,}5 \cdot \log_2 y = -2$, или $\log_2 y = \frac{4}{5}$, откуда $y = 2^{0,8}$. Из первого уравнения найдем $\log_2 x - \frac{1}{2}\log_2 2^{0,8} = 0$, или $\log_2 x = 0{,}4$, откуда $x = 2^{0,4}$.

Ответ: $\left(\sqrt[5]{4}, \sqrt[5]{16}\right)$

4.501. Складывая оба уравнения, получим $x + x\log_2 32 = 3y$, или $y = 2x$. Подставляя выражение для y в первое уравнение, найдем $x + \log_2 2x = 2x + \log_2 x$, или $x + \log_2 2 + \log_2 x = 2x + \log_2 x$, откуда $x = 1$ и $y = 2$.

Ответ: (1; 2).

4.511. Логарифмируя второе уравнение по основанию 4, получим $\frac{y}{6}\log_4 x = 1$ или $\log_4 x = \frac{6}{y}$. Подставляя в первое уравнение, имеем $\frac{6}{y} = y - 1$, или $y^2 - y - 6 = 0$, и, значит, $y_1 = -2$, $y_2 = 3$. Отсюда $\log_4 x = 3$, т.е. $x_1 = \frac{1}{64}$; $\log_4 x = 2$, т.е. $x_2 = 16$.

Ответ: $(\frac{1}{64}; -2)$, (16; 3).

Раздел V. Неравенства

§ 15. Рациональные неравенства и системы неравенств

5.001. Перенеся все члены неравенства в левую часть и приведя к общему знаменателю, получим $2(2x + 1) - 3(3x - 1) - 6 > 0$, откуда $-5x - 1 > 0$. Умножив обе части последнего неравенства на -1 и меняя его знак, найдем $5x + 1 < 0$, т.е. $x < -0{,}2$. Наибольшее целое x, удовлетворяющее этому неравенству, есть $x = -1$.
Ответ: -1.

5.011. Приведем систему неравенств к виду $\begin{cases} x < 6{,}5, \\ x > 3 \end{cases}$. Отсюда $3 < x < 6{,}5$.

Ответ: 4; 5; 6.

5.021. Приведем неравенство к виду $\dfrac{x - \frac{5}{6}}{x + \frac{1}{4}} < 0$. Решим это неравенство методом интервалов. Удобно воспользоваться следующей схемой (рис. 18). Отметим на оси абсцисс нули выражений, стоящих в числителе и знаменателе, т.е. $\frac{5}{6}$ и $-\frac{1}{4}$. Тогда при $x > \frac{5}{6}$ (например, при $x = 2$) дробь $\dfrac{x - \frac{5}{6}}{x + \frac{1}{4}}$ положительна, при $-\frac{1}{4} < x < \frac{5}{6}$ (например, при $x = 0$) — отрицательна, а при $x < -\frac{1}{4}$ (например, при $x = -1$) — положительна. Таким образом, решением неравенства служит интервал $\left(-\frac{1}{4}; \frac{5}{6}\right)$, который содержит только одно целое число 0.
Ответ: 0.

5.031. Найдем корни квадратного трехчлена, для чего решим уравнение $2x^2-9x+4=0$, откуда $x_1=4$, $x_2=0{,}5$. Тогда неравенство примет вид $2(x-4)(x-0{,}5)<0$, или $(x-4)(x-0{,}5)<0$. Из схемы (рис. 19) следует, что решением неравенства служит интервал $(0{,}5;\ 4)$, который содержит целые числа 1; 2; 3.

Ответ: 1; 2; 3.

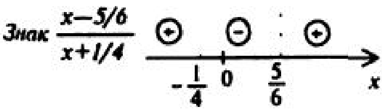


Рис. 18

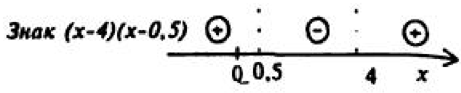


Рис. 19

5.041. Перенеся все члены неравенства в левую часть и приведя к общему знаменателю, получим $\frac{3-x}{3x}>0$, или $\frac{x-3}{x}<0$. Из схемы (рис. 20) следует, что решением неравенства является интервал $(0;\ 3)$.

Ответ: $(0;\ 3)$.

5.051. Приведем неравенство к виду $\frac{(x-7)(x+7)}{x}<0$. Из схемы (рис. 21) следует, что решением неравенства служит объединение интервалов: $(-\infty;\ -7)\cup(0;\ 7)$.

Ответ: $(-\infty;\ -7)\cup(0;\ 7)$.

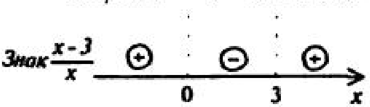


Рис. 20

Рис. 21

5.061. Приведем неравенство к виду $\frac{x-\frac{15}{8}}{x(x-3)}<0$. Из схемы (рис.22) следует, что решением неравенства является объединение интервалов: $(-\infty;\ 0)\cup\left(\frac{15}{8};\ 3\right)$.

Ответ: $(-\infty;\ 0)\cup\left(\frac{15}{8};\ 3\right)$.

5.071. Приведем неравенство к виду $\frac{x^2+4x}{x^2+x-2}<0$, откуда $\frac{x(x+4)}{(x-1)(x+2)}<0$. Из схемы (рис. 23) следует, что решение неравенства есть объединение интервалов: $(-4;\ -2)\cup(0;\ 1)$.

Ответ: $(-4;\ -2)\cup(0;\ 1)$.

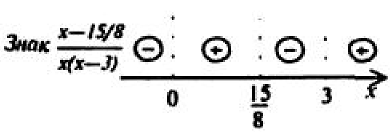


Рис. 22

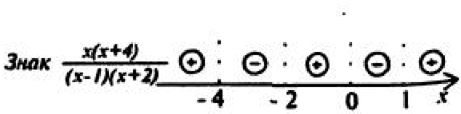


Рис. 23

5.081. Перенеся все члены неравенства в левую часть, получим

$$\frac{x^2+4x-1}{(x+1)(x+3)}-\frac{1}{x+1}\le 0,\quad \frac{x^2+3x-4}{(x+1)(x+3)}\le 0,\quad \text{откуда}\quad \frac{(x-1)(x+4)}{(x+1)(x+3)}\le 0.$$

Используя схему (рис. 24) и учитывая знак равенства, заключаем, что решением неравенства является объединение полуинтервалов: $[-4; -3) \cup (-1; 1]$.

Ответ: $[-4; -3) \cup (-1; 1]$.

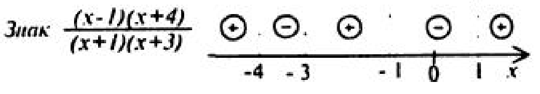


Рис. 24

5.091. Пусть $x^2-3x-2=y$. Тогда неравенство примет вид $y(y+3)<10$, или $y^2+3y-10<0$, откуда $(y+5)(y-2)<0$. Решением этого неравенства служит интервал $-5<y<2$. Таким образом, получаем систему неравенств

$$\begin{cases} x^2-3x-2<2 \\ x^2-3x-2>-5 \end{cases} \text{или} \begin{cases} x^2-3x-4<0 \\ x^2-3x+3>0 \end{cases} \text{откуда} \begin{cases} (x-4)(x+1)<0 \\ \left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{3}{4}>0 \end{cases}$$

Поскольку второе неравенство выполняется при всех x, решение этой системы есть интервал $(-1; 4)$.

Ответ: $(-1; 4)$.

5.101. 1) Графическое решение. Построим график функции $y_1 = 3x^2-18x-3$ (*рис. 25*). *Наибольшее значение параметра a, при котором* неравенство верно для любого $x\in R$, то есть при котором вся парабола располагается выше прямой $y_2=a$, равно -30. Заметим, что для решения задачи достаточно определить ординату вершины параболы $y(3)=-30$.

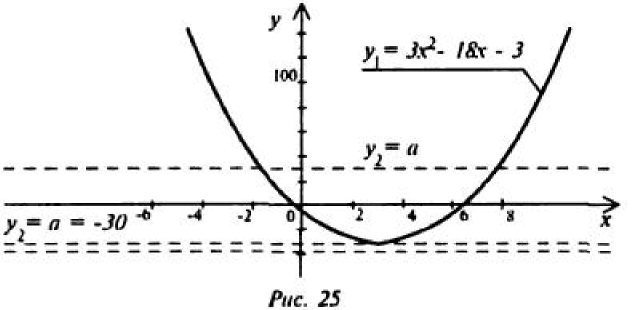


Рис. 25

2) Аналитическое решение.

$$3x^2-18x-3\ge a \Rightarrow 3x^2-18x-3-a\ge 0$$

Согласно условию, должно быть

$$D=18^2+12(3+a)\le 0 \Rightarrow a\le -30 \Rightarrow a=-30.$$

Ответ: -30.

5.111. Приведем систему к виду $\begin{cases} x+y<2{,}5 \\ y-x<3 \\ y>1 \end{cases}$

Складывая первое и второе неравенства, имеем $y < 2{,}75$, а учитывая третье неравенство, найдем $1 < y < 2{,}75$. В этом интервале содержит только одно целое число 2. При $y = 2$ из данной системы неравенств получим

$$\begin{cases} x<0{,}5 \\ x>-1 \end{cases} \quad \text{откуда } -1 < x < 0{,}5.$$

В этом интервале содержится только одно целое число 0.

Ответ: $x = 0$, $y = 2$.

§ 16. Неравенства, содержащие неизвестные под знаком абсолютной величины

5.121. Рассмотрим два случая. 1) Если $0{,}5-x \geq 0$, то $|0{,}5-x| = 0{,}5-x$ и неравенство примет вид $0{,}5-x < 3$. Таким образом, $0 \leq 0{,}5-x < 3$, или $0 \geq x-0{,}5 > -3$, откуда $2{,}5 < x \leq 0{,}5$. 2) Если $0{,}5-x < 0$, то $|0{,}5-x| = x-0{,}5$ и неравенство примет вид $x-0{,}5 < 3$. Следовательно,

$$\begin{cases} 0{,}5-x<0, \\ x-0{,}5<3, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x>0{,}5, \\ x<3{,}5, \end{cases}$$

откуда $0{,}5 < x < 3{,}5$. Объединяя оба случая, получим интервал $(-2{,}5;\ 3{,}5)$.

Ответ: $(-2{,}5;\ 3{,}5)$.

З а м е ч а н и е. Решением неравенства $|x| < \varepsilon$ является интервал $-\varepsilon < x < \varepsilon$. Аналогично, решением неравенства $|x-a| < \varepsilon$ служит интервал $a-\varepsilon < x < a+\varepsilon$.

5.131. Рассмотрим два случая. 1) Если $5x-3 \geq 0$, то $|5x-3| = 5x-3$ и неравенство примет вид $5x-3 > 6x-2$, или $x < -1$. Следовательно,

$$\begin{cases} 5x-3\geq 0 \\ x<-1 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x\geq 0{,}6 \\ x<-1 \end{cases} \quad \text{что невозможно.}$$

2) Если $5x-3 < 0$, то $|5x-3| = -5x+3$. Тогда $-5x+3 > 6x-2$, или $x < \frac{5}{11}$.

Таким образом,

$$\begin{cases} 5x-3<0 \\ x<\dfrac{5}{11} \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x<0{,}6 \\ x<\dfrac{5}{11} \end{cases} \quad \text{откуда } x<\frac{5}{11}.$$

Наибольшее целое x, удовлетворяющее этому неравенству, есть 0.

Ответ: 0.

5.141. Так как $|x + 1| \geq 0$ и, по условию, $|x + 1| \neq 0$, то данное неравенство равносильно следующему: $2x + 5 > |x + 1|$. Последнее, в свою очередь, эквивалентно системе неравенств $-(2x + 5) < x + 1 < 2x + 5$, или

$$\begin{cases} 2x+5>x+1 \\ -(2x+5)<x+1 \end{cases}, \text{ откуда } \begin{cases} x>-4, \\ x>-\dfrac{4}{3} \end{cases}$$

Наименьшим целым числом x, удовлетворяющим этой системе неравенств, является 0. Заметим, что $x \neq -1$, иначе выражение в левой части данного неравенства не имеет смысла.

Ответ: 0.

5.151. Пусть $|x| = y$. Заметим далее, что $|x| + 1 > 0$. Поэтому данное неравенство эквивалентно следующему: $-2 \geq (y-2)(y + 1)$, или $y^2-y \leq 0$, или $0 \leq y \leq 1$, или $0 \leq |x| \leq 1$. Отсюда $-1 \leq x \leq 1$.

Ответ: $[-1; 1]$.

§ 17. Иррациональные неравенства

5.161. Возведя обе части неравенства в квадрат, получим $x > 4$.

Ответ: 5.

5.171. Отметим, что областью определения функции $\sqrt{4+2x}$ является множество $4 + 2x \geq 0$, т.е. $x \geq -2$. Далее, возведя обе части неравенства в квадрат, получим $4 + 2x < 2{,}25$, откуда $x < -0{,}875$. Учитывая область определения функции, находим $-2 \leq x < -0{,}875$.

Ответ: $[-2; -0{,}875)$.

5.181. Рассмотрим два случая. 1) Если $2-x \geq 0$, то обе части неравенства можно возвести в квадрат. Тогда $14-x > (2-x)^2$, или $x^2-3x-10 < 0$, откуда $-2 < x < 5$. Учитывая условие $2-x \geq 0$, получим $-2 < x \leq 2$.

2) Если $2-x < 0$, т.е. $x > 2$, то неравенство будет выполнено для всех x, удовлетворяющих также и неравенству $14-x \geq 0$, т.е. $x \leq 14$. Отсюда $2 < x \leq 14$. Таким образом, объединяя оба случая, получим $-2 < x \leq 14$.

Ответ $(-2; 14]$.

§ 18. Показательные неравенства

5.191. Так как $\sqrt{2} = 2^{1/2}$, то $2^{-x} = 2^{1/2}$, и $-x < \dfrac{1}{2}$, откуда $x > -\dfrac{1}{2}$. Наименьшее целое число x, удовлетворяющее этому неравенству, есть 0.
Ответ: 0.

5.201. Так как $\sqrt[3]{3} = 3^{1/3}$, то неравенство примет вид $3^{2x} < 3^{1/3}$, или $2x < \dfrac{1}{3}$, откуда $x < \dfrac{1}{6}$. Наибольшим целым числом x, удовлетворяющим неравенству, является 0.

Ответ: 0.

5.211. Умножив обе части неравенства на 5^{x+1}, получаем $3 \cdot 5^{2(x+1)} + 6 < 81$, или $5^{2(x+1)} < 5^2$, или $2(x+1) < 2$ или $x + 1 < 1$, откуда $x < 0$. Наибольшее целое число x, удовлетворяющее неравенству, есть -1

Ответ: -1.

5.221. Преобразуем неравенство следующим образом: $2^{2x} + 120 \cdot 2^{2x} < 11^x + 15 \cdot 11^x$, или $121 \cdot 2^{2x} < 16 \cdot 11^x$. Разделив обе части неравенства на $121 \cdot 16$, получим $2^{2x-4} < 11^{x-2}$, или $4^{x-2} < 11^{x-2}$. Далее, разделив обе части неравенства на 4^{x-2}, получим $\left(\frac{11}{4}\right)^{x-2} > 1$, откуда $x - 2 > 0$, т.е $x > 2$. Наименьшим целым числом, удовлетворяющим неравенству, является 3

Ответ: 3.

5.231. Раскрыв скобки, получим $3^{2x} - 4 \cdot 3^x + 3 < 0$. Пусть $3^x = y$. Тогда $y^2 - 4y + 3 < 0$, откуда $1 < y < 3$. Таким образом, $1 < 3^x < 3$, т.е. $0 < x < 1$.

Ответ: $(0; 1)$.

5.241. Перепишем неравенство в виде $\frac{1}{2} \cdot 2^{2x} - \frac{3}{2} \cdot 2^x + 1 < 0$, или $2^{2x} - 3 \cdot 2^x + 2 < 0$. Пусть $2^x = y > 0$. Тогда $y^2 - 3y + 2 < 0$, т.е. $1 < y < 2$. Таким образом, $1 < 2^x < 2$, откуда $0 < x < 1$.

Ответ: $(0; 1)$.

5.251. Перепишем неравенство в виде $\left(\frac{3}{4}\right)^{6x+10-x^2} < \left(\frac{3}{4}\right)^3$, откуда, учитывая, что $\frac{3}{4} < 1$, найдем $6x + 10 - x^2 > 3$, или $x^2 - 6x - 7 < 0$, т.е. $-1 < x < 7$.

Ответ: $(1; 7)$.

5.261. Перепишем неравенство в виде $\left(\frac{2}{5}\right)^{\frac{6-5x}{2+5x}} > \left(\frac{2}{5}\right)^{-2}$, откуда, учитывая, что $\frac{2}{5} < 1$, получим $\frac{6-5x}{2+5x} < -2$, или $\frac{6-5x}{2+5x} + 2 < 0$. После приведения к общему знаменателю и упрощений найдем $\dfrac{x+2}{x+\frac{5}{2}} < 0$, откуда $-2 < x < -0{,}4$.

Ответ: $(-2; -0{,}4)$.

5.271. Преобразуем неравенство: $\frac{6^{\sqrt{x}}}{x+1} - \frac{6^{\sqrt{x}}}{6} > 0$, или $6^{\sqrt{x}} \frac{6-(x+1)}{6(x+1)} > 0$, откуда $6^{\sqrt{x}} \frac{x-5}{x+1} < 0$. Учитывая, что $6^{\sqrt{x}} > 0$ при всех $x \geq 0$, имеем $\frac{x-5}{x+1} < 0$, откуда $-1 < x < 5$. Так как вместе с последним неравенством должно быть выполнено условие $x \geq 0$, то окончательно получим $0 \leq x < 5$.

Ответ: $[0; 5)$.

5.281. Пусть $3^{\sqrt{x}} = y$. Тогда неравенство примет вид $y - 2 < \frac{3}{y}$, или $y^2 - 2y - 3 < 0$, откуда $-1 < y < 3$ или учитывая, что $3^{\sqrt{x}} = y > 0$ для всех $x \geq 0$, получим $0 < y < 3$. Поэтому $3^{\sqrt{x}} < 3$ или $\sqrt{x} < 1$, что дает $x < 1$, а с учетом условия $x \geq 0$ получим $0 \leq x < 1$.

Ответ: $[0; 1)$.

5.291. Рассмотрим два случая. 1) Если $x-0,5>1$, то должно быть $x^2-\frac{1}{4}<0$, или $(x-0,5)(x+0,5)<0$, откуда $x+0,5<0$. Таким образом, получаем систему

$$\begin{cases} x-0,5>1 \\ x+0,5<0 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x>1,5 \\ x<-1,5 \end{cases} \text{ что невозможно.}$$

2) Если $0<x-0,5<1$, то должно быть $x^2-\frac{1}{4}>0$, или $x+0,5>0$. В результате получаем систему $\begin{cases} 0<x-0,5<1 \\ x+0,5>0 \end{cases}$ или $\begin{cases} 0,5<x<1,5 \\ x>-0,5 \end{cases}$ решением которой служит интервал $0,5<x<1,5$.

Ответ: $(0,5;\ 1,5)$.

5.301. Преобразуем неравенство: $\frac{x^2-2}{4^{\sqrt{x}}}-\frac{2}{4^{\sqrt{x}}}\le 0$, или $\frac{x^2-4}{4^{\sqrt{x}}}\le 0$. Так как $4^{\sqrt{x}}>0$ при всех $x\ge 0$, то $x^2-4\le 0$, или $-2\le x\le 2$. Учитывая условие $x\ge 0$, получим $0\le x\le 2$.

Ответ: $[0;\ 2]$.

§ 19. Логарифмические неравенства

5.311. Преобразуем неравенство таким образом: $\lg\frac{3^{x-1}}{3^{2x+4}}<\lg 3$, или $\lg 3^{-x-5}<\lg 3$, или $3^{-x-5}<3$, или $-x-5<1$, откуда $x>-6$. Наименьшим целым числом, удовлетворяющим неравенству, является -5.

Ответ: -5.

5.321. Преобразуем неравенство: $\log_{3,1}\frac{2x-8}{6}<0$, или $0<\frac{2x-8}{6}<1$, откуда $4<x<7$. Наибольшее целое число, удовлетворяющее неравенству, есть 6.
Ответ: 6.

5.331. Преобразуем неравенство: $\log_{1/2}12(2x-1)>\log_{1/2}60$, или $0<12(2x-1)<60$, или $0<2x-1<5$, откуда $0,5<x<3$. Это неравенство выполняется при целых числах 1 и 2.

Ответ: 1; 2.

5.341. Преобразуем неравенство: $\log_{1/5}(x-5)>-2\log_{1/5}\frac{1}{5}$, или $\log_{1/5}(x-5)>\log_{1/5}25$, или $0<x-5<25$, откуда $5<x<30$.

Ответ: $(5;\ 30)$.

5.351. Вынесем общий множитель $\log_{1/2}5$ за скобки: $(2x-1)\log_{1/2}5<0$. Так как $\log_{1/2}5<0$, то $2x-1>0$, т.е. $x>0,5$. Наименьшим числом, удовлетворяющим неравенству, является 1.

Ответ: 1.

5.361. Преобразуем правую часть неравенства: $\log_{1/\sqrt{3}}(12-x^2)<-2\log_{1/\sqrt{3}}\frac{1}{\sqrt{3}}$, или $\log_{1/\sqrt{3}}(12-x^2)<\log_{1/\sqrt{3}}3$, или $12-x^2>3$, $x^2-9<0$, откуда $-3<x<3$

Ответ: $(-3;\ 3)$.

5.371. Применяя основное логарифмическое тождество и учитывая область определения логарифмической функции, получим $0<x-4<3$, откуда $4<x<7$

Ответ: $(4;\ 7)$.

5.381. Преобразуем правую часть неравенства: $\log_{1/3}\log_3(x-1)>\log_{1/3}1$, или $0<\log_3(x-1)<1$, или $\log_3 1<\log_3(x-1)<\log_3 3$, или $1<x-1<3$, откуда $2<x<4$.

Ответ: $(2;\ 4)$.

5.391. Переходя к логарифмам по основанию 2, получим

$$\frac{\log_2(x-1)}{\log_2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}+\log_2(x-1)>-2\log_2 2,\ \text{ или }\ -2\log_2(x-1)+\log_2(x-1)>-\log_2 4,$$

или $\log_2(x-1)<\log_2 4$, или $0<x-1<4$, откуда $1<x<5$.

Ответ: $(1;\ 5)$.

5.401. Так как $0<\log_3 2<1$, то из неравенства следует, что $0<2x-3<1$, откуда $1{,}5<x<2$.

Ответ: $(1{,}5;\ 2)$.

5.411. Рассмотрим два случая.

1) Если $x-2>1$, то из неравенства следует $x+2<x-2$, что невозможно.

2) Если $0<x-2<1$, то из неравенства следует $x+2>x-2$, что выполняется при всех x, в том числе и при тех x, которые удовлетворяют условию $0<x-2<1$, т.е. при $2<x<3$.

Ответ: $(2;\ 3)$.

5.421. Переходя к логарифмам по основанию 10, получим $10^{-\log_{\sqrt{3}}\lg\frac{1}{x}}\geq 1$, или

$-\log_{\sqrt{3}}\lg\frac{1}{x}\geq 0$, или $\log_{\sqrt{3}}\lg\frac{1}{x}\leq 0$, или $0<\lg\frac{1}{x}\leq 1$, или $-1\leq\lg x<0$, откуда $0{,}1\leq x<1$.

Ответ: $[0{,}1;\ 1)$.

5.431. Переходя к логарифмам по основанию 5, найдем $5\cdot 5^{-\lg x}>5^{-2\lg 2}$,

или $5^{1-\lg x}>5^{-2\lg 2}$, или $1-\lg x>-2\lg 2$, или $\lg x<\lg 40$, откуда $0<x<40$.

Ответ: $(0;\ 40)$.

5.441. Переходя к логарифмам по основанию 2, имеем $x\log_2 x-4\log_2 x<0$, откуда $(x-4)\log_2 x<0$.

Рассмотрим два случая.

1) Если $0<x<1$, то $\log_2 x<0$ и должно быть $x-4>0$, что невозможно.

2) Если $x>1$, то $\log_2 x>0$ и должно быть $x-4<0$, т.е. $x<4$. Таким образом, получаем $1<x<4$.

Ответ: $(1;\ 4)$.

Раздел VI. Прогрессии

§ 20. Арифметическая прогрессия

6.001. Используя формулу $a_n = a_1 + d(n-1)$, найдем $a_{11} = 2 + 0{,}2(11-1) = 4$.
Ответ: 4.

6.011. Так как $a_n = a_1 + d(n-1)$, то $6 = 0 + 0{,}5(n-1)$, откуда $n = 13$.
Ответ: 13

6.021. Так как $a_2 = a_1 + d$, то $d = 0{,}5-0{,}2 = 0{,}3$. Тогда $a_{30} = 0{,}2 + 0{,}3(30-1) = 8{,}9$. Теперь найдем $S_{30} = \frac{a_1 + a_{30}}{2} \cdot 30 = 136{,}5$
Ответ 136,5.

6.031. Имеем $S_{25} = a_1 + a_2 + \ldots + a_{10} + a_{11} + \ldots + a_{25}$, откуда $a_{10} + a_{11} + \ldots + a_{25} = S_{25} - S_9$. Так как $S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} n$, то $S_{25} = 2450$, $S_9 = 306$. Искомая сумма есть $2450-306 = 2144$.
Ответ: 2144.

6.041. Согласно условию, $a_4 - a_2 = 0{,}4$ или $(a_1 + 3d)-(a_1 + d) = 0{,}4$, откуда $d = 0{,}2$.

Так как $S_6 = 9$, то $\frac{a_1 + a_6}{2} \cdot 6 = 9$, откуда $2a_1 + 5d = 3$. Учитывая, что $d = 0{,}2$, получим $a_1 = 1$.
Ответ: 1

6.051. Пусть a_1, a_2 и a_3 — искомые числа. Тогда $a_2 = 5a_1$. Кроме того, $a_2 = a_1 + d$, $a_3 = a_1 + 2d$, $a_1 + a_2 + a_3 = 111$. Следовательно, $3a_1 + 3d = 111$, или $a_1 + d = 37$, т.е. $a_2 = 37$. Отсюда $a_1 = 7{,}4$, а так как $\frac{a_1 + a_3}{2} = a_2$, то $a_3 = 66{,}6$.
Ответ: 7,4; 37; 66,6.

6.061. Заметим, что $9{,}8-7{,}5 = 12{,}1-9{,}8 = 2{,}3 = d$. Таким образом, нужно вычислить сумму членов арифметической прогрессии, у которой $a_1 = 7{,}5$, $d = 2{,}3$ и $a_n = 53{,}5$. Найдем число членов n: $a_n = a_1 + d(n-1) = 53{,}5$, откуда $n = 21$. Теперь можно найти сумму членов арифметической прогрессии: $S_{21} = \frac{a_1 + a_{21}}{2} \cdot 21 = 640{,}5$.
Ответ: 640,5.

6.071. Здесь $a_1 = 2$, $d = -9-2 = -11$, $a_n = -130$. Таким образом, $a_1 + d(n-1) = -130$, или $2-11(n-1) = -130$, откуда $n = 13$. Найдем искомую сумму: $S_{13} = \frac{a_1 + a_{13}}{2} \cdot 13 = -832$.
Ответ: -832.

6.081. *Первым из трехзначных натуральных чисел, которые при делении на 5* дают остаток, равный 1, является 101, а последним — 996. Таким образом, нужно найти сумму членов арифметической прогрессии, у которой $a_1 = 101$, $a_n = 996$ и $d = 5$. Найдем число членов n; имеем $a_n = a_1 + d(n-1) = 996$, или $101 + 5(n-1) = 996$, откуда $n = 180$. Теперь вычислим искомую сумму: $S_{180} = \frac{a_1 + a_{180}}{2} \cdot 180 = 98\,730$.
Ответ: 98 730.

6.091. Согласно свойству арифметической прогрессии, имеем $a_2 - a_1 = a_3 - a_2$, или $\lg(3^x-3)-\lg 2 = \lg(3^x+9)-\lg(3^x-3)$, или $\lg\frac{3^x-3}{2} = \lg\frac{3^x+9}{3^x-3}$, откуда $\frac{3^x-3}{2} = \frac{3^x+9}{3^x-3}$. Пусть $3^x = y$. Тогда уравнение примет вид $\frac{y-3}{2} = \frac{y+9}{y-3}$, или

$y^2-8y-9=0$. Корень $y_1=-1$ не годится, так как $3^x = y > 0$ при всех x. Остается $y_2 = 9$, откуда $x = 2$.

Ответ: 2.

§ 21. Геометрическая прогрессия

6.101. $b_7 = b_1q^6 = 729\left(\frac{1}{3}\right)^6 = 1$.

Ответ: 1.

6.111. Имеем $S_5 = 93 = \frac{b_1(1-q^5)}{1-q} = 31b_1$. Таким образом, $b_1 = 3$ и $b_3 = b_1q^2 = 12$.

Ответ: 12.

6.121. Так как $b_3=b_1q^2$, $b_6=b_1q^5$, то $\frac{b_6}{b_3} = q^3 = \frac{1}{8}$, откуда $q = \frac{1}{2}$, $b_3 = b_1\left(\frac{1}{2}\right)^2$. Значит, $b_1 = 8$. Отсюда $S = \frac{b_1}{1-q} = \frac{8}{1-\frac{1}{2}} = 16$.

Ответ: 16.

6.131. Имеем $b_1b_2b_3 = a_1^3q^3 = 13\,824$. Поэтому $b_1q = 24$, т.е. $b_2 = 24$. Таким образом, $b_1b_3 = 576$ и $b_1 + b_3 = 195$, откуда $b_1 = 195-b_3$. В результате для нахождения b_3 получаем уравнение $(195 - b_3)b_3 = 576$, или $b_3^2 - 195b_3 + 576 = 0$. Отсюда $b_1=3$, $b_3=192$.

Ответ: 3; 192.

6.141. Имеем уравнения $x^2-4x + A = 0$ и $x^2-36x + B = 0$. Так как x_1 и x_2 — корни первого уравнения, а x_3 и x_4 — корни второго уравнения, то $x_1 + x_2 = 4$, $x_3 + x_4 = 36$. Далее, x_1, x_2, x_3, x_4 — члены геометрической прогрессии, значит, $x_2 = x_1q$, $x_3 = x_1q^2$, $x_4 = x_1q^3$. Таким образом, для определения x_1 и q имеем систему уравнений $\begin{cases} x_1(1+q) = 4, \\ x_1(q^2+q^3) = 36. \end{cases}$ Разделив второе уравнение на первое, получим $q^2 = 9$, откуда $q = 3$ (значение $q = -3$ отбрасываем, поскольку все члены прогрессии должны быть положительны). Теперь находим $x_1 = 1$; $x_2 = 3$; $x_3 = 9$; $x_4 = 27$. Отсюда $A = x_1x_2 = 3$, $B = x_3x_4 = 243$.

Ответ: 3; 243.

Раздел VII. Начала анализа

§ 22. Общие свойства функций

7.001. Область определения функции найдем из условия $9-x^2 \geq 0$, откуда $-3 \leq x \leq 3$.

Ответ. $[-3; 3]$.

7.011. Областью определения данной функции является интервал $-\infty < x < 15{,}5$; поэтому наибольшее целое x, принадлежащее области определения, есть число 15.

Ответ: 15

7.021. Найдем область определения функции $f(x)$. Для этого решим систему неравенств $\begin{cases} x+6>0, \\ -2x-10\geq 0, \end{cases}$ откуда $-6 < x \leq -5$. В этом полуинтервале содержится только одно целое число -5.

Ответ: -5.

7.031. Согласно определению периода, для всех x должно быть выполнено условие $f(x) = f(x+T)$, т.е. $\sin\left(\frac{4x}{7}-2\right)=\sin\left(\frac{4(x+T)}{7}-2\right)=\sin\left(\left(\frac{4x}{7}-2\right)+\frac{4T}{7}\right)$

Полагая $\frac{4x}{7}-2=\alpha$, получим $\sin\alpha=\sin\left(\alpha+\frac{4T}{7}\right)$. Так как x — произвольное число, то и α — произвольное число. Последнее равенство выполняется для всех α, если $\frac{4T}{7}=2\pi$, поскольку $\sin\alpha$ есть периодическая функция с наименьшим положительным периодом 2π. Тогда $\frac{4T}{7}=2\pi$, откуда $T=\frac{7\pi}{2}$, т.е. $T = 630°$.

Ответ: 630°.

7.041. 1) Функция $\cos\left(x^2+\frac{\pi}{3}\right)$ не является периодической. Действительно, по определению периодической функции при всех x должно быть:
$\cos\left((x+T)^2+\frac{\pi}{3}\right)=\cos\left(x^2+\frac{\pi}{3}\right)$, где T — период ($T\neq 0$).
Отсюда $\cos\left(\left(x^2+\frac{\pi}{3}\right)+2Tx+T^2\right)=\cos\left(x^2+\frac{\pi}{3}\right)$,
или $\cos\left(x^2+\frac{\pi}{3}\right)\cos(2Tx+T^2)-\sin\left(x^2+\frac{\pi}{3}\right)\sin(2Tx+T^2)=\cos\left(x^2+\frac{\pi}{3}\right)$.
Это равенство верно при всех x, если $\cos(2Tx+T^2)=1$ и $\sin(2Tx+T^2)=0$. Поэтому $2Tx+T^2=2\pi k$, где $k\in Z$. Значит, период T зависит от x, что невозможно, так как по определению T есть число.
2) Аналогично, для функции $x\operatorname{tg}x$ при всех x должно быть $(x+T)\operatorname{tg}(x+T)=x\operatorname{tg}x$. Но

$$\frac{(x+T)(\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}T)}{1-\operatorname{tg}x\operatorname{tg}T}=\frac{x\operatorname{tg}x}{1-\operatorname{tg}x\operatorname{tg}T}+\frac{x\operatorname{tg}T+T\operatorname{tg}x+T\operatorname{tg}T}{1-\operatorname{tg}x\operatorname{tg}T}=x\operatorname{tg}x$$

Отсюда следует, что

$$\frac{1}{1-\operatorname{tg}x\operatorname{tg}T}=1,\ \frac{x\operatorname{tg}T+T\operatorname{tg}x+T\operatorname{tg}T}{1-\operatorname{tg}x\operatorname{tg}T}=0,$$

т.е. $1-\operatorname{tg}x\operatorname{tg}T=1$, или $\operatorname{tg}x\operatorname{tg}T=0$. Так как x — любое число, то $\operatorname{tg}T=0$ и $T=\pi k$. Кроме того, должно выполняться условие $x\operatorname{tg}T+T\operatorname{tg}x+T\operatorname{tg}T=0$, откуда при $\operatorname{tg}x\neq 0$ и $\operatorname{tg}T=0$ получим $T\operatorname{tg}x=0$ или $T=0$, что противоречит определению периода ($T\neq 0$).
3) Функция $\lg(\sin x+2)$ является периодической с наименьшим положительным периодом 2π. Действительно, так как $\sin(x+2\pi)=\sin x$, то $\lg(\sin(x+2\pi)+2)=\lg(\sin x+2)$ при всех x.

7.051. Функция $y=x^2+\cos 3x$ является четной. Действительно, $(-x)^2+\cos 3(-x)=x^2+\cos 3x$ при всех $x\in R$.

7.061. Функция $y=(x+2)\sqrt{x^2+1}$ является функцией общего вида, так как $(-x+2)\sqrt{(-x)^2+1}=(2-x)\sqrt{x^2+1}\neq(x+2)\sqrt{x^2+1}$

7.071. 1) Функция $x\operatorname{tg}2x$ — четная, так как $(-x)\operatorname{tg}2(-x) = x\operatorname{tg}2x$.

2) Функция $\cos^2\left(\frac{\pi}{5}-x\right)$ не является четной, поскольку $\cos^2\left(\frac{\pi}{5}+x\right) \neq$ $\neq \cos^2\left(\frac{\pi}{5}-x\right)$.

3) Функция $\frac{2^{\sin x}+1}{2^{\sin x}-1}$ является нечетной, так как $\frac{2^{\sin(-x)}+1}{2^{\sin(-x)}-1} = \frac{2^{-\sin x}+1}{2^{-\sin x}-1} =$ $= \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{\sin x}+1}{\left(\frac{1}{2}\right)^{\sin x}-1} = \frac{1+2^{\sin x}}{1-2^{\sin x}} = -\frac{2^{\sin x}+1}{2^{\sin x}-1}$.

7.081. 1) Функция $\sin\left(\frac{\pi}{4}+x\right)$ есть функция общего вида, так как $\sin\left(\frac{\pi}{4}+x\right) \neq$ $\neq \sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)$.

2) Функция $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{5}-x\right)-\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{5}-x\right)$ также является функцией общего вида, поскольку замена x на $-x$ приводит к функции $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{5}+x\right)-\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{5}+x\right)$.

3) Так как $\frac{\sin(-x)}{1+\cos(-x)} = -\frac{\sin x}{1+\cos x}$, то функция $\frac{\sin x}{1+\cos x}$ — нечетная.

7.091. 1) Так как $\frac{\sin(-x)\cdot\left((-x)^2+\frac{\pi}{8}\right)}{\sqrt{1+|-x|}} = -\frac{\sin x\cdot\left(x^2+\frac{\pi}{8}\right)}{\sqrt{1+|x|}}$, то данная функция — нечетная.

2) Поскольку $\frac{2-(-x)}{2-x}\operatorname{tg}^2\frac{(-\pi x)}{3} = \frac{2+x}{2-x}\operatorname{tg}^2\frac{\pi x}{3} \neq \frac{2-x}{2+x}\operatorname{tg}^2\frac{\pi x}{3}$, это функция общего вида.

3) Функция $2^{|x|}\cos\left(\sqrt[3]{x^3-x}\right)$ — четная, так как $2^{|-x|}\cos\left(\sqrt[3]{(-x)^3-(-x)}\right) =$ $= 2^{|x|}\cos\left(\sqrt[3]{x^3-x}\right)$ для всех $x \in R$.

7.101. 1) Так как $(2^{-x}-2^{x})\cos(-x) = -(2^{x}-2^{-x})\cos x$, то функция — нечетная.

2) Функция $\sin\sqrt[3]{x^3+2x}$ — нечетная, так как $\sin\left(\sqrt[3]{(-x)^3+2(-x)}\right) =$ $= -\sin\left(\sqrt[3]{x^3+2x}\right)$.

3) Поскольку $(-x)^3\log_2\left|\frac{-x+1}{-x+2}\right| \neq x^3\log_2\left|\frac{x+1}{x+2}\right|$, данная функция есть функция общего вида.

7.111. По условию, $g(x) = \frac{1}{2x+1}$, $f(x) = \frac{1}{3}x-2$. Тогда $g(f(x)) = \frac{1}{2f(x)+1} =$ $= \frac{1}{2\left(\frac{1}{3}x-2\right)+1} = \frac{3}{2x-9}$; $g(f(1)) = -\frac{3}{7}$.

Ответ: $\frac{3}{2x-9}$; $-\frac{3}{7}$.

§ 23. Элементы дифференциального исчисления

7.121. $f(x) = 2x^{3/2} - x^{-1/2}$; $f'(x) = 2\cdot\frac{3}{2}x^{1/2} + \frac{1}{2}x^{-3/2} = 3\sqrt{x} + \frac{1}{2x\sqrt{x}}$;

$f'(4) = 3\sqrt{4} + \frac{1}{2\cdot 4\sqrt{4}} = 6{,}0625$.

Ответ: 6,0625.

7.129'. Так как $\sqrt{a^2+b^2}$ = const, t — переменная, то $y' = (0{,}5t^2 - \sqrt{a^2+b^2}\,t + 3)' =$
$= t - \sqrt{a^2+b^2} + 0 = t - \sqrt{a^2+b^2}$.

Ответ: $y' = t - \sqrt{a^2+b^2}$.

7.131. $f'(x) = (4x - 3)\cos x - \sin x\,(2x^2 - 3x + 1)$; $f'(0) = -3$.

Ответ: -3.

7.132'. Преобразуем данное выражение $y = 5x^{-2/3} + x^{1/5} - ax^{-1}$.

Вычислим производную $y' = -5\left(-\frac{2}{3}\right)x^{-(2/3)-1} + \frac{1}{5}\,x^{(1/5)-1} - a(-1)x^{-2} =$

$$= \frac{10}{3}\cdot x^{-(5/3)} + \frac{1}{5}\cdot x^{-(4/5)} + ax^{-2} = \frac{10}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{x^5}} + \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{\sqrt[5]{x^4}} + \frac{a}{x^2}.$$

Ответ: $y' = \frac{10}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{x^5}} + \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{\sqrt[5]{x^4}} + \frac{a}{x^2}$.

7.141. Имеем $y = x(x^2-3) = x^3-3x$. Находим производную: $y' = 3x^2-3$. Приравнивая y' к нулю, получим $3x^2-3 = 0$, откуда $x_1 = -1$; $x_2 = 1$. Составим схему (рис. 26):

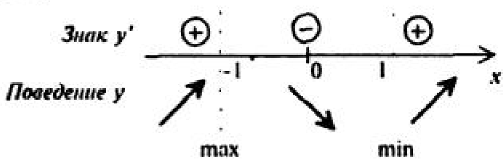


Рис. 26

Из схемы следует, что при $x = -1$ функция имеет максимум, а при $x = 1$ — минимум. При этом, $y_{max} = (-1)^3-3(-1) = 2$, $y_{min} = 1-3 = -2$.
Ответ: $y_{max} = 2$, $y_{min} = -2$.

7.149'. Преобразуем предварительно данное выражение: $y = 2(\ln(\sin x))^{-1}$.

Вычислим теперь производную: $y' = 2\cdot\left(-\frac{1}{\ln^2(\sin x)}\right)\cdot\frac{1}{\sin x}\cdot\cos x$.

Ответ: $y' = -\frac{2}{\ln^2(\sin x)}\cdot\frac{1}{\sin x}\cdot\cos x$.

7.151. Находим $y' = -2x^3-x^2$. Решаем уравнение $-2x^3-x^2 = 0$, откуда $x_1 = 0$, $x_2 = -0{,}5$. Используя схему (рис. 27), заключаем, что при $x = -0{,}5$ функция имеет максимум: $y_{max} = 0$.
Ответ: $y_{max} = 0$.

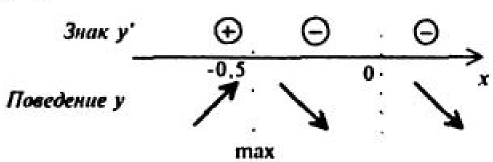


Рис. 27

7.151'. $y' = f'(x) = 2x - 2 \Rightarrow f'(x_0) = 2x - 2|_{x=1} = 0$. Уравнение касательной $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$. Найдем $y_0 = f(x_0) = x^2 - 2x + 5|_{x=1} = 4$.

Тогда $y - 4 = 0 \Rightarrow y = 4$.

Ответ: $y = 4$.

7.161. Находим $f'(x) = 4 - \frac{9}{x^2}$. Точка $x = 0$ не является критической, поскольку в ней функция не существует. Решаем уравнение $4 - \frac{9}{x^2} = 0$, откуда $x_{1,2} = \pm\frac{3}{2}$. С помощью схемы (рис. 28) устанавливаем, что при $x = -1,5$ функция имеет максимум, а при $x = 1,5$ — минимум.

Ответ: $-1,5$; $1,5$.

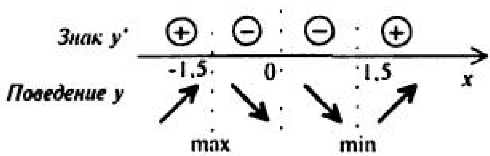


Рис. 28

7.171. Находим $y' = 3x^2 + 3x$. Затем решаем неравенство $y' < 0$, или $3x^2 + 3x < 0$, откуда $-1 < x < 0$.

Ответ: $(-1; 0)$.

7.181. Найдем производную: $f'(x) = x^2 - 3x + 2$. Решаем уравнение $f'(x) = 0$, или $x^2 - 3x + 2 = 0$, откуда $x_1 = 1$, $x_2 = 2$. Используя схему (рис. 29), получаем, что при $x = 1$ функция имеет максимум, причем $f_{max} = \frac{5}{6}$, а при $x = 2$ — минимум, причем $f_{min} = \frac{2}{3}$. Находим значения функции на концах отрезка $f(0) = 0$; $f(3) = 1,5$.

Ответ: $y_{наиб} = 1,5$; $y_{наим} = 0$.

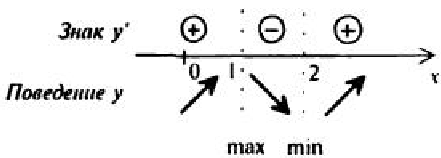


Рис. 29

7.191. Рассмотрим три случая:

1) $x > -1$. Тогда $f(x) = 2x^2 - 6(x + 1) + 5$ и $f'(x) = 4x - 6$. Так как $f'(x) = 0$ при $x = \frac{3}{2}$, то из схемы (рис. 30 а), следует, что при $x = 1,5$ функция имеет минимум.

2) $x < -1$. Тогда $f(x) = 2x^2 + 6(x + 1) + 5$ и $f'(x) = 4x + 6$, откуда $f'(x) = 0$ при $x = -\frac{3}{2}$ и из схемы (рис. 30, б) следует, что при $x = -1,5$ функция имеет минимум.

3) $x = -1$. Рассмотрим окрестность точки $x = -1$. Объединяя схемы, полученные в случаях 1 и 2 (рис. 30, в), заключаем, что в точке $x = -1$ функция имеет максимум. Заметим, что в этой точке производная не существует, т.е. точка $x = -1$ является критической.

Ответ: $-1,5$; -1; $1,5$.

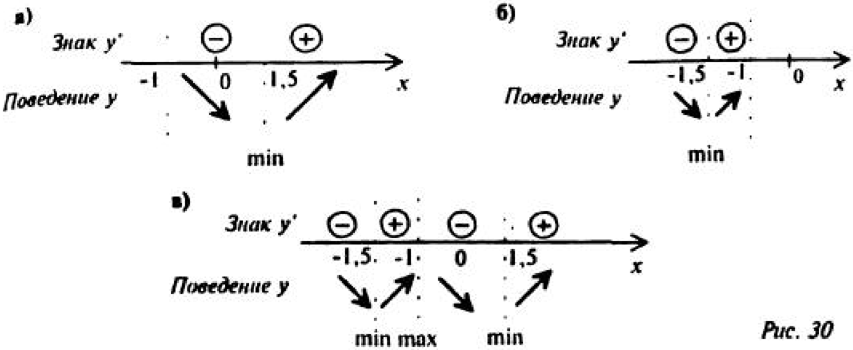


Рис. 30

7.201. Пусть x — первое число, а y — второе. Тогда $x + y = 28$. Рассмотрим функцию $z = x^3 + y^3$. Так как $y = 28-x$, то $z = x^3 + (28-x)^3$. Исследуем эту функцию на экстремум. Имеем $z' = 3x^2-3(28-x)^2 = 168(x-14)$. Из уравнения $z' = 0$ или $x-14 = 0$ находим $x = 14$. Из схемы (рис. 31) следует, что при $x = 14$ функция имеет минимум.

Ответ: 14; 14.

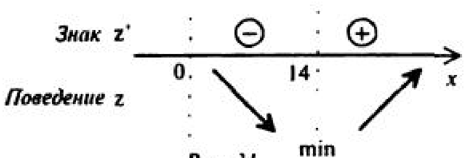


Рис. 31

7.211. Пусть x и y — стороны прямоугольника. Тогда площадь участка $S = xy = 800$, а длина забора $l = 2x + y$. Так как $y = \frac{800}{x}$, то $l(x) = 2x + \frac{800}{x}$.

Исследуем функцию $l(x)$ на экстремум: $l'(x) = 2-\frac{800}{x}$; $l'(x) = 0$ при $x = 20$. Поскольку $l'(10) < 0$, а $l'(30) > 0$, при $x = 20$ функция имеет минимум. Итак, $x_{min} = 20$, откуда $l_{min} = 80$.

Ответ: 80.

§ 24. Элементы интегрального исчисления

7.171'. Преобразуем подынтегральное выражение:

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x}} = \int \frac{dx}{x^{\frac{3}{2}}} = \int x^{-\frac{3}{2}}\,dx =$$

см. формулу 4 из таблицы неопределенных интегралов

$$= \frac{x^{-\frac{3}{2}+1}}{-\frac{3}{2}+1} + C = -\frac{2}{\sqrt{x}} + C.$$

Ответ: $-\frac{2}{\sqrt{x}} + C$.

7.181'. Преобразуем подынтегральное выражение:

$$\int \frac{x^3+2x^2-5}{x^2}dx = \int\left(x+2-\frac{5}{x^2}\right)dx =$$

см. § 24 свойства неопределенного интеграла, пункт 3° *а* и *в*.

$$\int xdx + 2\int dx - 5\int \frac{dx}{x^2} = \frac{x^2}{2} + 2x + \frac{5}{x} + C.$$

Ответ: $\frac{x^2}{2} + 2x + \frac{5}{x} + C.$

7.191'. I способ — *подведение под дифференциал.*

$$\int \sin 2xdx = \frac{1}{2}\int \sin 2xd(2x) = \left\langle \quad d(2x) = (2x)'dx = 2dx \quad \right\rangle = -\frac{1}{2}\cos 2x + C.$$

2 способ — замена переменного.

$$\int \sin 2xdx = \left\langle \begin{matrix} 2x = u \\ du = 2dx \\ dx = \frac{du}{2} \end{matrix} \right\rangle = \frac{1}{2}\int \sin udu = -\frac{1}{2}\cos u + C = -\frac{1}{2}\cos 2x + C.$$

Ответ: $-\frac{1}{2}\cos 2x + C.$

7.201'. $\int\limits_1^3 \sqrt[3]{x}\,dx = \int\limits_{-1}^{3} x^{1/3}dx = \frac{3}{4}x^{4/3}\Big|_{-1}^{3} = \frac{3}{4}\left(3\cdot\sqrt[3]{3} - 1\right).$

Ответ: $\frac{3}{4}\left(3\cdot\sqrt[3]{3} - 1\right).$

7.211'. $\int\limits_0^1 \frac{xdx}{1+x^2} = \left\langle \begin{matrix} 1+x^2 = u \\ du = 2xdx \\ xdx = \frac{du}{2} \\ x = 0 \Rightarrow u = 1 \\ x = 1 \Rightarrow u = 2 \end{matrix} \right\rangle = \frac{1}{2}\int\limits_1^2 \frac{du}{u} = \frac{1}{2}\ln|u|\Big|_1^2 = \frac{1}{2}(\ln 2 - \ln 1) = \frac{\ln^2}{2}$

Ответ: $\frac{\ln 2}{2}.$

7.221'. Решив систему уравнений $\begin{cases} y = 6+5x-x^2 \\ y = 0 \end{cases}$; найдем $x = -1$, $x = 6$

Построим график функции $y = 6 + 5x - x^2$. (Рис. 31') Найдем искомую площадь (на рис. заштрихована):

$$S = \int\limits_{-1}^{6}(6+5x-x^2)dx = 6x\Big|_{-1}^{6} + 5\cdot\frac{x^2}{2}\Big|_{-1}^{6} - \frac{x^3}{3}\Big|_{-1}^{6} =$$

$$6+1)+5\left(\frac{6^2}{2}-\frac{(-1)^2}{2}\right)-\left(\frac{6^3}{3}-\frac{(-1)^3}{3}\right)=57\frac{1}{6}.$$

Ответ: $57\frac{1}{6}$.

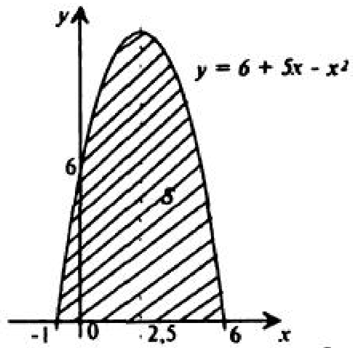


Рис. 31'

31'. **Построим графики функций: $y = x^2 - x$, $y = x + 3$. (Рис. 32'). Найдем точки пересечения построенных графиков. Для этого решим систему уравнений:**

$$\begin{cases} y = x^2 - x \\ y = x + 3 \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1,\, y = 2 \\ x = 3,\, y = 6 \end{array}\right.$$

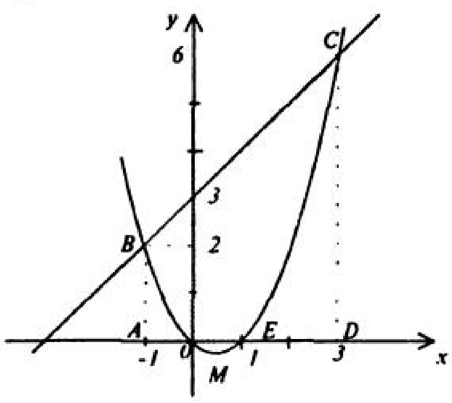
Заштрихуем площадь фигуры, ограниченной кривыми $y = x^2 - x$, $y = x + 3$. Искомая площадь S равна разности интегралов:

$$S=\int_{-1}^{3}(x+3)dx-\int_{-1}^{3}(x^2-x)dx.$$

Действительно, чтобы получить искомую площадь S, нужно (рис. 32') из площади трапеции $ABCD$ вычесть, во-первых, площадь криволинейной трапеции ABO, во-вторых, вычесть площадь криволинейной трапеции ECD, и затем добавить площадь криволинейной трапеции OME. Заметим, что $S_{OMF}=-\int_0^1(x^2-x)dx$, поскольку криволинейная трапеция расположена под осью OX. Таким образом:

$$S=\int_{-1}^{3}(x+3)dx-\int_{-1}^{3}(x^2-x)dx=\frac{x^2}{2}\Big|_{-1}^{3}+3x\Big|_{-1}^{3}-\frac{x^3}{3}\Big|_{-1}^{3}+\frac{x^2}{2}\Big|_{-1}^{3}=\frac{32}{3}.$$

Ответ: $\frac{32}{3}$.



Раздел VIII. Тригонометрия

§ 25. Тригонометрические преобразования

8.001. Применяя формулу суммы синусов, найдем

$$\sin\frac{5\alpha}{3}+\sin\frac{3\alpha}{2}=2\sin\frac{19\alpha}{12}\cos\frac{\alpha}{12}.$$

Ответ: $2\sin\frac{19\alpha}{12}\cos\frac{\alpha}{12}$.

8.011. Вынеся за скобки общий множитель $\cos 8\alpha$, получим
$\cos 8\alpha(\cos 10\alpha+\cos 6\alpha)=\cos 8\alpha(2\cos 8\alpha\cos 2\alpha)=2\cos^2 8\alpha\cos 2\alpha$.

Ответ: $2\cos^2 8\alpha\cos 2\alpha$.

8.021. Применяя формулу суммы синусов к двум последним слагаемым, найдем

$$\sin\alpha+2\sin\frac{5\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}=2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}+2\sin\frac{5\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}=$$

$$=2\cos\frac{\alpha}{2}\left(\sin\frac{\alpha}{2}+\sin\frac{5\alpha}{2}\right)=4\sin\frac{3\alpha}{2}\cos\alpha\cos\frac{\alpha}{2}$$

Ответ: $4\sin\frac{3\alpha}{2}\cos\alpha\cos\frac{\alpha}{2}$.

8.031. Преобразуем левую часть тождества:

$$\frac{\cos 3\alpha+\cos\alpha}{\sin 3\alpha-\sin\alpha}=\frac{2\cos\dfrac{3\alpha+\alpha}{2}\cos\dfrac{3\alpha-\alpha}{2}}{2\cos\dfrac{3\alpha+\alpha}{2}\sin\dfrac{3\alpha-\alpha}{2}}=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=\operatorname{ctg}\alpha.$$

Тождество доказано.

8.041. Так как $\sin^2 3\alpha=\frac{1-\cos 6\alpha}{2}$, $\sin^2\alpha=\frac{1-\cos 2\alpha}{2}$, $\cos^2 3\alpha=\frac{1+\cos 6\alpha}{2}$,
$\cos 5\alpha\cos\alpha=\frac{1}{2}(\cos 4\alpha+\cos 6\alpha)$, то $\frac{\sin^2 3\alpha-\sin^2\alpha}{\cos^2 3\alpha-\cos 5\alpha\cos\alpha}=$

$$=\frac{\cos 2\alpha-\cos 6\alpha}{1-\cos 4\alpha}=2\frac{\sin 4\alpha\sin 2\alpha}{1-\cos 4\alpha}=2\cos 2\alpha$$

Тождество доказано.

8.051. Поскольку $\sin^2 68^\circ=\frac{1-\cos 136^\circ}{2}$, $\sin^2 38^\circ=\frac{1-\cos 76^\circ}{2}$, имеем :
$\sin^2 68^\circ-\sin^2 38^\circ=\frac{1}{2}(\cos 76^\circ-\cos 136^\circ)=\sin 106^\circ\sin 30^\circ=\frac{1}{2}\sin 106^\circ$.
Таким образом, $\sin^2 68^\circ-\sin^2 38^\circ-0{,}5\sin 106^\circ+3=3$.

Ответ: 3.

8.061. Так как $\sin 20^\circ=\cos 70^\circ$, то

$$\frac{3(\cos 20^\circ-\sin 20^\circ)}{\sqrt{2}\sin 25^\circ}=\frac{3(\cos 20^\circ-\cos 70^\circ)}{\sqrt{2}\sin 25^\circ}=\frac{6\sin 45^\circ\sin 25^\circ}{\sqrt{2}\sin 25^\circ}=3.$$

Ответ: 3.

8.071. Поскольку $\operatorname{tg}14^\circ=\frac{\sin 14^\circ}{\cos 14^\circ}$, а $\operatorname{ctg}28^\circ=\frac{\cos 28^\circ}{\sin 28^\circ}$, находим
$(\operatorname{tg}14^\circ+\operatorname{ctg}28^\circ)\cos 14^\circ\sin 14^\circ=\sin^2 14^\circ+0{,}5\cos 28^\circ=0{,}5$.

Ответ: 0,5.

8.081. Преобразуем знаменатель дроби:

$$1-\cos^4\frac{2\pi}{5}-\cos^2\frac{2\pi}{5}\sin^2\frac{2\pi}{5}=\sin^2\frac{2\pi}{5}+\cos^2\frac{2\pi}{5}-\cos^2\frac{2\pi}{5}\sin^2\frac{2\pi}{5}-\cos^4\frac{2\pi}{5}=$$

$$=\sin^2\frac{2\pi}{5}+\cos^2\frac{2\pi}{5}\left(1-\sin^2\frac{2\pi}{5}\right)-\cos^4\frac{2\pi}{5}=\sin^2\frac{2\pi}{5}$$

Поскольку числитель дроби равен $\sin^2\frac{\pi}{5}\cos^2\frac{\pi}{5}=0,25\sin^2\frac{2\pi}{5}$, вся дробь равна 0,25

Ответ: 0,25.

8.091.

$$\frac{5\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{3\pi}{14}\right)-\sin\frac{\pi}{14}\right)}{\cos\frac{\pi}{7}\sin\frac{\pi}{14}}=\frac{5\left(\sin\frac{3\pi}{14}-\sin\frac{\pi}{14}\right)}{\cos\frac{\pi}{7}\sin\frac{\pi}{14}}=\frac{10\cos\frac{\pi}{7}\sin\frac{\pi}{14}}{\cos\frac{\pi}{7}\sin\frac{\pi}{14}}=10.$$

Ответ: 10.

8.101. $$\frac{\sin^2 32^\circ+\sin 26^\circ}{5\cos^2 32^\circ}=\frac{\frac{1-\cos 64^\circ}{2}+\sin 26^\circ}{\frac{5}{2}(1+\cos 64^\circ)}=\frac{1-\cos 64^\circ+2\sin 26^\circ}{5(1+\cos 64^\circ)}=$$

$$=\frac{1-\cos 64^\circ+2\cos 64^\circ}{5(1+\cos 64^\circ)}=\frac{1}{5}.$$

Ответ: 0,2.

8.111. Так как $\cos 9^\circ+\cos 51^\circ=2\cos 30^\circ\cos 21^\circ=\sqrt{3}\cos 21^\circ$, то

$$\frac{\cos 9^\circ+\cos 51^\circ+\sqrt{3}\cos 21^\circ}{2\sqrt{3}\cos 21^\circ}=\frac{2\sqrt{3}\cos 21^\circ}{2\sqrt{3}\cos 21^\circ}=1.$$

Ответ: 1.

8.121. Имеем $2\cos^2 16^\circ=1+\cos 32^\circ$, $2\cos^2 76^\circ=1+\cos 152^\circ$.

Тогда $2\cos^2 16^\circ+2\cos^2 76^\circ-3=\cos 32^\circ+\cos 152^\circ-1=$

$=2\cos 92^\circ\cos 60^\circ-1=\cos 92^\circ-1=-\cos 88^\circ-1$.

Так как $\cos^2 44^\circ=\frac{1+\cos 88^\circ}{2}$, то $\frac{2\cos^2 16^\circ+2\cos^2 76^\circ-3}{\cos^2 44^\circ}=\frac{-\cos 88^\circ-1}{\frac{1+\cos 88^\circ}{2}}=-2$.

Ответ: -2.

8.131. Поскольку $\cos 196^\circ=\cos(180^\circ+16^\circ)=\cos 180^\circ\cos 16^\circ-\sin 180^\circ\sin 16^\circ=$ $=\cos 16^\circ$, а $\cos 164^\circ=\cos(180^\circ-16^\circ)=-\cos 16^\circ$,

имеем $$\frac{3\cos 196^\circ+12\cos 164^\circ}{\cos 16^\circ}=\frac{-3\cos 16^\circ-12\cos 16^\circ}{\cos 16^\circ}=-15.$$

Ответ: -15.

8.141. $\dfrac{\sin 43^\circ + \sin 17^\circ}{2\cos 13^\circ + 3\sin 77^\circ} = \dfrac{2\sin 30^\circ \cos 13^\circ}{2\cos 13^\circ + 3\cos 13^\circ} = \dfrac{1}{5}.$

Ответ: 0,2

8.151. Имеем $\cos 6^\circ + \cos 12^\circ + \cos 36^\circ + \cos 42^\circ = 2\cos 3^\circ \cos 9^\circ + 2\cos 3^\circ \cos 39^\circ =$
$= 4\cos 3^\circ \cos 15^\circ \cos 24^\circ$. Поэтому

$$\frac{\cos 6^\circ + \cos 12^\circ + \cos 36^\circ + \cos 42^\circ}{\sin 87^\circ \cos 15^\circ \cos 24^\circ} = \frac{4\sin 87^\circ \cos 15^\circ \cos 24^\circ}{\sin 87^\circ \cos 15^\circ \cos 24^\circ} = 4.$$

Ответ: 4.

8.161. $\dfrac{2\cos 23^\circ - 3\sin 113^\circ + \cos 203^\circ}{\cos 10^\circ \cos 13^\circ - \cos 80^\circ \cos 77^\circ} = \dfrac{2\cos 23^\circ - 3\cos 23^\circ - \cos 23^\circ}{\cos 23^\circ} = -2.$

Ответ. -2.

8.171. Так как угол α принадлежит II четверти, то $\cos\alpha < 0$.

Поэтому $\cos\alpha = -\sqrt{1 - \sin^2\alpha} = -\sqrt{1 - \dfrac{1}{4}} = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}.$

Ответ: $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

8.181. Имеем $\dfrac{2 + \sin\alpha\cos\alpha}{1 + 5\cos^2\alpha} = \dfrac{\dfrac{2}{\cos^2\alpha} + \operatorname{tg}\alpha}{\dfrac{1}{\cos^2\alpha} + 5} = \dfrac{2(1 + \operatorname{tg}^2\alpha) + \operatorname{tg}\alpha}{1 + \operatorname{tg}^2\alpha + 5}.$

Учитывая, что $\operatorname{tg}\alpha = 2$, найдем $\dfrac{2(1+4)+2}{1+4+5} = 1{,}2.$

Ответ: 1,2.

8.191. $\sin\left(x + \dfrac{\pi}{3}\right) - \sin\left(x - \dfrac{\pi}{3}\right) = 2\cos x \sin\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{3}{4}.$

Ответ: 0,75.

8.201. Так как $\sin(x + 30^\circ) + \sin(x - 30^\circ) = 2\sin x \cdot \cos 30^\circ = \sqrt{3}\sin x$,
то $\sqrt{3}\sin x = 2\sqrt{3}\cos x$, откуда $\operatorname{tg} x = 2$.

Ответ: 2.

8.211. $\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha = \left\langle \sin\alpha = -\dfrac{1}{4} \right\rangle = 1 - 2 \cdot \dfrac{1}{16} = \dfrac{7}{8}.$

Ответ: 0,875.

8.221. $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{2\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2\dfrac{\alpha}{2}} = \left\langle \operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2} = 2 \right\rangle = -\dfrac{4}{3}.$

Ответ: $-\dfrac{4}{3}$.

8.231. $\sin(\pi+2\alpha)=\sin\pi\cos 2\alpha+\cos\pi\sin 2\alpha=1-\sin 2\alpha-1=$

$=1-(1+\sin 2\alpha)=1-(\sin^2\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha+\cos^2\alpha)=1-(\sin\alpha+\cos\alpha)^2=$

$$=\left\langle \sin\alpha+\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{2}}\right\rangle=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}.$$

Ответ: 0,5.

8.241. $2\sin 3\alpha\sin 2\alpha+\cos 5\alpha=\cos\alpha-\cos 5\alpha+\cos 5\alpha=\cos\alpha=2\cos^2\frac{\alpha}{2}-1=$

$$=\left\langle\cos\frac{\alpha}{2}=\sqrt{0,6}\right\rangle=2\cdot 0,6-1=0,2.$$

Ответ: 0,2

8.251. $\sin^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)=\frac{1}{2}\left(1-\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\right)=\frac{1}{2}(1-\sin\alpha)=\langle\sin\alpha=0,2\rangle=\frac{1}{2}(1-0,2)=0,4.$

Ответ: 0,4.

8.261. $\sin\left(\frac{\pi}{6}+2\alpha\right)=\sin\frac{\pi}{6}\cos 2\alpha+\cos\frac{\pi}{6}\sin 2\alpha=\frac{1}{2}\cos 2\alpha+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2\alpha=$

$$=\left\langle\begin{array}{l}\cos 2\alpha=\dfrac{1-\mathrm{tg}^2\alpha}{1+\mathrm{tg}^2\alpha}\\ \sin 2\alpha=\dfrac{2\mathrm{tg}\alpha}{1+\mathrm{tg}^2\alpha}\end{array}\right\rangle=\frac{1}{2}\cdot\frac{1-\mathrm{tg}^2\alpha}{1+\mathrm{tg}^2\alpha}+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{2\mathrm{tg}\alpha}{1+\mathrm{tg}^2\alpha}=$$

$$=\left\langle\mathrm{tg}\alpha=2\sqrt{3}\right\rangle=\frac{1}{2}\cdot\frac{1-12}{1+12}+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{4\sqrt{3}}{1+12}$$

Ответ: $\frac{1}{26}$.

8.271. $\cos\alpha+\cos\beta=$

$$=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}=\left\langle\begin{array}{l}\alpha+\beta=4\pi,\\ \alpha-\beta=\dfrac{\pi}{2}\end{array}\right\rangle=2\cos 2\pi\cos\frac{\pi}{4}=\sqrt{2}.$$

Ответ: $\sqrt{2}$.

8.281. I способ. Имеем $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta=\left\langle\sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}\right\rangle=$

$=\cos\alpha\cos\beta-\frac{1}{2}=\left\langle\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta))\right\rangle=$

$= \frac{1}{2}(\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)) - \frac{1}{2} = \left\langle \alpha - \beta = \frac{\pi}{2} \right\rangle = \frac{1}{2}\cos(\alpha + \beta) - \frac{1}{2}.$

Таким образом, относительно $\cos(\alpha + \beta)$ получим уравнение $\cos(\alpha + \beta) = \frac{1}{2}\cos(\alpha + \beta) - \frac{1}{2}$, откуда $\frac{1}{2}\cos(\alpha + \beta) = -\frac{1}{2}$, т.е. $\cos(\alpha + \beta) = -1$.

II способ. Так как $\sin\alpha \sin\beta = \frac{1}{2}$, то

$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)) = \left\langle \alpha - \beta = \frac{\pi}{2} \right\rangle = -\frac{1}{2}\cos(\alpha + \beta) = \frac{1}{2}$,

откуда $\cos(\alpha + \beta) = -1$.

Ответ: -1.

8.291. Имеем $\sin x = 1 + \sin x - 1 = \left(1 + 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}\right) - 1 =$

$= \left(\sin^2\frac{x}{2} + 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} + \cos^2\frac{x}{2}\right) - 1 = \left(\sin\frac{x}{2} + \cos\frac{x}{2}\right)^2 - 1.$

Отсюда $\left\langle \sin\frac{x}{2} + \cos\frac{x}{2} \right\rangle = \pm\sqrt{1 + \sin x} = \sin x = 0{,}21 = \pm\sqrt{1{,}21} = \pm 1{,}1$.

Ответ: $\pm 1{,}1$.

8.301. $\sin^4\alpha + \cos^4\alpha = (\sin^4\alpha + \cos^4\alpha + 2\sin^2\alpha\cos^2\alpha) - 2\sin^2\alpha\cos^2\alpha =$

$= (\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)^2 - 2\sin^2\alpha\cos^2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha\cos^2\alpha =$

$$\boxed{\begin{array}{c}\sin\alpha + \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}, \text{ или } (\sin\alpha + \cos\alpha)^2 = \frac{1}{2}, \\ \text{или } 1 + 2\sin\alpha\cos\alpha = \frac{1}{2}, \text{ откуда } \sin\alpha\cos\alpha = -\frac{1}{4}\end{array}}$$

$$= 1 - 2\cdot\frac{1}{16} = \frac{7}{8}.$$

Ответ: $\frac{7}{8}$.

8.311. Имеем $2\text{tg}\alpha - \sin\alpha + 5\cos\alpha - 10 = 0$, или $2(\text{tg}\alpha - 5) - \cos\alpha(\text{tg}\alpha - 5) = 0$, откуда $(\text{tg}\alpha - 5)(2 - \cos\alpha) = 0$. Но $2 - \cos\alpha \neq 0$ в силу того, что $|\cos\alpha| \leq 1$; следовательно, $\text{tg}\alpha - 5 = 0$, т.е. $\text{tg}\alpha = 5$.

Ответ: 5.

§ 26. Тригонометрические уравнения

8.321. На тригонометрическом круге (рис. 32) отметим точку B, абсцисса которой равна -1. Вектор $\overline{OB}$ образует с положительным направлением оси Ox угол π. Следовательно, $x = \pi + 2\pi k$, где $k \in Z$

Ответ: $\pi + 2\pi k, k \in Z$.

8.331. *Построим тригонометрический круг (рис. 33). На оси Oy отметим точку C,* ордината которой равна $\frac{1}{2}$, и проведем через эту точку прямую, параллельную оси Ox. Эта прямая пересекает тригонометрический круг в точках P и Q. Вектор OP образует с положительным направлением оси Ox угол $\frac{\pi}{6}$, а вектор OQ — угол $\frac{5\pi}{6}$. Следовательно, $x_1 = \frac{\pi}{6} + 2\pi k, x_2 = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n$.

Ответ: $x_1 = \frac{\pi}{6} + 2\pi k, x_2 = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n, k, n \in Z$.

8.341. Возьмем тригонометрический круг (рис. 34) и построим линию тангенса, на которой отметим отрезок $BC = \sqrt{3}$. В ΔOCB имеем: $OB = 1$, $BC = \sqrt{3}$, $OC = 2$. Вектор $\overline{OC}$ образует с положительным направлением оси Ox угол 60°. Значит, $x = 60^\circ + 180^\circ k$.

Ответ: $x = 60^\circ + 180^\circ k$, $k \in Z$.

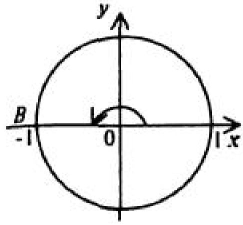


Рис. 32

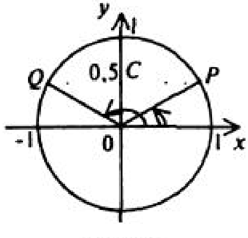


Рис. 33

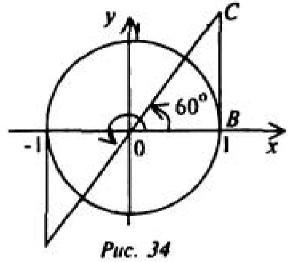


Рис. 34

8.351. Возьмем тригонометрический круг (рис. 35). На оси Ox отметим точку D, абсцисса которой равна $\frac{1}{2}$, и проведем через эту точку прямую, параллельную оси Oy. Эта прямая пересекает тригонометрический круг в точках M и N. Вектор $\overline{OM}$ образует с положительным направлением оси Ox угол 60°, а вектор $\overline{ON}$ угол -60°. Следовательно,

$$2x = \pm 60^\circ + 360^\circ k,\ k \in Z,$$

$$\text{или } x = \pm 30^\circ + 180^\circ k,\ k \in Z.$$

Условию $0 < x < 90^\circ$ удовлетворяет угол 30°.

Ответ. 30°.

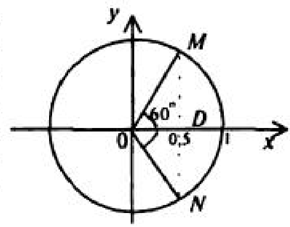


Рис. 35

8.361. Возьмем тригонометрический круг (рис. 36) и построим линию котангенса, на которой отметим точку P с абсциссой $-\sqrt{3}$. Вектор $\overline{OP}$ образует с осью Ox угол 150°. Следовательно, $2x = 150^\circ + 180^\circ k$, $k \in Z$. Отсюда $x = 75^\circ + 90^\circ k$. Условию $90^\circ < x < 180^\circ$ удовлетворяет значение $x = 165^\circ$.

Ответ: 165°.

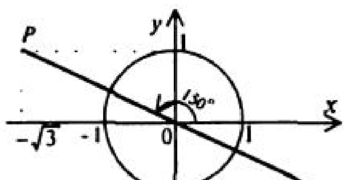


Рис. 36

8.371. Имеем $\pi(x-2) = \pi k$, $k \in Z$, откуда $x = 2 + k$, $k \in Z$. Из условия $0 < x < 4$ следует, что $0 < 2 + k < 4$, т.е. $-2 < k < 2$, $k \in Z$. Таким образом, при $k = -1; 0; 1$ получаем $x = 1; 2; 3$.

Ответ: 1; 2; 3.

8.381. Из данного уравнения имеем $\cos\frac{\pi x}{9} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$. Используя тригонометрический круг (рис. 37), найдем $\frac{\pi x}{9} = \pm\frac{5\pi}{6} + 2\pi n$, $n \in Z$. Отсюда $x = \pm 7,5 + 18n$, $n \in Z$. Условию $8 < x < 20$ удовлетворяет значение $x = 10,5$ при $n = 1$.

Ответ: 10,5.

8.391. Рассмотрим два случая. 1) Если $\operatorname{tg}\frac{x}{2} > 0$, то $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = 1$, откуда $\frac{x}{2} = \frac{\pi}{4} + \pi m$, т.е. $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi m, m \in Z$.

2) Если $\operatorname{tg}\frac{x}{2} < 0$, то $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = -1$, откуда $\frac{x}{2} = -\frac{\pi}{4} + \pi n$, т.е. $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z$. На тригонометрическом круге (рис. 38) видно, что вектор $\overline{OQ}$ получается из вектора $\overline{OP}$ поворотом на 180°. Поэтому, объединяя оба ответа, получим $x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z$

Ответ: $\frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z$.

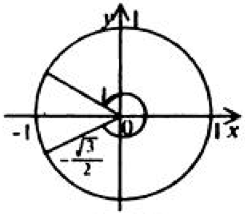


Рис. 37

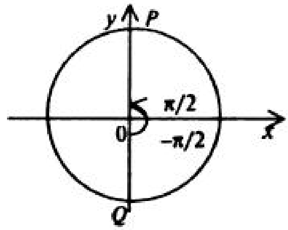


Рис. 38

8.401. Применяя формулу $\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$, получим $\frac{1 + \cos 2x}{2} = \frac{1}{2}$, или $\cos 2x = 0$, откуда $2x = \frac{\pi}{2} + \pi k$ (рис. 39), т.е. $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}, k \in Z$.

Ответ: $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}, k \in Z$.

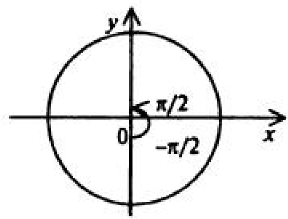


Рис. 39

8.411. Имеем $2\cos^2 x + 5\sin x - 4 = 0 \Rightarrow$
$2\sin^2 x - 5\sin x + 2 = 0 \Rightarrow \sin x = 2$; $\sin x = \frac{1}{2}$. Так как $|\sin x| \le 1$, то годится только $\sin x = \frac{1}{2}$, откуда $x_1 = \frac{\pi}{6} + 2\pi k$, $x_2 = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n$.

Ответ: $\frac{\pi}{6} + 2\pi k$; $\frac{5\pi}{6} + 2\pi n$; $k, n \in Z$.

8.421. Из уравнения $3\sin^2 x - \cos^2 x - 1 = 0$ получим $3\sin^2 x - (1 - \sin^2 x) - 1 = 0$, или $2\sin^2 x = 1$. Применяя формулу $2\sin^2 x = 1 - \cos 2x$, найдем $1 - \cos 2x = 1$, откуда $\cos 2x = 0$ и $2x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, т.е. $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}, n \in Z$.

Ответ: $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}, n \in Z$.

8.431. Из уравнения $\cos(6x - 60°)\cos 2x = 0$ следует, что либо один, либо другой из сомножителей равен нулю. Имеем:

1) $\cos(6x - 60°) = 0 \Rightarrow 6x - 60° = 90° + 180°k \Rightarrow x = 25° + 30°k$;
2) $\cos 2x = 0 \Rightarrow 2x = 90° + 180°n \Rightarrow x = 45° + 90°n$.

Ответ: $25° + 30°k$; $45° + 90°n$; $n, k \in Z$.

8.441. $\sin(x - 30°)\cos 2x - \sin(x - 30°) = 0 \Rightarrow \sin(x - 30°)(\cos 2x - 1) = 0$.
1) $\sin(x - 30°) = 0 \Rightarrow x - 30° = 180°k \Rightarrow x = 30° + 180°k$;
2) $\cos 2x - 1 = 0 \Rightarrow \cos 2x = 1 \Rightarrow 2x = 360°n \Rightarrow x = 180°n$.

Ответ: $30° + 180°k$; $180°n$; k, n Z.

8.451. Из уравнения $\frac{\cos x}{1-\sin x}=0$ следует, что должны быть выполнены два условия:
1) $\cos x = 0$, откуда $x=\frac{\pi}{2}+\pi k$; 2) $1 - \sin x \neq 0$, откуда $x \neq \frac{\pi}{2}+2\pi n$. На тригонометрическом круге (рис. 40) отметим нужное решение: вектор $\overline{OQ}$ образует с осью Ox угол $\left(-\frac{\pi}{2}\right)$.

Ответ: $-\frac{\pi}{2}+2\pi k,\ k \in Z$.

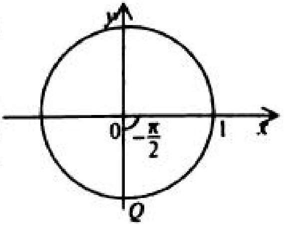


Рис. 40

8.461. Применяя формулу $\frac{1}{1+\mathrm{tg}^2 x}=\cos^2 x$, получим $2\cos^2 x = 3\mathrm{ctg}60^\circ\cos x$, или $2\cos^2 x = \sqrt{3}\cos x$, или $2\cos^2 x - \sqrt{3}\cos x = 0$, откуда $\cos x\left(\cos x - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 0$.

Имеем:
1) $\cos x \neq 0$, $x \neq \frac{\pi}{2}+\pi k$, что следует из области определения $\mathrm{tg}x$.
2) $\cos x - \frac{\sqrt{3}}{2}=0 \Rightarrow \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow x = \pm\frac{\pi}{6}+2\pi n$.

Ответ: $\pm\frac{\pi}{6}+2\pi n;\ n \in Z$.

8.471. $\sin 2x - \sin 3x = 0 \Rightarrow 2\cos\frac{5x}{2}\sin\frac{x}{2} = 0$.
1) $\cos\frac{5x}{2} = 0 \Rightarrow \frac{5x}{2} = \frac{\pi}{2}+\pi n \Rightarrow x = \frac{\pi}{5}+\frac{2\pi n}{5}$;
2) $\sin\frac{x}{2}= 0 \Rightarrow \frac{x}{2}= \pi k \Rightarrow x= 2\pi k$.

Ответ: $\frac{\pi}{5}+\frac{2\pi n}{5};\ 2\pi k;\ n, k \in Z$.

8.481. Так как $\cos 3x = \sin(90^\circ - 3x)$, то исходное уравнение примет вид $\sin(90^\circ-3x)-\sin 2x = 0$, откуда $2\cos\frac{90^\circ-3x+2x}{2}\sin\frac{90^\circ-3x-2x}{2}=0$. Имеем:
1) $\cos\left(45^\circ - \frac{x}{2}\right) = 0 \Rightarrow 45^\circ - \frac{x}{2} = 90^\circ + 180^\circ n \Rightarrow x = -90^\circ + 360^\circ n$;
2) $\sin\left(45^\circ - \frac{5x}{2}\right) = 0 \Rightarrow 45^\circ - \frac{5x}{2}=180^\circ k \Rightarrow x = 18^\circ - 72^\circ k$.
Условию $75^\circ < x < 150^\circ$ удовлетворяет значение $x = 90^\circ$ при $k = -1$.

Ответ: 90°.

8.491. Применяя формулу $\cos\alpha = \sin(90^\circ - \alpha)$ получим $\sin(90^\circ - 2x + 630^\circ) = \sin(4x + 540^\circ)$. Далее, учитывая, что период функции $\sin x$ равен 360°, имеем $\sin(4x + 180^\circ) + \sin 2x = 0 \Rightarrow \sin 4x - \sin 2x = 0 \Rightarrow 2\sin x\cos 3x = 0$.
1) $\cos 3x = 0 \Rightarrow 3x = 90^\circ + 180^\circ k \Rightarrow x = 30^\circ + 60^\circ k$;
2) $\sin x = 0 \Rightarrow x = 180^\circ n$.
Условию $90^\circ < x < 180^\circ$ удовлетворяет значение $x = 150^\circ$ при $k = 2$.

Ответ: 150°.

8.501. $\sin 6x = \sin 4x \Rightarrow \sin 6x - \sin 4x = 0 \Rightarrow 2\sin x\cos 5x = 0$.
1) $\sin x = 0 \Rightarrow x = 180^\circ k$;
2) $\cos 5x = 0 \Rightarrow 5x = 90^\circ + 180^\circ n \Rightarrow x = 18^\circ + 36^\circ n$.
Условию $170^\circ < x < 200^\circ$ удовлетворяют $x_1 = 180^\circ$ при $k = 1$ и $x_2 = 198^\circ$ при $n = 5$. Однако при $x = 180^\circ$ получим $\sin 4x = 0$, что невозможно по усло- вию задачи.

Ответ: $x = 198^\circ$.

8.511. $\sin x + \sin 5x - 2\cos 2x = 0 \Rightarrow 2\sin 3x\cos 2x - 2\cos 2x = 0 \Rightarrow \cos 2x(\sin 3x-1) = 0$.

1) $\cos 2x = 0 \Rightarrow 2x = \frac{\pi}{2} + \pi n \Rightarrow x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$;

2) $\sin 3x = 1 \Rightarrow 3x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k \Rightarrow x = \frac{\pi}{6} + \frac{2\pi k}{3}$.

Ответ: $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$; $\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi k}{3}$; $n, k \in Z$.

8.521. Имеем $\frac{1}{2}(\cos(50^\circ + 2x) + \cos 90^\circ) = \frac{1}{2}\cos(2x + 50^\circ)$. Тогда уравнение примет вид $\cos(2x + 50^\circ) = 1$, откуда $2x + 50^\circ = 360^\circ n$, т.е. $x = -25^\circ + 180^\circ n$.

Ответ: $-25^\circ + 180^\circ n$, $n \in Z$.

8.531. Группируя слагаемые, получим $\cos 5x + \cos 7x = \sin 5x + \sin 7x \Rightarrow$
$\Rightarrow 2\cos 6x \cos x = 2\sin 6x \cos x \Rightarrow \cos x(\cos 6x - \sin 6x) = 0$.

1) $\cos x = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + \pi n$;

2) $\cos 6x - \sin 6x = 0 \Rightarrow \operatorname{tg} 6x = 1 \Rightarrow 6x = \frac{\pi}{4} + \pi k \Rightarrow x = \frac{\pi}{24} + \frac{\pi k}{6}$.

Ответ: $\frac{\pi}{2} + \pi n$; $\frac{\pi}{24} + \frac{\pi k}{6}$; $n, k \in Z$.

8.541. Пусть $5 - \sin x = t^2 \geq 0$. Тогда $2\sin x = 5 - t^2$, $6\sin x - 1 = 14 - 3t^2$. Уравнение примет вид $3t^2 + t - 14 = 0$, откуда $t_1 = 2$; $t_2 = -\frac{7}{3}$. Так как $t = \sqrt{5 - 2\sin x} \geq 0$, то второй корень не годится. Значит, $5 - 2\sin x = 4$, или $\sin x = \frac{1}{2}$, т.е. $x_1 = \frac{\pi}{6} + 2\pi k$; $x_2 = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n$.

Ответ: $\frac{\pi}{6} + 2\pi k$; $\frac{5\pi}{6} + 2\pi n$; $k, n \in Z$.

8.551. Умножив обе части уравнения на $-\frac{\sqrt{2}}{2}$, получим

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x - \frac{\sqrt{2}}{2}\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \cos\frac{\pi}{4}\cos x - \sin\frac{\pi}{4}\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos\left(\frac{\pi}{4} + x\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \frac{\pi}{4} + x = \pm\frac{5\pi}{6} + 2\pi k \Rightarrow x = -\frac{\pi}{4} \pm \frac{5\pi}{6} + 2\pi k$$

Ответ: $-\frac{\pi}{4} \pm \frac{5\pi}{6} + 2\pi k$, $k \in Z$.

8.561. Приведем все функции к одному аргументу x:
$\sin x + 2\sin x \cos x = \cos x + 2\cos^2 x \Rightarrow \sin x(1 + 2\cos x) - \cos x(1 + 2\cos x) = 0$

1) $1 + 2\cos x = 0 \Rightarrow \cos x = -\frac{1}{2} \Rightarrow x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi k$;

2) $\sin x - \cos x = 0 \Rightarrow \operatorname{tg} x = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{4} + \pi n$.

Ответ: $\pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi k$; $\frac{\pi}{4} + \pi n$; $k, n \in Z$.

8.571. Преобразуем произведение функций в сумму. $2\sin x \sin 8x = \cos 7x - \cos 9x$. Получим
$\cos 7x - \cos 9x = \cos 7x \Rightarrow \cos 9x = 0 \Rightarrow 9x = \frac{\pi}{2} + \pi k \Rightarrow x = \frac{\pi}{18} + \frac{\pi k}{9}$, $k \in Z$.

Ответ: $x = \frac{\pi}{18} + \frac{\pi k}{9}$, $k \in Z$.

8.581. Приведем все функции к одному аргументу $(x + 60^\circ)$:
$1 - 2\sin^2(x + 60^\circ) + 4\sin(x + 60^\circ) = 2{,}5 \Rightarrow$
$\Rightarrow 2\sin^2(x + 60^\circ) - 4\sin(x + 60^\circ) + 1{,}5 = 0$.

Пусть $\sin(x + 60^\circ) = t$, тогда $2t^2 - 4t + 1,5 = 0 \Rightarrow t_1 = 1,5$; $t_2 = 0,5$.
Так как $|t| \le 1$, то t_1 отбрасываем. Далее имеем:
$\sin(x + 60^\circ) = 0,5 \Rightarrow x_1 + 60^\circ = 30^\circ + 360^\circ k \Rightarrow x_1 = -30^\circ + 360^\circ k$;
$x_2 + 60^\circ = 150^\circ + 360^\circ n \Rightarrow x_2 = 90^\circ + 360^\circ n$.
Ответ: $-\frac{\pi}{6} + 2\pi k$; $\frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $k, n \in Z$.

8.591. Разделив обе части уравнения на 2, получим

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 3x + \frac{1}{2}\sin 3x = \frac{1}{2}\cos x + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x \Rightarrow \cos\left(3x - \frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos\left(3x - \frac{\pi}{6}\right) - \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = 0 \Rightarrow 2\sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)\sin\left(x + \frac{\pi}{12}\right) = 0$$

1) $\sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = 0 \Rightarrow 2x - \frac{\pi}{4} = \pi k \Rightarrow x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{2}$;
2) $\sin\left(x + \frac{\pi}{12}\right) = 0 \Rightarrow x + \frac{\pi}{12} = \pi n \Rightarrow x = -\frac{\pi}{12} + \pi n$

Ответ: $\frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{2}$; $-\frac{\pi}{12} + \pi n$; $k, n \in Z$.

8.601. Применяя формулу понижения порядка $\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$, получим

$$\frac{1 - \cos 2x}{2} + \frac{1 - \cos 4x}{2} = \frac{1 - \cos 6x}{2} + \frac{1 - \cos 8x}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos 6x + \cos 8x = \cos 2x + \cos 4x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\cos 7x \cos x = 2\cos 3x \cos x \Rightarrow \cos x(\cos 7x - \cos 3x) = 0.$$

1) $\cos x = 0 \Rightarrow x_1 = \frac{\pi}{2} + \pi n$;
2) $\cos 7x - \cos 3x = 0 \Rightarrow 2\sin 5x \sin 2x = 0$;
а) $\sin 2x = 0 \Rightarrow x_2 = \frac{\pi m}{2}$; б) $\sin 5x = 0 \Rightarrow x_3 = \frac{\pi k}{5}$.
З а м е ч а н и е. Так как $x_1 \subset x_2$, то в ответе достаточно указать x_2.
Ответ: $\frac{\pi m}{2}$; $\frac{\pi k}{5}$; $m, k \in Z$.

8.611. Поскольку $\sin x \cos x = \frac{1}{2}\sin 2x$, и $\frac{1}{2}\sin 2x \cos 2x = \frac{1}{4}\sin 4x$, имеем

$$\sin 4x \cos 8x = \sin 12x = \sin(8x + 4x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sin 4x \cos 8x = \sin 8x \cos 4x + \cos 8x \sin 4x \Rightarrow \sin 8x \cos 4x = 0.$$

1) $\sin 8x = 0 \Rightarrow x_1 = \frac{\pi k}{8}$; 2) $\cos 4x = 0 \Rightarrow x_2 = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{4} = \frac{\pi}{8}(2n + 1)$.
Так как x_2 содержится в x_1 при $k = 2n + 1$, то в ответе достаточно указать x_1

Ответ: $x = \frac{\pi k}{8}$; $k \in Z$.

8.621. Разделив обе части уравнения на $\cos^2 x \ne 0$, получим

$$\text{tg}^2 x - (\sqrt{3} + 1)\text{tg}\,x + \sqrt{3} = 0, \text{ откуда } \text{tg}\,x = \frac{\sqrt{3} + 1 \pm \left(\sqrt{3} - 1\right)}{2},$$

т.е. $\text{tg}\,x = \sqrt{3}$, $\text{tg}\,x = 1$. Следовательно, $x_1 = \frac{\pi}{3} + \pi k$; $x_2 = \frac{\pi}{4} + \pi k$.

Ответ: $\frac{\pi}{3} + \pi k$; $\frac{\pi}{4} + \pi k$; $k, n \in Z$.

8.631. Раскрыв скобки, найдем
$(\sin^3 x + \sin^2 x \cos x) + (\cos^3 x + \cos^2 x \sin x) =$
$= \sin^2 x(\sin x + \cos x) + \cos^2 x(\cos x + \sin x) = \sin x + \cos x$

Уравнение примет вид $\sin x + \cos x = 2\sqrt{\sin x \cos x}$. Возведя в квадрат, получим:

$$\sin^2 x + 2\sin x\cos x + \cos^2 x = 4\sin x\cos x \;\Rightarrow\; (\sin x - \cos x)^2 = 0 \;\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\; \sin x - \cos x = 0 \Rightarrow \operatorname{tg} x = 1 \;\Rightarrow\; x = \frac{\pi}{4} + \pi k.$$

Условию $\sin x + \cos x \ge 0$ удовлетворяет решение $x = \frac{\pi}{4} + 2\pi k$.

Ответ: $\frac{\pi}{4} + 2\pi k,\ k \in Z$.

8.641. Так как $\sin 2x = \frac{2\operatorname{tg} x}{1+\operatorname{tg}^2 x}$, то, используя подстановку $\operatorname{tg} x = t$, приведем уравнение к виду $\frac{2t}{1+t^2} + t = 2$. Далее получим

$$t^3 + 3t - 2t^2 - 2 = 0 \Rightarrow (t^3 - 2t^2 + t) + (2t - 2) = 0 \Rightarrow (t-1)(t^2 - t + 2) = 0.$$

Отсюда $t = 1$; уравнение $t^2 - t + 2 = 0$ не имеет действительных решений.

Тогда $\operatorname{tg} x = 1$, т.е. $x = \frac{\pi}{4} + \pi k$.

Ответ: $\frac{\pi}{4} + \pi k,\ k \in Z$.

8.651. Выразим y через x и подставим в первое уравнение:

$$y = x + \frac{\pi}{4} \Rightarrow \sin x \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2\sqrt{2}} \Rightarrow \cos\frac{\pi}{4} - \cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow\; 2x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + \pi k \;\Rightarrow\; x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{2};\ y = \frac{3\pi}{8} + \frac{\pi k}{2}$$

Ответ: $\left(\frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{2}; \frac{3\pi}{8} + \frac{\pi k}{2}\right),\ k \in Z$.

8.661. Преобразуем первое уравнение:

$$\sin x - \sin y = \sin y \Rightarrow 2\sin\frac{x-y}{2}\cos\frac{x+y}{2} = \sin y \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 2\sin\frac{5\pi}{6}\cos\frac{x+y}{2} = \sin y \Rightarrow \cos\frac{x+y}{2} = \sin y$$

Так как $x = y + \frac{5\pi}{3}$, то

$$\cos\left(y + \frac{5\pi}{6}\right) = \sin y \Rightarrow \cos\left(y + \frac{5\pi}{6}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{2} - y\right) = 0 \Rightarrow -2\sin\frac{2\pi}{3}\sin\left(y + \frac{\pi}{6}\right) = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \sin\left(\frac{\pi}{6} + y\right) = 0 \Rightarrow \frac{\pi}{6} + y = \pi k \Rightarrow y = -\frac{\pi}{6} + \pi k;\ x = \frac{3\pi}{2} + \pi k$$

Ответ: $\left(\frac{3\pi}{2} + \pi k; -\frac{\pi}{6} + \pi k\right);\ k \in Z$.

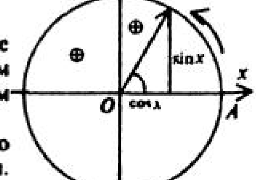


Рис. 41

8.671. Построим тригонометрический круг (см. рис. 41). Пусть радиус-вектор OA, начальное положение которого совпадает с положительным направлением оси OX, вращается в положительном направлении, то есть против часовой стрелки.

В первой и второй четвертях тригонометрического круга значения функции $y = \sin x$ положительны. Следовательно, для первого оборота радиус-вектора решением неравенства $\sin x > 0$ является интервал $0 < x < \pi$. Продолжая вращать радиус-вектор далее еще на один оборот, получаем, что для второго оборота решением заданного неравенства будет интервал $2\pi < x < 3\pi$, то есть к

обеим частям неравенства $0 < x < \pi$ прибавляется по 2π. Таким образом, при каждом обороте к обеим частям неравенства $0 < x < \pi$ прибавляется по 2π, а при n оборотах — $2\pi n$, где $n \in Z$. Общее решение заданного неравенст- ва, то есть такое решение, из которого может быть получено любое решение заданного неравенства, записывается в виде:
$2\pi n < x < \pi + 2\pi n,\ n \in Z$.
Действительно, при $n = 0$ получаем $0 < x < \pi$ (первый оборот), при $n = 1$ получаем $2\pi < x < 3\pi$ (второй оборот) и т.д.
З а м е ч а н и е: Отрицательные значения n соответствуют вращению радиус-вектора по часовой стрелке. Например, при $n = -1$ получим $-2\pi < x < -\pi$, что соответствует первому обороту радиус-вектора при его вращении против часовой стрелки.

8.678. У к а з а н и е: Для функций $y = \operatorname{ctg} x$ и $y = \operatorname{tg} x$ удобно использовать графики этих функций. В данном случае из графика функции $y = \operatorname{ctg} x$ (см. рис. 42) следует, что решением неравенства $\operatorname{ctg} x < 1$ является совокупность интервалов $\pi k + \frac{\pi}{4} < x < \pi + \pi k$, где $k \in Z$.

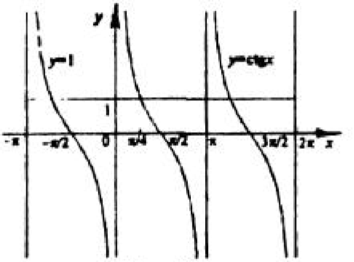


Рис. 42

8.681. Построим тригонометрический круг (см. рис.43). Из рисунка следует, что решением неравенства является семейство интервалов $\left(2\pi k + \frac{5\pi}{6}; \frac{7\pi}{6} + 2\pi k\right)$, где $k \in Z$.

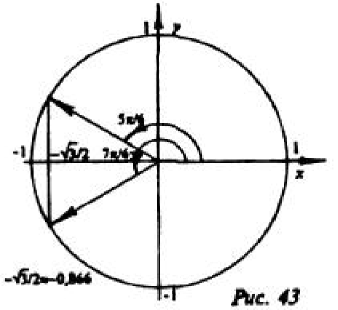


Рис. 43

8.685. У к а з а н и е: На графике функции $y = \operatorname{tg} x$ (рис. 44) выделим все точки кривой, ординаты которых меньше единицы. Таким образом, решением неравенства является совокупность интервалов $\left(\pi k - \frac{\pi}{2}; \pi k + \frac{\pi}{4}\right)$, $k \in Z$.

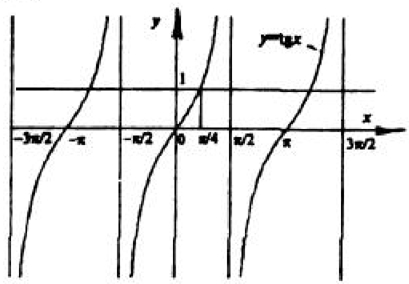


Рис. 44

Раздел IX. Планиметрия

§ 27. Углы. Прямые. Треугольники

9.001. Пусть $\angle CAB = \alpha$, $\angle BAD = \beta$ (рис. 45). Тогда по условию, $\alpha - \beta = 20^\circ$, $\alpha + \beta = 180^\circ$. Отсюда $\alpha = 100^\circ$, $\beta = 80^\circ$. Поэтому $\angle MAB = \angle CAM = 50^\circ$. Так как $\angle CAK = 90^\circ$, то $\angle MAK = 90^\circ - 50^\circ = 40^\circ$

Ответ: 40°.

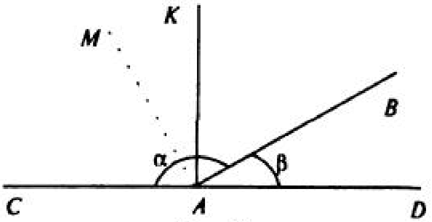


Рис. 45

9.011. Пусть x — меньший из неизвестных углов. Тогда больший из неизвестных углов равен $2x$. Имеем $30^\circ + x + 2x = 180^\circ$, откуда $x = 50^\circ$.
Ответ: 50°.

9.021. Примем основание треугольника за x. Тогда, по условию, $23 + 23 + x = 71$, откуда $x = 25$.
Ответ: 25.

9.031. Рассмотрим два случая. 1) Если гипотенуза треугольника равна $2\sqrt{5}$, а катет равен 4, то второй катет равен $\sqrt{\left(2\sqrt{5}\right)^2 - 16} = 2$.
2) Если катеты треугольника равны $2\sqrt{5}$ и 4, то его гипотенуза равна $\sqrt{\left(2\sqrt{5}\right)^2 + 16} = 6$.
Ответ: 2; 6.

9.041. Найдем другой катет: $x = \sqrt{\frac{281}{4} - 2,5^2} = 8$. Определим площадь треугольника: $S = \frac{8\;2,5}{2} = 10$.
Ответ: 10.

9.051. Пусть x — катет треугольника. Тогда согласно теореме Пифагора,
$$2x^2 = \left(2\left(\sqrt{2} - 1\right)\right)^2, \text{ откуда } x = 2 - \sqrt{2}.$$
Таким образом, периметр треугольника равен $2\left(2 - \sqrt{2}\right) + 2\left(\sqrt{2} - 1\right) = 2$.
Ответ: 2.

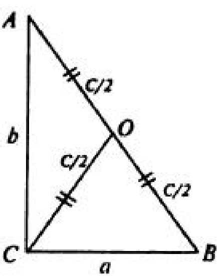


Рис. 46

9.061. Пусть c — гипотенуза треугольника, a — меньший катет, b — больший катет (рис. 46). Согласно условию, $c = 3a$, $b = 4\sqrt{2}$.
Воспользуемся теоремой Пифагора:

$$c^2 = a^2 + b^2 \text{ или } 9a^2 = a^2 + \left(4\sqrt{2}\right)^2,$$

откуда $a = 2$, $c = 6$. Так как в прямоугольном треугольнике медиана, проведенная к гипотенузе, есть радиус описанного круга, то ее длина равна половине гипотенузы, т.е. 3.

Ответ: 3.

9.071. Рассмотрим ΔAKC (рис. 47). Согласно теореме синусов, $\frac{AK}{\sin 45^\circ} = \frac{KC}{\sin 30^\circ}$. Отсюда $KC = \frac{13}{4}$. Следовательно, $BC = 2KC = 6{,}5$.

Ответ: 6,5.

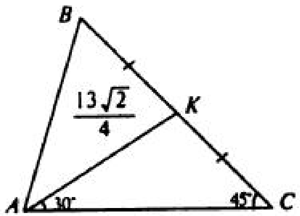


Рис. 47

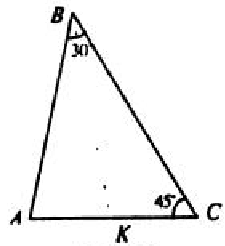


Рис. 48

9.081. Пусть BK — биссектриса угла B и ΔABC (рис. 48). Тогда $\angle KBC = 15^\circ$. В ΔBCK угол C равен 45°, а угол BKC равен 120°. Согласно теореме синусов, имеем $\frac{BC}{\sin 120^\circ} = \frac{BK}{\sin 45^\circ}$, откуда $BK = \frac{\sin 45^\circ}{\sin 120^\circ} BC = 4$.

Ответ: 4.

9.084. У к а з а н и е. Применить теорему косинусов.

9.091. Пусть в ΔABC катет $BC = a$, катет $AC = b$ и гипотенуза $AB = c$ (рис. 49). Опустим высоту CK на гипотенузу AB и обозначим проекции катетов на гипотенузу $AK = b_c$, $BK = a_c$, причем $a_c + b_c = 122$. Известно, что $\frac{b_c}{a_c} = \frac{b^2}{a^2} = \left(\frac{5}{6}\right)^2$, т.е. $\frac{b_c}{a_c} = \frac{25}{36}$, откуда $b_c = \frac{25}{36} a_c$. Из последнего условия и равенства $a_c + b_c = 122$ находим $b_c = 50$, $a_c = 72$.

Ответ: 50; 72.

9.101. Пусть в ΔABC (рис. 50) $BK \perp AC$ и $BK = h = \sqrt{8}$. Так как $A_1C_1 \| AC$, то $\Delta ABC \sim \Delta A_1BC_1$. Далее, пусть S_1 — площадь A_1BC_1, а S — площадь ΔABC.

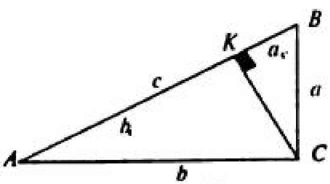


Рис. 49

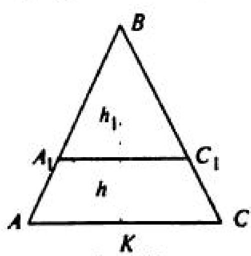


Рис. 50

Тогда, по условию, $S = 2S_1$. Известно, что для подобных треугольников ABC и A_1BC_1 верно равенство $\frac{S_1}{S} = \frac{h_1^2}{h^2}$, откуда $h_1^2 = 4$, т.е. $h_1 = 2$.

Ответ: 2.

§ 27. Четырехугольники и многоугольники

9.111. Пусть x — вторая сторона параллелограмма. Тогда его периметр составляет $2x + 2 \cdot 21 = 123$. Отсюда $x = 40{,}5$.

Ответ: 40,5.

9.121. Пусть в параллелограмме $ABCD$ (рис. 51) $BD = \frac{9\sqrt{6}}{2}$.

Тогда $OD = \frac{1}{2}BD = \frac{9\sqrt{6}}{4}$. В $\triangle AOD$ $\angle OAD = 45°$, $\angle ODA = 60°$. Согласно теореме синусов, имеем

$$\frac{AO}{\sin 60°} = \frac{OD}{\sin 45°}, \text{ откуда } AO = \frac{9\sqrt{6}}{4} \cdot \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{27}{4}.$$

Поэтому $AC = 2AO = 13{,}5$.

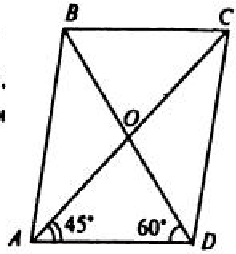


Рис. 51

Ответ: 13,5.

9.131. Сумма внутренних углов выпуклого четырехугольника равна $2d(n-2)$, где $n = 4$, т.е. $180° \cdot 2 = 360°$. Чтобы найти меньший из углов, нужно $360°$ разделить на сумму $2 + 2{,}5 + 9{,}5 + 10 = 24$ и умножить на 2. Таким образом, этот угол равен $360° \cdot \frac{2}{24} = 30°$.

Ответ: 30°.

9.141. Пусть длина стороны равностороннего треугольника $a = 3\sqrt{2}$, а длина основания параллелограмма $b = \sqrt{3}$. Площадь параллелограмма $S_{пар} = bh = \sqrt{3} \cdot h$, а площадь равностороннего треугольника есть

$S_{тр} = a^2\frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{9}{2}\sqrt{3}$. По условию, $S_{пар} = S_{тр}$, т.е. $\sqrt{3}\,h = \frac{9}{2}\sqrt{3}$, откуда $h = 4{,}5$.

Ответ: 4,5.

9.151. Пусть $\angle BAC = 60°$, $AM = MN = NK = AK = a = \frac{\sqrt{12}}{5}$ (рис. 52). Так как в $\triangle ABC$ катет BC лежит против угла 60°, то $BC > AC$. Имеем $\angle CBA = 30°$, $\angle BMN = 60°$ (поскольку $NM \parallel AK$) и $BM = 2NM = 2a$ (из $\triangle NBM$). Тогда $AB = 3a$, откуда $BC = AB\sin 60° =$

$$= 3 \cdot \left(\frac{\sqrt{12}}{5}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 1{,}8.$$

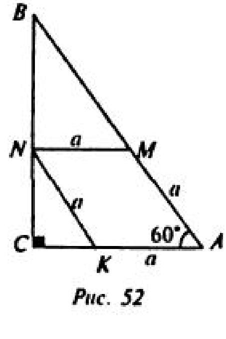


Рис. 52

Ответ: 1,8.

9.161. Пусть $\angle ABC = 90°$, $\angle ACD = 90°$, $BC = AB$, $AC = CD$, $AC = a = \frac{2\sqrt{2}-1}{8}$ (рис. 53). Требуется найти $p = AB + BC + CD + AD$. Так как $\angle BAC = \angle BCA = \angle CAD = \angle CDA = 45°$, то $BC = AB = \frac{a}{\sqrt{2}}$, $AD = a\sqrt{2}$.

Следовательно,

$$p = a\left(2\sqrt{2}+1\right), \text{ т.е. } p = \frac{2\sqrt{2}-1}{8}\cdot\left(2\sqrt{2}+1\right) = 0{,}875.$$

Ответ: 0,875.

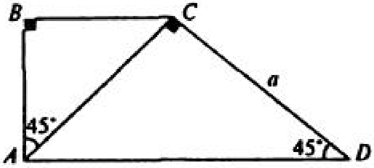


Рис. 53

§ 28. Окружность и круг. Вписанные углы

9.171. Пусть $\smile ACB < \smile ADB$ (рис. 54). Обозначим через α центральный угол, опирающийся на дугу ACB; тогда центральный угол, опирающийся на дугу ADB, равен $360° - \alpha$. Так как $\frac{\alpha}{360° - \alpha} = \frac{5}{7}$, то $\alpha = 150°$. Следовательно, описанный угол $\angle AKB = x = \frac{\alpha}{2} = 75°$.

Ответ: 75°.

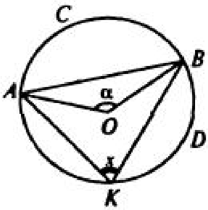


Рис. 54

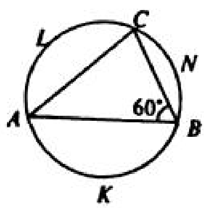


Рис. 55

9.181. Пусть $\smile AKB = 2\smile BNC$ и $\angle ABC = 60°$ (рис. 55). Тогда $\smile ALC = 120°$, $\smile ABC = 240°$.

По условию, $\smile AKB = 2\smile BNC$. Тогда $\frac{\smile AKB}{\smile BNC} = 2$ и $\smile ABC = \smile AKB + \smile BNC$, откуда $\smile AKB = 160°$.

Ответ: 160°.

З а м е ч а н и е. Дуги $\smile AKB$ и $\smile BNC$ — меньшие из дуг, стягиваемых хордами AB и BC.

9.191. Пусть $OA = R$, $OK \perp AB$ и $OK = \frac{1}{2}R$ (рис. 56). Тогда $\angle OAK = 30°$, $AK = R\cos 30°$. По условию, $OK = \frac{5\sqrt{3}}{2} = \frac{R}{2}$, откуда $R = 5\sqrt{3}$. Следовательно, $AK = R\cos 30° = 7{,}5$, $AB = 2AK = 15$.

Ответ: 15.

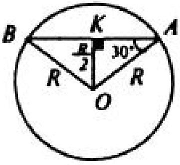


Рис. 56

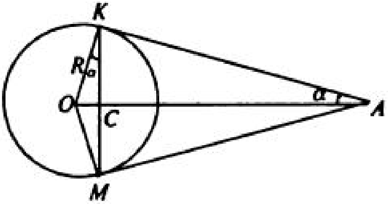


Рис. 57

9.201. Пусть $AK = AM = 13$, $OK = R$, $KM = 2KC = 24$ (рис. 57). Отсюда $KC = 12$. Из ΔAKC найдем $AC = \sqrt{13^2 - 12^2} = 5$. Пусть $\angle CKO = \alpha$. Тогда $\angle CAK = \angle CKO = \alpha$ (как углы с взаимно перпендикулярными сторонами). Поэтому $\frac{CK}{R} = \frac{AC}{AK}$, откуда $R = CK \cdot \frac{AK}{AC} = 31{,}2$.

Ответ: 31,2.

9.211. Пусть $O_1O_2 = \frac{1+\sqrt{3}}{4}$, $\angle AO_2B = 90°$, $\angle AO_1B = 60°$ (рис. 58). Треугольник AO_2B — прямоугольный (по условию) и равнобедренный. Тогда треугольник AKO_2 также равнобедренный и прямоугольный, т.е. $AK = O_2K$. Треугольник AO_1B — равносторонний, поскольку

$$AO_1 = BO_1 = R \text{ и } \angle AO_1B = 60°.$$

Поэтому $AK = \frac{R}{2} = KO_2$, $O_1K = R\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Так как $O_1O_2 = O_1K + KO_2$, то

$$\frac{1+\sqrt{3}}{4} = \frac{R\sqrt{3}}{2} + \frac{R}{2}, \text{ откуда } R = \frac{1}{2}.$$

Ответ: 0,5.

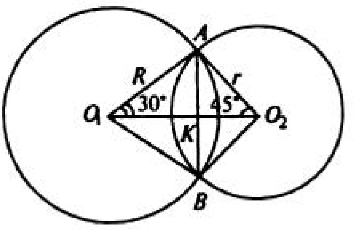


Рис. 58

§ 30. Треугольники и окружность

9.221. Пусть O — центр описанной окружности, $\angle CBA = 40°$ (рис. 59). Как известно, точка O лежит на середине гипотенузы. Тогда $\angle BCO = \angle CBA = 40°$. Отсюда

$$\angle BOC = 180° - 80° = 100°,$$

а угол $x = \angle COA = 80°$.

Ответ: 80°.

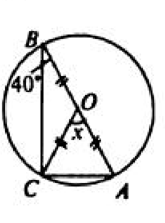


Рис. 59

9.231. Пусть $AB = \frac{1+\sqrt{2}}{4}$, $\angle CBA = \angle BAC = 45^\circ$, $ON \perp AC$ (рис. 60). Тогда $\angle NOA = 45^\circ$ и $OA = R\sqrt{2}$. Имеем $AB = R + R\sqrt{2} = R(1+\sqrt{2})$. Отсюда $R(1+\sqrt{2}) = \frac{1+\sqrt{2}}{4}$, т.е. $R = 0{,}25$. *Ответ*: 0,25.

9.241. Пусть $R = \sqrt[4]{3}$; $\angle BOC = 120^\circ$, как центральный угол, опирающийся на ту же дугу BC, что и вписанный угол BAC (рис. 61). Тогда

$$S_{\Delta BOC} = \frac{1}{2}R^2\sin 120^\circ = \frac{1}{2}\left(\sqrt[4]{3}\right)^2\frac{\sqrt{3}}{2} = 0{,}75.$$

Ответ: 0,75

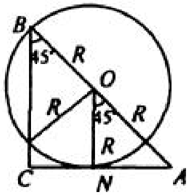


Рис. 60

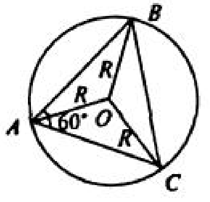


Рис. 61

9.251. Пусть $AC = \frac{6}{\sqrt{\pi}}$, $AB + BC + AC = \frac{15}{\sqrt{\pi}}$ (рис. 62). Обозначим $AK = AM = x$, $BK = BN = y$, $CM = CN = z$.

Тогда $2x + 2y + 2z = \frac{15}{\sqrt{\pi}}$,

$x + z = \frac{6}{\sqrt{\pi}}$. Отсюда $y = \frac{1{,}5}{\sqrt{\pi}}$.

В ΔOBN имеем $\angle OBN = 30^\circ$, $\angle ONB = 90^\circ$; значит,

$$r = y \operatorname{tg} 30^\circ = \frac{1{,}5}{\sqrt{\pi}\sqrt{3}}.$$

Следовательно, $S = \pi r^2 = \frac{3}{4}$.

Ответ: 0,75.

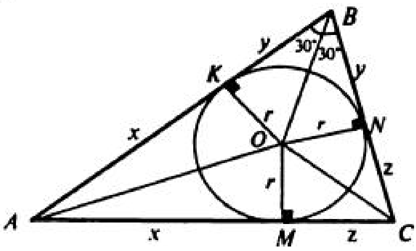


Рис. 62

§ 31. Разные задачи

9.261. Точка K лежит на биссектрисе угла ABC (рис. 63). Поэтому $\frac{AK}{KC} = \frac{AB}{BC}$, т.е. $\frac{AK}{KC} = 1{,}75$. Кроме того, $AK + KC = 4{,}4$. Следовательно, получим систему $AK + KC = 4{,}4$, $AK = 1{,}75KC$, откуда $AK = 2{,}8$, $KC = 1{,}6$.

Ответ: 2,8; 1,6.

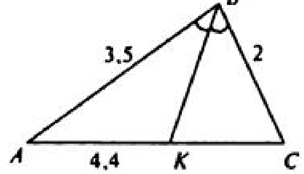


Рис. 63

9.271. В прямоугольном треугольнике ABC (рис. 64) т.е. $AE = EC = EB = R$, откуда $\angle CAB = \angle EBA = 30^\circ$, $\angle ECB = \angle EBC = 60^\circ$. Так как ΔCBK – прямоугольный, то $\angle KBC = 30^\circ$. Поэтому $\angle EBK = 30^\circ$.

Ответ: 30°.

9.281. Отметим, что $\angle AOB = 90^\circ$, как центральный угол, опирающийся на ту же дугу, что и $\angle BCA = 45^\circ$ (рис. 65). Аналогично, $\angle BOC = 120^\circ$, $\angle AOC = 150^\circ$. Следовательно,

$$S_{\Delta ABC} = S_{\Delta AOC} + S_{\Delta AOB} + S_{\Delta BOC} = \frac{1}{2}R^2\sin 120^\circ + \frac{1}{2}R^2\sin 150^\circ + \frac{1}{2}R^2 =$$

$$= \frac{1}{4}R^2\left(3+\sqrt{3}\right) = \frac{1}{4}\left(3+\sqrt{3}\right)\left(3-\sqrt{3}\right) = 1,5.$$

Ответ: 1,5.

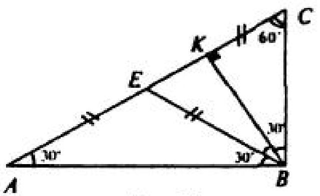


Рис. 64

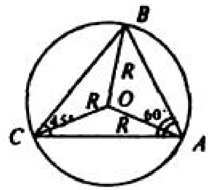


Рис. 65

9.291. Пусть $AC = 8$, $BC = 6$ (рис. 66). Тогда $BK = \sqrt{36-16} = \sqrt{20}$. Положим $LM = 2x$, $\angle KBC = \alpha$. Так как $FM = MX = x$, $TC = KC = 4$, то $BT = 6 - 4 = 2$, $BM = 2 - x$. Из ΔFMB: $\frac{x}{2-x} = \sin\alpha$; из ΔBKC: $\sin\alpha = \frac{2}{3}$. Таким образом, $\frac{x}{2-x} = \frac{2}{3}$, т.е. $x = 0,8$. Отсюда $LM = 1,6$.

Ответ: 1,6.

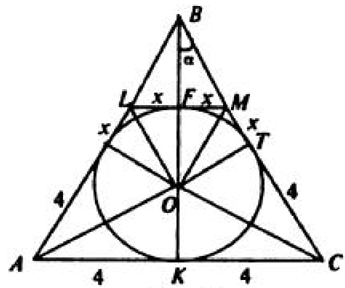


Рис. 66

9.301. Обозначим $AN = ND = AK = MD = x$, $KB = BL = LC = CM = y$ (рис. 67). Тогда

$$S_{ABCD} = \frac{AD+BC}{2}LN = (x+y)2r.$$

Опустим перпендикуляр BF из точки B на основание AD. Из ΔABF найдем $BF = \frac{\sqrt{3}}{2}AB$, или $2r = \frac{\sqrt{3}}{2}(x+y)$. Таким образом, $S_{ABCD} = \frac{\sqrt{3}}{2}(x+y)^2 = 288\sqrt{3}$, откуда $x + y = 24$.

Ответ: 24.

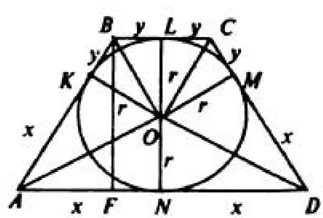


Рис. 67

9.311. Пусть $AB = BC = CD = DE = EF = FA = a = 3\sqrt{3-\sqrt{3}}$ (рис. 68). Тогда $\Delta BCD = \Delta DEF = \Delta ABF$. Кроме того, $BD = DF = BF$, т.е. треугольник BDF — равносторонний, причем $BD = a\sqrt{2}$. Теперь находим:

$S_{\Delta BCD} = \dfrac{a^2}{2}$; $S_{\Delta BDF} = \dfrac{BD^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}$;

$S_{ABCDEF} = 3S_{\Delta BCD} + S_{\Delta BDF} = \dfrac{3}{2}a^2 + \dfrac{\sqrt{3}}{2}a^2 =$

$= \dfrac{a^2}{2}\left(3+\sqrt{3}\right) = \dfrac{9}{2}\left(3-\sqrt{3}\right)\left(3+\sqrt{3}\right) = 27.$

Ответ: 27.

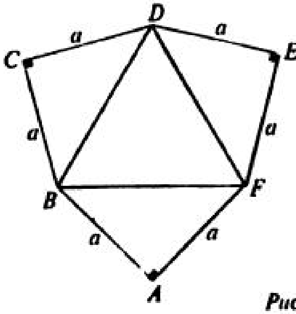


Рис. 68

9.321. Обозначим площадь прямоугольника $ABCD$ буквой S. Тогда (см. рис. 69) $S_{\Delta MCD} = \frac{1}{5}S_{\Delta ACD}$, поскольку треугольники AMD и MCD имеют одну и ту же высоту h, опущенную из вершины D на AC, а основания этих треугольников AM и MC относятся как 4 : 1. Действительно, пусть $MC = x$, $AM = 4x$, $AC = 5x$. Далее, $S_{\Delta AMD} = \frac{1}{2}h\cdot 4x$, $S_{\Delta MCD} = \frac{1}{2}h\cdot x$, $S_{\Delta ACD} = \frac{1}{2}h\cdot 5x$.

Отсюда $\dfrac{S_{\Delta MCD}}{S_{\Delta ACD}} = \dfrac{1}{5}$. Но $S_{\Delta ACD} = \frac{1}{2}S$, так как диагональ прямоугольника делит его площадь на две равные части. ($S_{\Delta ABC} = S_{\Delta ACD}$). Таким образом, $S_{\Delta MCD} = \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{2}S = \frac{1}{10}S$.

Ответ: $\frac{1}{10}$.

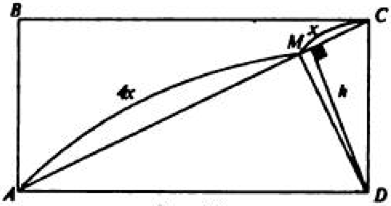


Рис. 69

9.325. Указание.
Рассмотреть треугольник AKB.

9.331. Пусть $AK = x$, $KD = 3x$, $BC = 2x$ (рис. 69'). $\Delta AMK \sim \Delta MBC$, так как $\angle BMC = \angle AMK$, как вертикальные углы, $\angle MBC = \angle MKA$, как накрест лежащие при параллельных прямых AD и BC. Тогда $\dfrac{AM}{MC} = \dfrac{AK}{BC} = \dfrac{MK}{MB} = \dfrac{1}{2}$. Так как площади подобных треугольников относятся как квадраты сходственных сторон, то $\dfrac{S_{\Delta AMK}}{S_{\Delta BMC}} = \left(\dfrac{AK}{BC}\right)^2 = \dfrac{1}{4}$. Далее $S_{\Delta BMC} = \frac{2}{3}S_{\Delta ABC}$, поскольку высота в треугольнике ABC является высотой и в треугольнике BMC, а основания MC и AC относятся как 2 : 3. Тогда $S_{\Delta AMK} = \frac{1}{4}S_{\Delta BCM} = \frac{1}{6}S_{\Delta ABC}$. Наконец $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{3}S_{трап}$ так как треугольники ABC и ACD имеют одну и ту же высоту, а основания их относятся, как 1 : 2. Отсюда $S_{\Delta AMK} = \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{3}S_{трап}$

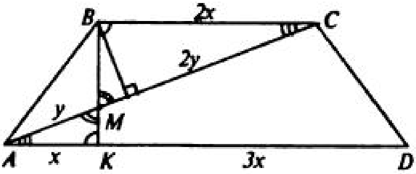


Рис. 69'

Ответ: $\frac{1}{18}$.

9.341. Пусть $CN = x$, тогда $CD = 3x$. Пусть далее $AD = 3y$ (рис. 70'). Продолжим AN до пересечения с продолжением стороны BC в точке L.
$\Delta CNL \sim \Delta AND$, так как: 1) оба треугольника прямоугольные;
2) $\angle CNL = \angle AND$, как углы вертикальные. Тогда $\frac{CN}{ND} = \frac{CL}{AD} = \frac{1}{3}$, откуда $CL = y$, $BL = 4y$. Рассмотрим треугольники AKD и BKL. Они подобны, так как $\angle BKL = \angle AKD$, как вертикальные углы, $\angle LBD = \angle BDA$, как накрест лежащие при параллельных прямых BL и AD. Тогда
$\frac{KD}{BK} = \frac{AD}{BL} = \frac{3}{4}$. Пусть $KD = 3z$, $BK = 4z$. Для решения проведем прямую CK. Получим несколько полезных треугольников:

ΔBCK, ΔCKD, ΔCKN, ΔKND. Имеем:

$S_{\Delta BCD} = \frac{1}{2}S_{ABCD} = \frac{1}{2} \cdot 56 = 28$. $S_{\Delta CKD} = \frac{3}{7}S_{\Delta BCD} = \frac{3}{7}\ 28 = 12$, поскольку у треугольников CKD и BCD общая вершина C и общая высота h, опущенная из этой вершины на основание BD и $\frac{KD}{BD} = \frac{3}{7}$. Далее $S_{\Delta KND} = \frac{3}{4}S_{\Delta CKD} = \frac{3}{4}\ 12 = 9$, так как у треугольников KND и CKD общая вершина K, общая высота h_1, а основания относятся как 3 : 4.

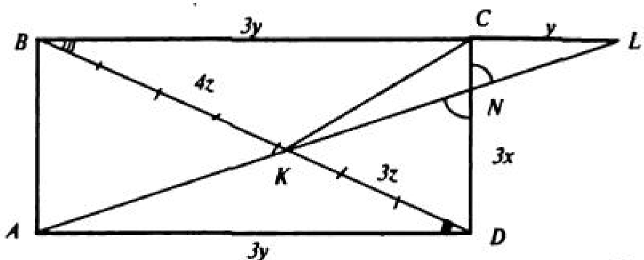


Рис. 70'

Ответ: 9.

Раздел X. Стереометрия

§ 32. Многогранники

10.001. Пусть $AD = a$ (рис. 70). Из ΔABD найдем $BD = a\sqrt{2}$, а из $\Delta BB'D$ получим $B'D = \sqrt{BB'^2 + BD^2} = a\sqrt{3}$. Согласно условию, $S_{бок} = 4a^2 = 3$, откуда $a = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Итак, $B'D = a\sqrt{3} = 1{,}5$.
Ответ: 1,5.

10.011. Так как $V = S_{осн}h$ и $h = 3$, а $S_{осн} = 2\ \ 2\sin 30^\circ = 2$, то $V = 2\ \ 3 = 6$.
Ответ: 6.

10.021. Из ΔABC (рис. 71) находим $BK = h = \sqrt{25-16} = 3$. Следовательно, $S_{бок} = h(AC + AB + BC) = 54$
Ответ: 54.

10.031. Пусть $AD = a$, $DC = b$, $AA' = c$ (рис. 72). Тогда $V = abc$. Из $\Delta AA'D$: $A'D^2 = a^2 + c^2 = (4\sqrt{10})^2 = 160$; из $\Delta DC'C$: $C'D^2 = b^2 + c^2 = (3\sqrt{17})^2 = 153$; из $\Delta AC'C$: $AC'^2 = AC^2 + C'C^2 = a^2 + b^2 + c^2 = 169$.

Получим систему уравнений $\begin{cases} a^2+b^2+c^2=169 \\ a^2+c^2=160 \\ b^2+c^2=153 \end{cases}$ Вычитая из первого уравнения второе, найдем $b = 3$, а вычитая из первого третье, найдем $a = 4$. Отсюда $c = 12$, а $V = 3\cdot 4\cdot 12 = 144$.

Ответ: 144.

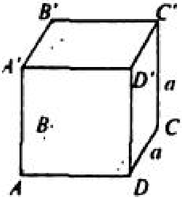


Рис. 70

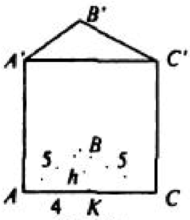


Рис. 71

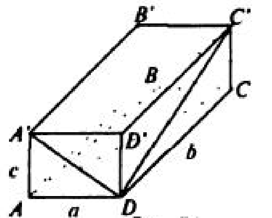


Рис. 72

10.041. Пусть $A'K = h$ (рис. 73). Тогда из $\Delta AA'K$ найдем $h = \frac{1}{2}A'A = 2\sqrt{2}$. Так как $S_{осн} = BC\cdot DC\sin 45^\circ = 6\cdot 3\cdot \sin 45^\circ = 9\sqrt{2}$, то $V = S_{осн}h = 9\sqrt{2}\cdot 2\sqrt{2} = 36$.

Ответ: 36.

10.051. Пусть K — середина ребра $D'D$ (рис. 74). Так как $\Delta AKD = \Delta KD'C'$, то $AK = KC'$. Поэтому треугольник $AC'K$ — равнобедренный. Отсюда $KO \perp AC'$, $AO = OC'$. Таким образом, O — центр симметрии куба, а K' — середина ребра $B'B$. Пусть ребро куба $AD = a$. Тогда $AC' = a\sqrt{3}$, $K'K = B'D' = a\sqrt{2}$. Следовательно,

$S_{сеч} = \frac{1}{2}AC'\cdot KK' = \frac{1}{2}a\sqrt{3}\cdot a\sqrt{2} = 50\sqrt{6}$, откуда $a = 10$.

Ответ: 10.

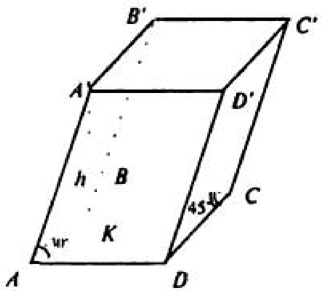


Рис. 73

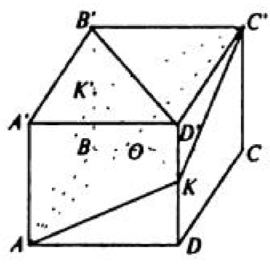


Рис. 74

§ 33. Пирамида

10.061. Площадь ромба найдем по формуле $S = \frac{1}{2}a^2\sin\alpha$, т.е.

$S = \frac{1}{2}\cdot 3^2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{9\sqrt{2}}{4}$. Следовательно, $V = \frac{1}{3}Sh$, т.е. $V = \frac{1}{3}\cdot\frac{9\sqrt{2}}{4}\cdot\sqrt{2} = 1,5$.

Ответ: 1,5.

10.071. Пусть $a_1 = 12$, $a_2 = 4$, $h = \sqrt{3}$ (рис. 75). Объем усеченной треугольной пирамиды определяется по формуле $V = \frac{h}{3}\left(S_1 + \sqrt{S_1 S_2} + S_2\right)$. Так как основанием правильной пирамиды служит равносторонний треугольник, то $S_1 = \frac{a_1^2\sqrt{3}}{4}$,

$S_2 = \frac{a_2^2\sqrt{3}}{4}$ и, значит,

$$V = \frac{\sqrt{3}}{3}\left(\frac{12^2\sqrt{3}}{4} + \sqrt{\frac{12^2\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{4^2\sqrt{3}}{4}} + \frac{4^2\sqrt{3}}{4}\right) = 52.$$

Ответ: 52.

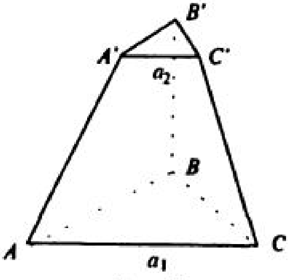


Рис. 75

10.081. Пусть $SO = h$, $SO_1 = h_1$, $AD = a$, $A_1D_1 = a_1$ (рис. 76). Тогда $\frac{S_{сеч}}{S_{осн}} = \frac{h_1^2}{h^2} = \frac{1}{4}$. Отсюда $S_{осн} = 4S_{сеч} = 144$. Так как $S_{осн} = a^2$, то $a = 12$.
Ответ: 12.

10.091. Пусть $SO = h$, $AC = a = 6$ (рис. 77). Из ΔABC найдем $AK = \frac{a\sqrt{3}}{2}$,
$OA = \frac{2}{3}AK = \frac{a\sqrt{3}}{3}$. Так как $\angle SAO = 45°$, то $AO = SO = h = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.
Используя формулу объема пирамиды, получим
$V = \frac{1}{3}S_{осн}\,h = \frac{1}{3}\cdot\frac{a^2\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{a\sqrt{3}}{3} = 18$.
Ответ: 18.

10.101. Найдем стороны оснований пирамиды: $a = \frac{8}{\sqrt{2}}$, $a_1 = \frac{5}{\sqrt{2}}$ (рис. 78).

Рассмотрим сечение AA_1C_1C; имеем $AK = \frac{AC - A_1C_1}{2} = 1,5$. Так как $\angle A_1AK = 45°$, то $A_1K = h = 1,5$. Используя формулу объема усеченной пирамиды, получим

$$V = \frac{h}{3}\left(S_1 + \sqrt{S_2 S_1} + S_2\right) = \frac{1,5}{3}\left(\left(\frac{8}{\sqrt{2}}\right)^2 + \sqrt{\left(\frac{8}{\sqrt{2}}\right)^2\left(\frac{5}{\sqrt{2}}\right)^2} + \left(\frac{5}{\sqrt{2}}\right)^2\right) = 32,25.$$

Ответ: 32,25.

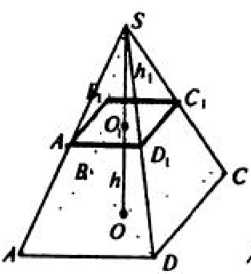


Рис. 76

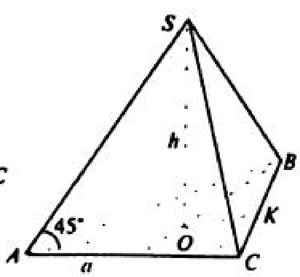


Рис. 77

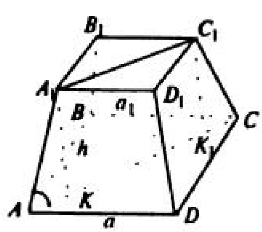


Рис. 78

10.111. Так как $\Delta ASO = \Delta SOB = \Delta SOC$, то O — центр описанной около ΔABC окружности, причем $AO = OB = OC = R$ (рис. 79). Известно, что $S_{\Delta ABC} = \frac{abc}{4R}$. Из ΔAOS следует, что $\frac{h}{R} = \text{tg}30°$ или $h = \frac{R}{\sqrt{3}}$. Теперь можно найти объем пирамиды:

$$V = \frac{1}{3}S \quad h = \frac{1}{3}\frac{abc}{4R}\cdot\frac{R}{\sqrt{3}} = 0,5.$$

Ответ: 0,5.

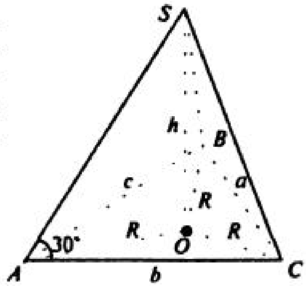


Рис. 79

§ 34. Фигуры вращения

10.121. Объем шара вычисляется по формуле $V = \frac{4\pi R^3}{3}$. По условию, $\frac{4\pi R^3}{3} = \frac{2048\pi}{3}$, откуда $R = 8$ и $d = 2R = 16$.

Ответ: 16.

10.131. Объем конуса равен $V_{кон} = \frac{1}{3}S_1h_1$, а объем цилиндра равен $V_{цил} = S_2h_2$. Так как $S_1 = S_2$, $h_1 = h_2$, то $V_{кон} = \frac{1}{3}V_{цил}$, откуда $V_{кон} = \frac{1}{3}\cdot 447 = 149$.

Ответ: 149.

10.141. Объем конуса $V_{кон} = \frac{1}{3}Sh$, откуда $h = \frac{3V}{S}$, где $S = \frac{\pi d^2}{4}$. Таким образом, $h = \frac{12V}{\pi d^2} = 768$.

Ответ: 768.

10.151. Обозначим диагональ квадрата $ABCD$ через d (рис. 80). Тогда его сторона $h = \frac{d}{\sqrt{2}}$ и $OD = \frac{1}{2}AD = \frac{a}{2} = \frac{d}{2\sqrt{2}} = R$. Теперь можно найти объем цилиндра:

$$V = Sh = \pi R^2h = \pi\frac{d^2}{\left(2\sqrt{2}\right)^2}\cdot\frac{d}{\sqrt{2}} = 3,375.$$

Ответ: 3,375.

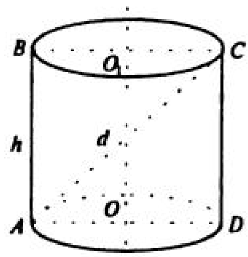


Рис. 80

10.161. Пусть R и R_1 — соответственно радиусы данного и искомого шаров. Тогда $V = \frac{4}{3}\pi R^3$, $V_1 = \frac{4}{3}\pi R_1^3$, $S = 4\pi R^2$, $S_1 = 4\pi R_1^2$. Так как $\frac{V}{V_1} = \left(\frac{R}{R_1}\right)^3 = \frac{1}{27}$, то $R = \frac{R_1}{3}$. Следовательно,

$$S_1 = 4\pi R_1^2 = 4\pi\cdot 9R^2 = 9S = 387.$$

Ответ: 387.

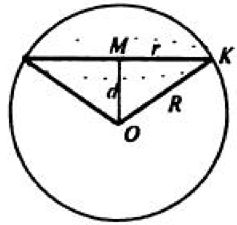


Рис. 81

10.171. Пусть R — радиус шара (рис. 81). Тогда площадь поверхности шара $S = 4\pi R^2$. Сечение шара плоскостью есть круг, радиус которого обозначим через r. При этом площадь сечения $S_{сеч} = \pi r^2$. Из ΔOKM найдем $d^2 + r^2 = R^2$. Следовательно,

$$S = 4\pi(d^2 + r^2) = 4\pi\left(d^2 + \frac{S}{\pi}\right) = 4\pi\left(\frac{30}{\pi} + \frac{15}{\pi}\right) = 180.$$

Ответ: 180.

10.181. Пусть h — высота цилиндра, R — радиус его основания. Тогда $S_{бок} = 2\pi Rh$. Так как, по условию, $h = 2\pi R$, то $S_{бок} = 4\pi^2 R^2 = 76\pi$, откуда $\pi R^2 = 19$. Следовательно, $S_{осн} = \pi R^2 = 19$.

Ответ: 19.

10.191. Пусть $OC = R$, $OK = r$, $BC = l$, $BO = h$ (рис. 82). Тогда $S_{шара} = 4\pi r^2$, а $S_{полушара} = 2\pi r^2$. Найдем r. Пусть $\angle OBC = \alpha$. Тогда из ΔOKB имеем $\sin\alpha = \frac{r}{h}$. Кроме того, из ΔOBC найдем $R = \sqrt{l^2 - h^2}$, откуда $\sin\alpha = \frac{R}{l} = \frac{\sqrt{l^2 - h^2}}{l}$. Таким образом, $\frac{r}{h} = \frac{\sqrt{l^2 - h^2}}{l}$, т.е. $r = \frac{h}{l}\sqrt{l^2 - h^2}$.
Теперь находим $S_{полушара} = 2\pi r^2 = 2\pi\frac{h^2}{l^2}(l^2 - h^2) = 2,4$.

Ответ: 2,4.

10.201. Пусть $OO_1 = a$, $OB = R$ (рис. 83). Фигурой вращения является цилиндр. Найдем площадь его полной поверхности: $S_{полн} = 2\pi R^2 + 2\pi Ra = 2\pi R(R + a) = 72$.

Ответ: 72.

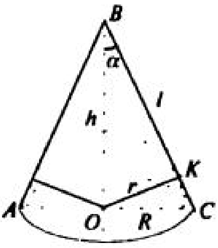


Рис. 82

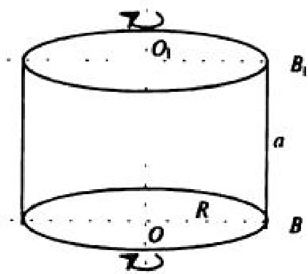


Рис. 83

§ 35. Разные задачи

10.211. Пусть O — основание перпендикуляра, опущенного из вершины B треугольника на плоскость P: $\angle BMO = \alpha$, $\angle BCO = x$, $BO = h$, $BC = l$, $AC = a$, $MC = \frac{a}{2}$ (рис. 84). Согласно условию, $a = 1,5l$, т.е. $\frac{a}{2} = 0,75l$. Из ΔMBC: $MB = \sqrt{l^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{7}}{4}l$. Далее, из ΔMBO: $\sin\alpha = \frac{h}{MB}$, т.е. $\sin\alpha = \frac{2}{\sqrt{7}} = \frac{4h}{\sqrt{7}\,l}$, откуда $\frac{h}{l} = \frac{1}{2}$. Наконец, из ΔBOC: $\sin x = \frac{h}{l} = \frac{1}{2}$.

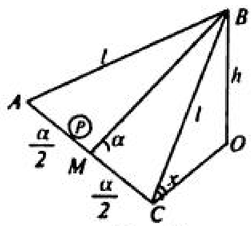


Рис. 84

откуда $x = 30^\circ$.

Ответ: 30°.

10.221. Пусть $AD = a$, $AB = BC = CD = \frac{a}{2}$, $CO \perp$ пл P, $CO = h$ (рис. 85)

Тогда $\sin\alpha = \frac{h}{\frac{a}{2}} = \frac{2h}{a}$, $\sin x = \frac{h}{AC}$.

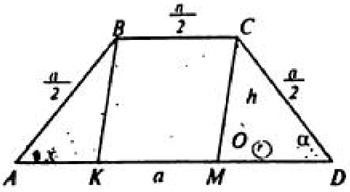


Рис. 85

Из трапеции $ABCD$ найдем AC; имеем $MD = AK = \frac{a}{4}$, $BK = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{4}\right)^2} = \frac{a\sqrt{3}}{4}$,

откуда $AC = \sqrt{AM^2 + CM^2} = = \sqrt{\left(\frac{3a}{4}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{4}\right)^2} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Следовательно, $\sin x = \frac{h}{AC} = \frac{2h}{a} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \sin\alpha$. Но $\sin\alpha = \sqrt{1 - \cos^2\alpha} = \sqrt{0,57}$ и, значит, $\sin x = \sqrt{1 - \cos^2 x} = \sqrt{0,19}$. Отсюда $\cos^2 x = 0,81$, т.е. $\cos x = 0,9$.

Ответ: 0,9

10.231. Пусть $SABC$ — данная пирамида, SK — апофема, $\angle KSO = 30^\circ$, $SO \perp$ пл. ABC, $SO = h$; рассмотрим сечение $SKOC$ (рис. 86). Из ΔLSO_1: $SO_1 = 2r$. Тогда $SO = 3r$. Из ΔKOS: $\frac{KO}{SO} = \operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$, откуда $KO = 3r \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}\, r$. Так как $KO = \frac{1}{3} KC$, то $KC = 3\sqrt{3}\, r$. В свою очередь, $KC = \frac{\sqrt{3}\, a}{2}$, где $AC = BC = = AB = a$. Таким образом, $a = \frac{2}{\sqrt{3}} KC = 6r$. Но по условию $r = 1$ и, значит, $a = 6$.

Ответ: 6.

10.241. Пусть $SABC$ — данная пирамида; $SC = l$, $AC = AB = BC = a$; точка O — центр описанного шара; $\angle OCS = \alpha = 60^\circ$. Рассмотрим сечение $SKOC$ (рис. 87). Из ΔOCS: $\angle CSO = 30^\circ$. Из ΔSO_1C: $\angle O_1CS = \angle O_1SC$. Тогда $\angle O_1CO = 30^\circ$ и $O_1O = \frac{1}{2}R$. Итак, $SO = \frac{3}{2}R$, $SO = l\cos 30^\circ$, т.е. $\frac{3}{2}R = l\cos 30^\circ = \sqrt{3}\frac{\sqrt{3}}{2}$. Отсюда $R = 1$.

Ответ: 1.

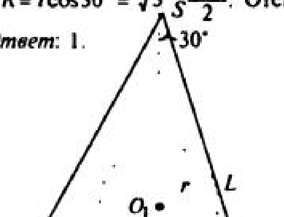


Рис. 86

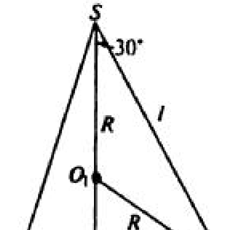


Рис. 87

ОТВЕТЫ

Раздел I. Арифметические преобразования

§ 1. Арифметические действия

1.001. 20. **1.002.** 0,11. **1.003.** 370. **1.004.** 0,1. **1.005.** 1,92. **1.006.** 10. **1.007.** 1,38. **1.008.** 1,14. **1.009.** 1. **1.010.** 14,23. **1.011.** 2. **1.012.** 5,5. **1.013.** 3,7. **1.014.** 0,235. **1.015.** 38. **1.016.** 1. **1.017.** 13,9. **1.018.** 6. **1.019.** 0,85. **1.020.** −0,7. **1.021.** 3,1. **1.022.** 300. **1.023.** 0,099. **1.024.** 5,6. **1.025.** 1,3. **1.026.** 2. **1.027.** 4,2. **1.028.** 15. **1.029.** 6,6. **1.030.** 1,2. **1.031.** 70. **1.032.** 8. **1.033.** 0,5. **1.034.** 2,8. **1.035.** 2,61. **1.036.** 20. **1.037.** 16,5. **1.038.** 14. **1.039.** 7. **1.040.** 87,5. **1.041.** 4,5; 3; 1,8; 9. **1.042.** 120; 5; 25. **1.043.** 24,5; 0,3; 12,6. **1.044.** 210; 140; 84. **1.045.** 1344; 240; 360; 456. **1.046.** 25; 150; 15. **1.047.** 52,5; 37,5; 2,5. **1.048.** 18; 100,8; 54. **1.049.** 97,2; 10,8; 27. **1.050.** 31,5; 18; 27. **1.051.** $\frac{7}{9}$. **1.052.** $\frac{19}{90}$. **1.053.** $\frac{51}{99}$. **1.054.** $\frac{289}{99}$. **1.055.** $\frac{929}{33}$. **1.056.** $\frac{133}{30}$. **1.057.** $\frac{383}{900}$. **1.058.** $\frac{166}{300}$. **1.059.** $\frac{8}{9}$. **1.060.** $\frac{2507}{99}$.

§ 2. Проценты

1.061. 3. **1.062.** 12,6. **1.063.** 85. **1.064.** 4. **1.065.** 60,5. **1.066.** 1,2. **1.067.** 132,56. **1.068.** 12,8. **1.069.** 1,288. **1.070.** 56,16. **1.071.** 300. **1.072.** 130. **1.073.** 500. **1.074.** 600. **1.075.** 50. **1.076.** 60. **1.077.** 2600. **1.078.** $38\frac{1}{3}$. **1.079.** 285. **1.080.** 700. **1.081.** 25. **1.082.** 10. **1.083.** 52. **1.084.** 20. **1.085.** 80. **1.086.** 37,4 т. **1.087.** 34,3 млн. руб. **1.088.** 40 тыс. руб. **1.089.** 31,25. **1.090.** 60. **1.091.** 71,3. **1.092.** 120. **1.093.** 127,1. **1.094.** 34. **1.095.** 163,8. **1.096.** 170. **1.097.** 79,3. **1.098.** 36. **1.099.** 91,5. **1.100.** 29. **1.101.** 16 кг. **1.102.** 70 кг. **1.103.** 80,5 т. **1.104.** 1100 кг. **1.105.** 9,375 кг. **1.106.** 62,5 т. **1.107.** 35,3 т. **1.108.** 43,75 кг. **1.109.** 12,5 кг. **1.110.** 345 кг. **1.111.** 56. **1.112.** 62,5. **1.113.** 60. **1.114.** 50. **1.115.** 9. **1.116.** 20. **1.117.** 20. **1.118.** 80. **1.119.** 100. **1.120.** 40.

§ 3. Действия со степенями и радикалами

1.121. 0,25. **1.122.** 29,65. **1.123.** 4. **1.124.** 1. **1.125.** -1,5. **1.126.** 4. **1.127.** 0,3. **1.128.** 0,04. **1.129.** 0,125. **1.130.** 9. **1.131.** 1. **1.132.** 0,81. **1.133.** 4. **1.134.** 8. **1.135.** −5. **1.136.**

0,25 **1.137.** −7. **1.138.** 1,6. **1.139.** 0,8. **1.140.** 0,5. **1.141.** 1,6. **1.142.** 48. **1.143.** 9. **1.144.** 81. **1.145.** −2,8. **1.146.** 32. **1.147.** 40. **1.148.** 243. **1.149.** 24. **1.150.** 18. **1.151.** 6. **1.152.** 0,4. **1.153.** 6. **1.154.** 4. **1.155.** 2,5. **1.156.** 0,75. **1.157.** 11. **1.158.** 20. **1.159.** 1,5. **1.160.** 8. **1.161.** 0,03. **1.162.** 0,2. **1.163.** 0,3. **1.164.** 28. **1.165.** 8. **1.166.** 0,25. **1.167.** 3,84. **1.168.** 0,5. **1.169.** 52. **1.170.** 4. **1.171.** 0,45. **1.172.** 4,8. **1.173.** 8. **1.174.** 4. **1.175.** 0,2. **1.176.** 16. **1.177.** 0,25. **1.178.** 9. **1.179.** 2,75. **1.180.** 3,5. **1.181.** 13. **1.182.** 12. **1.183.** 6,5. **1.184.** 17. **1.185.** 18. **1.186.** 5. **1.187.** −8. **1.188.** 2,5. **1.189.** −1,2. **1.190.** −9,5. **1.191.** −4. **1.192.** −2. **1.193.** −15. **1.194.** 20. **1.195.** 39. **1.196.** 39. **1.197.** −1. **1.198.** −22. **1.199.** 1. **1.200.** −5. **1.201.** 17. **1.202.** 9. **1.203.** −2. **1.204.** 29. **1.205.** −20. **1.206.** 8. **1.207.** 46. **1.208.** −14. **1.209.** 13. **1.210.** 7. **1.211.** 12. **1.212.** 6. **1.213.** 6. **1.214.** 5. **1.215.** $\frac{11}{6}$. **1.216.** $\frac{4}{9}$. **1.217.** 0,6. **1.218.** $\frac{1}{16}$. **1.219.** 2. **1.220.** $\frac{3}{2}$.

Раздел II. Алгебраические преобразования

§ 4. Многочлены

2.001. a^3+125. **2.002.** $8b^3-1$. **2.003.** $ab(a+b)$. **2.004.** $-(343c^6+8)$. **2.005.** $27d^9-64$. **2.006.** $1000x^3-27y^3$. **2.007.** $-3a+48$. **2.008.** $9x+8$. **2.009.** $-x^2-y^2-2xy+1$. **2.010.** xy. **2.011.** $(2x-3)(5a-3x-1)$. **2.012.** $9a^6x^8(15a^4+10a^4x^3-4x^8)$. **2.013.** $18a^2x^4(4a^3-3ax+2x^2)$. **2.014.** $-14c^4x^{10}(4c^3-3cx^6+5x^{10})$. **2.015.** $33x^5y^6(4x^4y^3+5x^3y-3)$. **2.016.** $13p^3x^5(15p^3-7p^2x+17x^5)$. **2.017.** $18c^7x^5(16c^6-7c^3x^3-11x^5)$. **2.018.** $19b^2y^{10}(5y^{10}-6by^5-21b^2)$. **2.019.** $27a^8z^9(23a^4+5a^2z^3+4z^6)$. **2.020.** $(5t-az)(6a^2t-5z^2)$.

2.021. $\otimes=2$; $\lozenge=12$. **2.022.** $\otimes=\frac{1}{12}$; $\lozenge=\frac{1}{144}$. **2.023.** $\otimes=3$; $\lozenge=9$.
2.024. $\otimes=\frac{1}{2}$; $\lozenge=\frac{1}{4}$. **2.025.** $\otimes=10$; $\lozenge=9$. **2.026.** $\otimes=\frac{a}{2}$; $\lozenge=\frac{a^2}{4}$.
2.027. $\otimes=7$; $\lozenge=49$. **2.028.** $\otimes=-\frac{1}{3}$; $\lozenge=\frac{1}{9}$. **2.029.** $\otimes=\frac{a}{2}$; $\lozenge=\frac{a^2}{4}$.
2.030. $\otimes=a$; $\lozenge=a^2$. **2.031.** $2(c-1)(4c^2+10c+13)$. **2.032.** $(p+1)(p^2-7p+19)$. **2.033.** $2(b-1)(4b^2-14b++13)$. **2.034.** $(x+b+1)(x+b-1)(x-b+1)(b-x+1)$. **2.035.** $(d-5)(d^2+d+25)$. **2.036.** $(3a-2)(9a^2+5a+4)$. **2.037.** $3(x+y)(x+z)(y+z)$. **2.038.** $(a-3x)^3(a+3x-2)$. **2.039.** $4(a-x)^4(a^2+ax+x^2)$. **2.040.** $(2x-1)(4x^2+8x+7)$.
2.041. $(x-1)^2+4$. **2.042.** $\left(a+\frac{1}{4}\right)^2+\frac{11}{4}$. **2.043.** $\left(2b+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{5}{4}$.
2.044. $\left(\frac{1}{2}c+1\right)^2-6$. **2.045.** $3(y+1)^2-11$. **2.046.** $\left(x-\frac{1}{6}\right)^2+1\frac{35}{36}$. **2.047.** $\left(d+\frac{3}{2}\right)^2+\frac{7}{4}$.
2.048. $2(x+1)^2-7$. **2.049.** $\frac{1}{2}(p+5)^2-\frac{41}{2}$. **2.050.** $3\left(x+\frac{1}{3}\right)^2+3\frac{2}{3}$. **2.051.** a^2+2a+2.
2.052. x^2+x+2. **2.053.** y^2-y+1. **2.054.** z^2-z-2. **2.055.** $x^2+2xy+2y^2$.

2.056. $2t + 4$. **2.057.** $x^3 + x^2 - 24x + 36$. **2.058.** $8y^3 - 6y + 1$. **2.059.** $9x^3 - 21x^2 + 4x + 4$
2.060. $x^3 - 7x^2 - 21x + 27$. **2.061.** $2x^2 - x - 1$. **2.062.** $3x^2 + x - 1$ **2.063.** $2x^2 - x + 2$
2.064. $x^2 + x + 1$. **2.065.** $x^2 + 2x - 2$. **2.066.** $x + 1$. **2.067.** $x + 2$. **2.068.** $x^2 + x + 1$.
2.069. $x^3 + x - 2$. **2.070.** $x - 3$. **2.071.** -1 . **2.072.** 0 . **2.073.** -3. **2.074.** 1. **2.075.** 3.
2.076. 1. **2.077.** $-5{,}5$. **2.078.** -5. **2.079.** $-1{,}25$. **2.080.** -3. **2.081.** 0,125. **2.082.** 6,5
2.083. $-0{,}25$. **2.084.** 7,5. **2.085.** 5,8. **2.086.** -18. **2.087.** 5. **2.088.** 3,75. **2.089.** $-2{,}75$
2.090. $-3{,}5$. **2.091.** 3; 7. **2.092.** 2,5; 5. **2.093.** 1,2; 5. **2.094.** 4; 10. **2.095.** $-1{,}5$; 4
2.096. 5; 7,5. **2.097.** 0,5; 6. **2.098.** 3,5; 4. **2.099.** -3; 4. **2.100.** $-1{,}25$; 3.

§ 5. Алгебраические дроби

2.101. $\frac{(a+b)^2}{a-b}$. **2.102.** $a^3 + b^3$. **2.103.** $(a-b)^2$. **2.104.** $(a + b)^2$. **2.105.** $\frac{a^2+b^2-ab}{b-a}$. **2.106** $a^3 - b^3$. **2.107.** $(a-b)^2$. **2.108.** $\frac{a^2-ab+b^2}{a-b}$. **2.109.** $\frac{(a-b)^2}{a+b}$. **2.110.** $\frac{(a+b)^2}{b-a}$. **2.111.** 4
2.112. 3. **2.113.** -3. **2.114.** 0. **2.115.** 0,5. **2.116.** 1. **2.117.** 2. **2.118.** -2. **2.119.** 5. **2.120.** 5. **2.121.** $\frac{1}{a}$. **2.122.** $\frac{ab}{a+b}$. **2.123.** $\frac{2}{(1-5a)^2(1+5a)}$. **2.124.** $\frac{1}{x+y}$. **2.125.** $\frac{2a}{a^3-b^3}$. **2.126.** $\frac{3y}{x(9y^2-x^2)}$. **2.127.** $\frac{3}{2(4c^2-9)}$. **2.128.** $\frac{8}{x^2-4}$. **2.129.** $\frac{1}{2ax}$. **2.130.** $\frac{a^3}{a^3-b^3}$. **2.131.** $\frac{(b-a)^2}{b^2+ab+b^2}$. **2.132.** $\frac{x-2}{2x(x-3y)}$. **2.133.** $\frac{(a-5)^2}{a^2+5a+25}$. **2.134.** $\frac{7}{5(2t+5)}$. **2.135.** $\frac{a-2b}{2ab(a+2b)}$.
2.136. $\frac{2(2x+3)}{2x-3}$ **2.137.** $\frac{2}{3(c-2)}$. **2.138.** $-\frac{2}{x}$. **2.139.** $\frac{z+4}{z(4-z)}$. **2.140.** $\frac{6}{x^2-y^2}$. **2.141.** -1.
2.142. $c-1$. **2.143.** 1. **2.144.** 3. **2.145.** a. **2.146.** $\frac{1}{(2m-1)^2}$. **2.147.** $\frac{1}{a}$. **2.148.** $-4z$.
2.149. $y + 4$. **2.150.** $-\frac{1}{3}$. **2.151.** 19,25. **2.152.** -395. **2.153.** 0,94. **2.154.** 0,25. **2.155.** 2,6. **2.156.** 0,1. **2.157.** -12. **2.158.** 14,44. **2.159.** $-72{,}25$. **2.160.** 0,2. **2.161.** 177. **2.162.** 255. **2.163.** 1,1. **2.164.** 175. **2.165.** 24 2. **2.166.** 6. **2.167.** 7. **2.168.** 5,6. **2.169.** -11.
2.170. 138. **2.171.** $\frac{x^4-1}{x^2+3} = x^2 - 3 + \frac{8}{x^2+3}$. **2.172.** $\frac{-x^3+2x^2+x}{-x+1} = x^2 - x - 2 + \frac{2}{-x+1}$.
2.173. $\frac{x^5+x}{-x^3+x^2-1} = -x^2 - x - 1 - \frac{1}{-x^3+x^2-1}$.
2.174. $\frac{2x^4+1}{x-1} = 2x^3 + 2x^2 + 2x + 2 + \frac{4}{x-1}$. **2.175.** $\frac{x-x^7}{x^5+1} = -x^2 + \frac{x^2+x}{x^5+1}$.
2.176. $\frac{-2x^6+x+1}{x^3-x} = -2x^3 - 2x - \frac{2x^2-x-1}{x^3-x}$. **2.177.** $\frac{3x^5+2x}{-x^2+1} = -3x^3 - 3x + \frac{5x}{-x^2+1}$
2.178. $\frac{-x^4+2x}{x+1} = -x^3 + x^2 - x + 3 - \frac{3}{x+1}$. **2.179.** $\frac{-x^4+2x^2+3x}{x^2-1} = -x^2 + 1 + \frac{3x+1}{x^2-1}$.
2.180. $\frac{x^6+2x}{-x+1} = -x^5 - x^4 - x^3 - x^2 - x - 3 + \frac{3}{-x+1}$. **2.181.** $-\frac{1}{2}$; $\frac{1}{3}$; $\frac{1}{6}$. **2.182.** $\frac{1}{12}$; $\frac{2}{3}$; $-\frac{3}{4}$.
2.183. $-\frac{3}{5}$; $\frac{3}{5}$; $\frac{4}{5}$ **2.184.** 1; -1; 0. **2.185.** -1; 3; -2. **2.186.** -4; -3; 4
2.187. $-\frac{1}{4}$; $\frac{1}{4}$; $\frac{1}{2}$. **2.188.** 1; -1; -1. **2.189.** $-\frac{5}{2}$; $\frac{5}{6}$; $\frac{8}{3}$. **2.190.** $\frac{1}{9}$; $-\frac{1}{3}$; $\frac{8}{9}$.

2.191. $\frac{(a+x+1)^2}{2ax}$. **2.192.** $\frac{x^2}{2b^2}$. **2.193.** $\frac{1}{a^2}$. **2.194.** xy. **2.195.** $\frac{1}{a+b}$. **2.196.** $\frac{1}{x}$. **2.197.** $-a^2$. **2.198.** 1 **2.199.** $\frac{x}{y}$. **2.200.** x^2. **2.201.** 1. **2.202.** $-\frac{2}{a}$. **2.203.** $\sqrt{xy}$. **2.204.** $\sqrt{a}$. **2.205.** $\frac{x+a}{x-a}$. **2.206.** $a+b$. **2.207.** $1-a^2$. **2.208.** $\sqrt[3]{a^2}$. **2.209.** $a-\sqrt{ab}$. **2.210** $\frac{2\left(a+\sqrt{ab}\right)}{a^2-ab}$ **2.211.** 2. **2.212.** $2(a+x)$. **2.213.** $\frac{2}{1-a^2}$. **2.214.** $2\sqrt{ax}$. **2.215.** $\frac{2}{b}$. **2.216.** $\frac{2}{x^2}$. **2.217.** $\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$. **2.218.** $4\frac{a}{b}-2$. **2.219.** x. **2.210.** $-\frac{4}{a^2}$. **2.221.** 6. **2.222.** 3,2. **2.223.** −0,8. **2.224.** 49 **2.225.** −3,75. **2.226.** 10. **2.227.** 0,8. **2.228.** −14. **2.229.** 2,4. **2.230.** 1,8. **2.231.** 1. **2.232.** 36. **2.233.** 2,6. **2.234.** 14. **2.235.** 28. **2.236.** 2,8. **2.237.** 12. **2.238.** 0,05. **2.239.** 0,9. **2.240.** 0,8.

Раздел III. Алгебраические уравнения и системы уравнений

§ 7. Рациональные уравнения

3.001. 14,8. **3.002.** 5,2. **3.003.** 3,2. **3.004.** 4,9. **3.005.** 1,05. **3.006.** 7,75. **3.007.** −0,625. **3.008.** 16,75. **3.009.** 1,95. **3.010.** −3,4. **3.011.** −0,7. **3.012.** −1,2. **3.013.** −14. **3.014.** −0,5. **3.015.** −13. **3.016.** −4. **3.017.** −1,5. **3.018.** −4. **3.019.** −11. **3.020.** −2,2. **3.021.** −2; 0,125. **3.022.** −1; 16. **3.023.** −2; 27. **3.024.** −1; 25. **3.025.** −4; 5. **3.026.** 0,5; 3. **3.027.** −0,25; 2. **3.028.** 0,5; 4. **3.029.** −3; 4. **3.030.** −1; 0,2. **3.031.** $\frac{2ab}{a^2+b^2}$. **3.032.** −5. **3.033.** $\frac{a}{2}$. **3.034.** $\frac{a^4}{1+2a}$. **3.035.** $-\frac{1}{a}-a$. **3.036.** $\frac{k(m^2+k^2)}{m^2-k^2}$. **3.037.** $\frac{a-b}{b(3a-b)}$. **3.038.** $\frac{a^2+b^2-a^2b^2}{a^2-b^2}$. **3.039.** $\frac{n}{n+1}$. **3.040.** $\frac{3}{4}$. **3.041.** −3. **3.042.** −2; −0,75. **3.043.** 1; 1,6. **3.044** 1,5. **3.045.** 1,25. **3.046.** −0,6; 0,6. **3.047.** −2,5; 0,5. **3.048.** −0,1; 2. **3.049.** −2. **3.050.** −0,5; 0,2; 0,5. **3.051.** −9; −3; −0,5. **3.052.** −0,1; 0,3; 2,5. **3.053.** 0,3; 1,5, 3,5. **3.054.** −6; −2; −0,4. **3.055.** −3,5; −3; 0,5. **3.056.** 0,2; 2,5; 3,75. **3.057.** 1; 1,125; 3. **3.058.** −4; 3; 12. **3.059.** 0,5; 0,6; 4,5. **3.060.** −1,2; 0,4; 0,5. **3.061.** 20. **3.062.** −10. **3.063.** 5,5. **3.064.** −2,2. **3.065.** −6,5. **3.066.** 7. **3.067.** 13. **3.068.** −2. **3.069.** −2. **3.070.** 4,5. **3.071.** −3. **3.072.** 7. **3.073.** 4. **3.074.** −0,4. **3.075.** 2,25. **3.076.** 1,2. **3.077.** 5. **3.078.** 2,4. **3.079.** 1. **3.080.** −1. **3.081.** −3; 23. **3.082.** −6; 3. **3.083.** 46,5. **3.084.** −12; −4. **3.085** −15,5. **3.086.** 17. **3.087.** 8. **3.088.** −2, 2. **3.089.** −0,8; 0. **3.090.** −0,5; 0,2. **3.091.** −2; 0. **3.092.** −3; 0,5. **3.093.** −0,5; 0. **3.094.** −1; 0,5. **3.095.** −2; 1. **3.096.** −2; −0,5. **3.097.** −1; −0,6. **3.098.** −1; −0,75. **3.099.** 0; 1,5. **3.100.** −1; 0,5. **3.101.** 0,25.

3.102. 0,5. **3.103.** 0,5. **3.104.** -1. **3.105.** -2 **3.106.** 2. **3.107.** 7. **3.108.** -4. **3.109.** -6. **3.110.** 3. **3.111.** $2k+n$; $2k-n$, если $n \ne \pm k$; $3k$, если $n = \pm k$. **3.112.** $2a-b$; $2b-a$, если $a \ne b$; $3b$, если $a = 2b$; a, если $a = b$. **3.113.** -1; $\frac{a+1}{a-1}$, если $a \ne 1$; -1, если $a = 1$. **3.114.** $\frac{a-b}{c}$; $-\frac{b}{c}$. **3.115.** $\frac{a}{a+b}$; $\frac{b-a}{a+a}$. **3.116.** 1; $\frac{1}{k}$. **3.117.** $\frac{n+1}{k}$; $\frac{n-1}{n+1}$. **3.118.** n; $\frac{1}{n}$, если $n \ne 0$; 0, если $n = 0$. **3.119.** 1; $1+\frac{1}{a}$. **3.120.** a; $\frac{1}{a+b}$. **3.121.** $\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$. **3.122.** -2; $-\frac{1}{2}$. **3.123.** 2; $\frac{1}{2}$. **3.124.** $\pm\sqrt{2}$; $4\pm3\sqrt{2}$. **3.125.** $\frac{7\pm3\sqrt{5}}{2}$; $\frac{5\pm\sqrt{21}}{2}$. **3.126.** -1; $\frac{1}{3}$; $\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$. **3.127.** 1; 2; $-2\pm\sqrt{2}$. **3.128.** 1. **3.129.** 1; $-\frac{1}{3}$; $1\pm\frac{2\sqrt{3}}{3}$. **3.130.** $\frac{5\pm\sqrt{21}}{2}$. **3.131.** 2; 9. **3.132.** $-8+\sqrt{6}$; $-8-\sqrt{6}$. **3.133.** $-\frac{15}{2}$; $-\frac{15}{2}\pm\frac{3\sqrt{10}}{2}$. **3.134.** 2,5; $2,5\pm\frac{\sqrt{10}}{2}$. **3.135.** $\frac{1}{2}\pm\sqrt{2}$; $\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$. **3.136.** $\frac{1}{2}$; $-\frac{1}{12}$. **3.137.** $\frac{-3\pm\sqrt{33}}{2}$. **3.138.** $\frac{-1\pm\sqrt{13}}{2}$. **3.139.** -3; -17; $-10\pm2\sqrt{10}$. **3.140.** $\frac{5\pm\sqrt{73}}{12}$; $\frac{5\pm\sqrt{97}}{12}$. **3.141.** $(-4;\ 5)$, $(4;\ 9)$, $(4;\ -5)$, $(-4;\ -9)$. **3.142.** $(2;\ 1)$, $(2;\ -1)$, $(-2;\ -1)$, $(-2;\ 1)$. **3.143.** $(5;\ -4)$, $(1;\ 4)$, $(-5;\ 4)$, $(-1;\ -4)$. **3.144.** $(2;\ -3)$, $(8;\ 3)$, $(-2;\ 3)$, $(-8;\ -3)$. **3.145.** $(-2;\ -3)$, $(7;\ 3)$, $(2;\ 3)$, $(-7;\ -3)$. **3.146.** $(3;\ -1)$, $(3;\ 1)$, $(-3;\ 1)$, $(-3;\ -1)$. **3.147.** $(1;\ -1)$, $(1;\ 1)$, $(-3;\ 1)$, $(-3;\ -1)$. **3.148.** $(1;\ 0)$, $(1;\ 2)$, $(-1;\ 2)$, $(-1;\ 0)$. **3.149.** $(0;\ 1)$, $(-2;\ 1)$, $(-2;\ -3)$, $(0;\ -3)$. **3.150.** $(1;\ -1)$, $(-1;\ 1)$, $(-3;\ 1)$, $(-1;\ -1)$. **3.151.** $(2;\ 0)$, $(0;\ -4)$, $(-4;\ -4)$, $(-2;\ 0)$. **3.152.** $(2;\ 5)$, $(1;\ 5)$, $(-2;\ -1)$, $(-1;\ -1)$. **3.153.** $(5;\ 2)$, $(5;\ 3)$, $(-1;\ 0)$, $(-1;\ -1)$. **3.154.** $(3;\ 6)$, $(1;\ 0)$. **3.155.** $(3;\ 1)$. **3.156.** $(1;\ 1)$, $(0;\ 0)$, $(-3;\ -1)$, $(-2;\ 0)$. **3.157.** $(17;\ -11)$, $(-1;\ -11)$, $(-3;\ 29)$, $(-21;\ 29)$. **3.158.** $(-1;\ 2)$, $(0;\ 0)$. **3.159.** $(2;\ 5)$, $(8;\ -7)$, $(0;\ -7)$, $(-6;\ 5)$. **3.160.** $(9;\ 4)$, $(5;\ 0)$, $(-13;\ -6)$, $(-9;\ -2)$. **3.161.** $x = -1$; $a = 1$. **3.162.** $x = 2$; $a = -1$. **3.163.** $x = -3$; $a = -2$. **3.164.** $x = 0,5$; $a = -1,5$. **3.165.** $x = 1$; $a = 0,5$. **3.166.** $x = 3$; $a = 1$. **3.167.** $x = 5$; $a = -2$. **3.168.** $x = 2$; $a = 2$. **3.169.** $x = 1$; $a = -4$. **3.170.** $x = 3$; $a = 3$. **3.171.** 0; 3. **3.172.** 1; $\frac{21}{20}$. **3.173.** 0; 1. **3.174.** 2; $\frac{33}{16}$. **3.175.** 0; $\frac{1}{5}$. **3.176.** $\frac{1}{2}$; $\frac{5}{16}$. **3.177.** -2; 0. **3.178.** $\frac{2}{3}$; $\frac{13}{18}$. **3.179.** 3; $-\frac{1}{8}$. **3.180.** $\frac{2}{3}$; $\frac{7}{12}$. **3.181.** 1. **3.182.** 2. **3.183.** -3. **3.184.** -1. **3.185.** -4. **3.186.** $-1,5$. **3.187.** -5. **3.188.** 7. **3.189.** 0,5. **3.190.** 2,5.

§ 8. Системы рациональных уравнений

3.191. $(-1;0)$. **3.192.** $(0;\ 1)$. **3.193.** $(0;\ 3)$. **3.194.** $(0;\ 2)$. **3.195.** $(-1;\ 0)$. **3.196.** $(1;\ 2)$. **3.197.** $(1;\ 1)$. **3.198.** $(-1;\ 1)$. **3.199.** $(-1;\ 2)$. **3.200.** $(1;\ 3)$. **3.201.** $(-1;\ 3)$. **3.202.** $(-2;\ 5)$. **3.203.** $(2;\ 4)$. **3.204.** $(4;\ 5)$. **3.205.** $(-3;\ 5)$. **3.206.** $(1;\ 8)$. **3.207.** $(2;\ 6)$. **3.208.** $(-5;\ 6)$. **3.209.** $(3;\ 4)$. **3.210.** $(-10;\ 1)$. **3.211.** $(26;\ 198)$. **3.212.** $(49,5;\ 95)$. **3.213.** $(69;\ 297)$.

3.214. (198; 470). **3.215.** (56; 360). **3.216.** (90; 461). **3.217.** (159; 297). **3.218.** (99; 427). **3.219.** (395; 450). **3.220.** (180; 566). **3.221.** (−0,5; 0,5; 1). **3.222.** (−2; 0; 1). **3.223.** (0,4; 0,6; 2). **3.224.** (−2; −1; 0). **3.225.** (1,5; 2; 3). **3.226.** (1; 2; 3). **3.227.** (0; 0,5; 1). **3.228.** (−1; 0; 1). **3.229.** (0,5; 1; 2). **3.230.** (0,1; 0; 1). **3.231.** (−1; 4). **3.232.** (3; 5). **3.233.** (1; 5). **3.234.** (1; 2). **3.235.** (2; 3). **3.236.** (1; 3). **3.237.** (−2; 1). **3.238.** (−1; 1). **3.239.** (−1; 2). **3.240.** (1; 2). **3.241.** (2; 3) . **3.242.** (−5; −4) . **3.243.** (1; 4). **3.244** (−5; −2). **3.245.** (−2; 1). **3.246.** (6; 8). **3.247**. (−3, 2). **3.248.** (−1; 3). **3.249.** (−4; 6). **3.250**. (−5; −2). **3.251.** (1; 3). **3.252.** (1; 2). **3.253.** (−3; 3). **3.254.** (−5; 1). **3.255.** (1; 11). **3.256.** (1; 3). **3.257.** (−2; 4). **3.258.** (1; 3). **3.259.** (−5; 1). **3.260.** (−4; 1). **3.261**. (4; 3), (−4; −3). **3.262.** (3; 2), (−3; −2) . **3.263.** (3; 2), (−3; −2) **3.264**. (2; 1), (−2; −1), (2; −1), (−2; 1). **3.265.** (2; 1), (−2; −1), $\left(\sqrt{6};\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$, $\left(-\sqrt{6};-\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$. **3.266.** (2; 2), (−2; −2), (4; 1), (−4; −1). **3.267.** (1; 3), (−1; −3). **3.268.** (4; 1), (−4; −1). **3.269**. (2; 3), (−2; −3), $\left(\frac{3}{\sqrt{11}};\frac{2}{\sqrt{11}}\right)$, $\left(-\frac{3}{\sqrt{11}};-\frac{2}{\sqrt{11}}\right)$. **3.270.** (2; 3), (−2; −3), (0, $\sqrt{13}$), (0; $-\sqrt{13}$). **3.271.** (3; 5), (36, −11,5), (−36; 11,5), (−3; −5). **3.272.** (1; −1), (3; −3), $\left(-13\pm\sqrt{157};\frac{\left(-13\pm\sqrt{157}\right)}{2}\right)$. **3.273.** (3; 2), (−3; −2), $\left(\frac{1}{\sqrt{3}};\frac{5}{\sqrt{3}}\right)$, $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}};-\frac{5}{\sqrt{3}}\right)$. **3.274**. $\left(\frac{1}{\sqrt{2}};-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}};\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$. **3.275.** (2; 1), (−2; −1). **3.276.** (2; −1), (−1; y — любое действительное число). **3.277.** (1; 3), (−1/5; −3/5). **3.278.** (2; −4), (−4; 2). **3.279.** (±3; ±2), $\left(\pm\frac{25}{\sqrt{113}};\mp\frac{16}{\sqrt{113}}\right)$. **3.280.** (0; 0), (−2; −4), (4; 2). **3.281.** 1. **3.282.** $2\sqrt{2}$. **3.283.** $\sqrt{2}$. **3.284.** 9. **3.285.** $4\sqrt{2}$. **3.286.** 0,5. **3.287.** $\sqrt{2}$. **3.288.** 2. **3.289.** 1,5. **3.290.** 1.

§ 9. Уравнения и системы уравнений, содержащие неизвестные под знаком абсолютной величины

3.291. 1; 1,5. **3.292.** −2,8; 3,6. **3.293.** −0,2; 1,4. **3.294.** −1,5; 2. **3.295.** −1; 3. **3.296.** −2,8; 1,2. **3.297.** −0,2; 0,6. **3.298.** −1,2; 4. **3.299.**−2,25; 3. **3.300.** −1,2; 0,4. **3.301.** 1. **3.302.** 5. **3.303.** −4. **3.304.** 3. **3.305**. −2. **3.306.** −7. **3.307.** 5. **3.308**. 1. **3.309.** −6. **3.310** 4. **3.311.** 2. **3.312.** 5. **3.313.** −1,25. **3.314.** −2. **3.315.** −3. **3.316.** 4. **3.317.** 10. **3.318**. 6. **3.319.** 3,5. **3.320.** 0,5. **3.321.** −8; 2. **3.322.** −10; 2. **3.323.** −2; 0; 2. **3.324**.

−5. −1. **3.325**. −6; 2. **3.326**. −6; 4. **3.327.** −3; 1; 3. **3.328.** −5; 1. **3.329.** −11; 1. **3.330**. 2; 4. **3.331**. 4. **3.332.** 0,25. **3.333.** 6. **3.334.** 3,5 **3.335.** 18,5. **3.336.** 1,25. **3.337.** −1,5. **3.338.** −6. **3.339.** 0. **3.340**. 0,85. **3.341.** 5. **3.342.** 2. **3.343.** 10. **3.344.** 18. **3.345.** 0. **3.346.** 4. **3.347.** 8 **3.348.** 21. **3.349.** 12. **3.350.** 12. **3.351.** 1. **3.352.** 8. **3.353.** 9. **3.354.** 1,6. **3.355.** 0,25. **3.356.** 1. **3.357.** 1,5. **3.358.** 4. **3.359.** $\frac{1}{16}$ **3.460.** 4. **3.361.** (−16; −10). **3.362.** (0,3; 4,4). **3.363.** (−32; −18). **3.364.** (1; 5). **3.365.** (−7; 2). **3.366.** (−0,55; 0,7). **3.367.** (−2; −1) **3.368**. (−4,2; 3). **3.369.** (−3; 0,5). **3.370**. (−2; 28). **3.371.** (−1,2; 0,68). **3.372.** (−1; 1,2). **3.373.** (−7,1; −5,7). **3.374**. (−4,1; −3,3). **3.375.** (−8,5; −4,4). **3.376.** (5,7; 8,2). **3.377.** (−9,5; −5,1). **3.378.** (−4,8; 0,36). **3.379**. (−5; −2). **3.380.** (12; 12,5) **3.381.** (−3; −1). **3.382.** (−3; 2). **3.383.** (4; 7). **3.384.** (4,5; 5,5). **3.385.** (−6; 6). **3.386.** (1,6; 8,6). **3.387**. (−2; 0,5). **3.388.** (2; 6). **3.389.** (3; 4). **3.390.** (2; 2,1). **3.391**. (−1; 2). **3.392.** (0,5; 4). **3.393.** (1; 4). **3.394.** (0; 3). **3.395**. (−6; 5). **3.396.** (0; 0,2). **3.397.** (−5; 4). **3.398.** (−0,5; 3). **3.399.** (−0,5; 5). **3.400.** (0,1; 5,6). **3.401.** (0; 3). **3.402.** (1; 12). **3.403.** (2; 7). **3.404.** (1; 3). **3.405.** (2; 5). **3.406.** (4; 6). **3.407.** (−6; −3). **3.408.** (−3; 4). **3.409.** (−1; 3), (−3; 9). **3.410.** (5; 6).

§ 10. Иррациональные уравнения и системы уравнений

3.411. −1. **3.412.** 0. **3.413.** 0. **3.414.** 5. **3.415.** 3. **3.416.** −12. **3.417.** −2. **3.418.** 1,5. **3.419.** −9. **3.420.** 0,5. **3.421.** 7,5. **3.422.** 2,5. **3.423.** 1,25. **3.424.** 32. **3.425.** −0,2 **3.426.** −2,75. **3.427.** 1,5. **3.428.** 0,2. **3.429.** −1. **3.430.** −44. **3.431.** 0,25. **3.432.** 4. **3.433.** 14. **3.434.** −2. **3.435.** −1. **3.436.** 0,75. **3.437.** 17. **3.438.** 0,25. **3.439.** 2. **3.440.** 0,4. **3.441.** 7. **3.442.** 0; 25. **3.443.** 8. **3.444.** 0; 16. **3.445.** 5. **3.446.** 6. **3.447.** 7. **3.448.** −0,5. **3.449.** 0 **3.450.** 0. **3.451.** 3. **3.452.** −0,5; 1. **3.453.** 1. **3.454.** 0; 1. **3.455.** −3; 4. **3.456.** 1; 2. **3.457.** −2; 0. **3.458.** −2; 3. **3.459.** 2. **3.460.** 1; 2. **3.461.** 8. **3.462.** 0. **3.463.** 3. **3.464.** 3. **3.465.** 8. **3.466.** 28. **3.467.** 0. **3.468.** 4. **3.469.** 19. **3.470.** 6. **3.471.** −0,75. **3.472.** −2,91. **3.473.** −4,84 **3.474.** 6. **3.475.** 4. **3.476.** 0,0016. **3.477.** 4. **3.478.** 1. **3.479.** 0,22. **3.480.** −4,04. **3.481.** 6. **3.482.** −2. **3.483.** −1. **3.484.** 0. **3.485.** 2,5. **3.486.** 0,6 **3.487.** −1,5. **3.488.** 36. **3.489.** 1,02. **3.490.** 2. **3.491.** 4; 5. **3.492.** 1,5; 2. **3.493.** −1; 0. **3.494.** 0; 0,5 **3.495.** 3; 4. **3.496**. 2; 2,5. **3.497.** 1; 2. **3.498.** 2; 3. **3.499.** 6; 7. **3.500.** 3,5; 4. **3.501.** 3. **3.502.** 1. **3.503.** 1. **3.504.** 4. **3.505.** 6. **3.506.** 1. **3.507.** 8. **3.508.** 0 **3.509.** 7. **3.510.** 4,5. **3.511.** 0,625. **3.512.** 0; 0,6. **3.513.** −2; 0. **3.514.** 2. **3.515**. 0; 0,875. **3.516**. 9. **3.517.** −3,5; 0, 1,5. **3.518.** −2; −1. **3.519**. 0,6. **3.520.** 0. **3.521.** a=0,75;

$a>1$. **3.522.** $a=-1,25$; $a>-1$. **3.523.** $a=1,75$; $a>2$. **3.524.** $a=2,25$; $a<2$. **3.525.** $a\le 1$. **3.526.** $a\ge -2$. **3.527.** $a\ge -1$. **3.528.** $a=-3$; $a>-2$. **3.529.** $a=1$; $a<0$. **3.530.** $a=1$; $a>2$. **3.531.** (1; 8). **3.532.** (2; −1). **3.533.** (16; 1). **3.534.** (2,5; 1,5). **3.535.** (1; 4), (4; 1). **3.536.** (2; 1). **3.537.** (4; 1). **3.538.** (0,5; 0,5). **3.539.** (13; 12). **3.540.** (1; 2). **3.541.** (1; 5) **3.542.** (0; 1). **3.543.** (1; 5). **3.544.** (1; 7). **3.545.** (2; 3). **3.546.** (1; 3). **3.547.** (2; 4). **3.548.** (1; 2). **3.549.** (1; 6). **3.550.** (5; 6). **3.551.** (8; 2), (2; 8). **3.552.** (4; 1). **3.553.** (3; 3) **3.554.** (8; 32). **3.555.** (10; 5). **3.556.** (5; 6). **3.557.** (19; 3). **3.558.** (2,5; −1,5), $\left(\frac{5}{8}; \frac{3}{8}\right)$. **3.559.** (15; −12), $\left(\frac{5}{3}; \frac{4}{3}\right)$. **3.560.** (1; 2).

§ 11. Задачи на составление уравнений

3.561. 270 км. **3.562.** 4 ч. **3.563.** 42 км. **3.564.** 108 км. **3.565.** 250 км/ч. **3.566.** 45 км/ч. **3.567.** 12 км/ч. **3.568.** 25 км; 125 км. **3.569.** 2 ч. **3.570.** 6 ч. **3.571.** 74. **3.572.** 300 **3.573.** 26,5. **3.574.** 60. **3.575.** 2,0625. **3.576.** 20. **3.577.** 1,5. **3.578.** 140. **3.579.** 20. **3.580.** 28. **3.581.** 200 г. **3.582.** 50 кг. **3.583.** 400; 600. **3.584.** 1079; 1411. **3.585.** 200; 250 **3.586.** 40; 25. **3.587.** 200 тыс. руб.; 300 тыс. руб. **3.588.** 70 кг. **3.589.** 150 г; 450 г. **3.590.** 13,5 кг. **3.591.** 10 ч; 15 ч. **3.592.** 20 ч; 30 ч. **3.593.** 12 ч; 20 ч. **3.594.** 40. **3.595.** 6 ч; 18 ч. **3.596.** 50; 75. **3.597.** 10 ч. **3.598.** 4,8 ч; 8 ч. **3.599.** 36 мин; 54 мин. **3.600.** 5 ч. **3.601.** 50 км/ч. **3.602.** 60 км/ч. **3.603.** 56 км. **3.604.** 12 мин. **3.605.** 4км/ч; 6 км/ч. **3.606.** 20 км/ч. **3.607.** 1398 км. **3.608.** 4 км/ч. **3.609.** 840 км; 80км/ч; 70 км/ч. **3.610.** (60; 80), (80; 100). **3.611.** 12,55. **3.612.** 27,6. **3.613.** 12,486. **3.614.** 15,763. **3.615.** 10,313. **3.616.** 11,698. **3.617.** 4. **3.618.** 4. **3.619.** 5. **3.620.** 161,2.

Раздел IV. Логарифмы. Показательные и логарифмические уравнения

§ 12. Логарифмы

4.001. −2. **4.002.** −0,5. **4.003.** −3 **4.004.** −1,5. **4.005.** 0,5. **4.006.** 1,5. **4.007.** −2,5. **4.008.** 2. **4.009.** −2. **4.010.** 0,5. **4.011.** 4. **4.012.** 27. **4.013.** 2. **4.014.** 4. **4.015.** 2. **4.016.** 16 **4.017.** 2. **4.018.** 9. **4.019.** −0,064. **4.020.** 2. **4.021.** 1. **4.022.** 2. **4.023.** −3. **4.024.** 1. **4.025.** 0,5. **4.026.** 1,5. **4.027.** −1. **4.028.** 0. **4.029.** −2. **4.030.** 2. **4.031.** 25. **4.032.** 0,25.

4.033. 16. **4.034.** 4. **4.035.** 7. **4.036.** 3. **4.037.** 5. **4.038.** 9. **4.039.** 0,5. **4.040.** 8. **4.041.** 2. **4.042.** −0,5. **4.043.** 0,125. **4.044.** 1. **4.045.** 0,5. **4.046.** −1. **4.047.** 2. **4.048.** 0,25. **4.049.** −0,5. **4.050.** −2. **4.051.** 2. **4.052.** 6. **4.053.** 25. **4.054.** 7. **4.055.** 0,04. **4.056.** 3. **4.057.** 36. **4.058.** 64. **4.059.** 16. **4.060.** 49. **4.061.** −0,5. **4.062.** 4. **4.063.** 0,5. **4.064.** 21. **4.065.** 9. **4.066.** 34. **4.067.** −18. **4.068.** 3. **4.069.** 9. **4.070.** 2,1. **4.071.** 1. **4.072.** 0,5. **4.073.** −2. **4.074.** 2. **4.075.** 1. **4.076.** 0,5. **4.077.** 2. **4.078.** −3. **4.079.** 3. **4.080.** 4. **4.081.** 5. **4.082.** 1,3. **4.083.** −0,1. **4.084.** 9,5. **4.085.** −1,125. **4.086.** −21,4. **4.087.** −8. **4.088.** 3,25. **4.089.** −23. **4.090.** 1,3. **4.091.** 4. **4.092.** 3. **4.093.** 3. **4.094.** −2. **4.095.** −0,04. **4.096.** 4. **4.097.** 3. **4.098.** −0,5. **4.099.** 5. **4.100.** 10. **4.101.** 2. **4.102.** 1. **4.103.** 2. **4.104.** 1. **4.105.** 3. **4.106.** 1. **4.107.** 2. **4.108.** 2. **4.109.** 1. **4.110.** 1.

§ 13. Показательные уравнения и системы уравнений

4.111. −5,5. **4.112.** 3. **4.113.** −3. **4.114.** 7. **4.115.** 1,8. **4.116.** 2. **4.117.** 2,5. **4.118.** 6,5. **4.119.** 4,5. **4.120.** −8. **4.121.** 2,5. **4.122.** −1. **4.123.** −3. **4.124.** 2,5. **4.125.** 5,5. **4.126.** 3,5. **4.127.** −0,5. **4.128.** −3. **4.129.** 9,5. **4.130.** 1. **4.131.** 2,625. **4.132.** −2,25. **4.133.** 7,8. **4.134.** 1,5. **4.135.** 0,6. **4.136.** 0,875. **4.137.** 2,25. **4.138.** 0,375. **4.139.** 1,6. **4.140.** 1,3. **4.141.** −4. **4.142.** 2. **4.143.** 0. **4.144.** 3. **4.145.** −2. **4.146.** −1. **4.147.** 5. **4.148.** 4. **4.149.** −1. **4.150.** −3. **4.151.** −2; 2. **4.152.** −1; 1. **4.153.** 0; 1. **4.154.** 16. **4.155.** 1,25. **4.156.** 0,04. **4.157.** −0,96. **4.158.** 0; 2,9. **4.159.** 1. **4.160.** 9. **4.161.** 1. **4.162.** 0. **4.163.** 2. **4.164.** 4. **4.165.** −2. **4.166.** 0,5. **4.167.** 0. **4.168.** 0. **4.169.** 0. **4.170.** $\frac{2}{3}$. **4.171.** 5. **4.172.** 3. **4.173.** 2. **4.174.** 1. **4.175.** 1. **4.176.** −2. **4.177.** −2. **4.178.** 0,5. **4.179.** 1,5. **4.180.** −0,5. **4.181.** 3. **4.182.** −3. **4.183.** 1. **4.184.** −1. **4.185.** −4. **4.186.** 1. **4.187.** 2. **4.188.** −2. **4.189.** 4. **4.190.** −2. **4.191.** −2. **4.192.** −3. **4.193.** 4. **4.194.** 0,75. **4.195.** −1,5. **4.196.** 1. **4.197.** 2. **4.198.** 3. **4.199.** 1. **4.200.** 0,25. **4.201.** −6. **4.202.** 4. **4.203.** −4. **4.204.** 1,5. **4.205.** 8. **4.206.** 0,75. **4.207.** −2. **4.208.** 0,75. **4.209.** 7. **4.210.** −8. **4.211.** 0,25. **4.212.** 0; 0,5. **4.213.** −1; 1. **4.214.** 1; 2. **4.215.** 0. **4.216.** −1. **4.217.** 0; 1. **4.218.** 2. **4.219.** 2. **4.220.** 1. **4.221.** 1. **4.222.** 2. **4.223.** 1. **4.224.** 3. **4.225.** 2. **4.226.** 2. **4.227.** 3. **4.228.** 6. **4.229.** −1. **4.230.** 3. **4.231.** 1. **4.232.** 0. **4.233.** 2. **4.234.** 1. **4.235.** 0. **4.236.** 1. **4.237.** 2. **4.238.** 2. **4.239.** 2. **4.240.** 1. **4.241.** 1. **4.242.** −1,5. **4.243.** −1. **4.244.** 4,5. **4.245.** 3. **4.246.** 1,5. **4.247.** 0,2. **4.248.** 6. **4.249.** 0,6. **4.250.** 0,75. **4.251.** −3; −2; −1. **4.252.** −1. **4.253.** −3; −2. −1. **4.254.** −1. **4.255.** −2; −1. **4.256.** −3; −2; −1. **4.257.** −1. **4.258.** −1. **4.259.** 2. 1. **4.260.** 1. **4.261.** (2; 5). **4.262.** (1,5; 2). **4.263.**

(−0,5; 2). **4.264.** (2; 2). **4.265.** (1; 2,25). **4.266.** (2; 6). **4.267.** (0,25; 2). **4.268.** (0,5; 0,5) **4.269.** (−2; 7). **4.270.** (2; 5). **4.271.** (2; 2) **4.272.** (3; 2). **4.273.** (2; 1). **4.274.** (−2; 0). **4.275.** (3; 2). **4.276.** (3; −2). **4.277.** (2; 2). **4.278.** $\left(\frac{1}{4}; \frac{1}{6}\right)$. **4.279.** (2; 1). **4.280.** (4; 1).

§ 14. Логарифмические уравнения и системы уравнений

4.281. 1 **4.282.** 16. **4.283.** 2. **4.284.** 3. **4.285.** 0,5. **4.286.** 0,5. **4.287.** 1,5. **4.288.** 1,2. **4.289.** 0,75. **4.290.** 10. **4.291.** 1. **4.292.** −7. **4.293.** 1. **4.294.** 2. **4.295.** 90. **4.296.** 19. **4.297.** −4. **4.298.** −14. **4.299.** 48. **4.300.** −1. **4.301.** 5. **4.302.** 26. **4.303.** −1. **4.304.** 4. **4.305.** 2,75. **4.306.** 2. **4.307.** 5. **4.308.** −2. **4.309.** 0. **4.310.** −2. **4.311.** 3. **4.312.** −113. **4.313.** 9,8. **4.314.** −0,5. **4.315.** 2. **4.316.** 3. **4.317.** −59. **4.318.** 12. **4.319.** 5. **4.320.** 6. **4.321.** −2,5. **4.322.** 11. **4.323.** 1. **4.324.** 4. **4.325.** 9. **4.326.** −0,5. **4.327.** 6. **4.328.** −31. **4.329.** 1. **4.330.** 15. **4.331.** −3; −1. **4.332.** 0,5; −3. **4.333.** −0,25; 1. **4.334.** 0,2; −2. **4.335.** −1; 2. **4.336.** −2; −1. **4.337.** −3; −2. **4.338.** −1; 0. **4.339.** 0; 2. **4.340.** −3; 3. **4.341.** 1. **4.342.** 5. **4.343.** 2. **4.344.** 3. **4.345.** 6. **4.346.** −1. **4.347.** 2. **4.348.** 3. **4.349.** −1. **4.350.** 2. **4.351.** −4. **4.352.** 3. **4.353.** 21. **4.354.** −3,5. **4.355.** 7;1. **4.356.** −10. **4.357.** 1,75. **4.358.** 8. **4.359.** 28. **4.360.** 15. **4.361.** 6. **4.362.** 3. **4.363.** 2. **4.364.** 2. **4.365.** 2,5. **4.366.** 1. **4.367.** −2. **4.368.** 1,5. **4.369.** 3. **4.370.** 2. **4.371.** 2; 4. **4.372.** 1,5; 10. **4.373.** 5. **4.374.** 3; 9. **4.375.** 2. **4.376.** 5. **4.377.** 6. **4.378.** 1. **4.379.** 4. **4.380.** 3. **4.381.** 6. **4.382.** −0,5. **4.383.** −10. **4.384.** −16; 16. **4.385.** 34. **4.386.** −3. **4.387.** 4. **4.388.** 8. **4.389.** 1. **4.390.** −1. **4.391.** 0,5; 16. **4.392.** 0,1. **4.393.** 100. **4.394.** 0,5; 512. **4.395.** 0,5; 8. **4.396.** 2; 8. **4.397.** 0,001; 10. **4.398.** 0,1; 1000. **4.399.** 0,5; 16. **4.400.** 1000. **4.401.** 3; 9. **4.402.** 0,25; 16. **4.403.** 0,0001; 10. **4.404.** 8. **4.405.** 81. **4.406.** 15. **4.407.** 6. **4.408.** −5. **4.409.** 0,75. **4.410.** 25. **4.411.** 1. **4.412.** 2. **4.413.** 0. **4.414.** 1. **4.415.** 1. **4.416.** 1. **4.417.** 1. **4.418.** 2. **4.419.** 1. **4.420.** 0. **4.421.** 9. **4.422.** 2; 11. **4.423.** 5. **4.424.** 2. **4.425.** 0,25; 8. **4.426.** 0,01. **4.427.** 0,5; 1. **4.428.** 4. **4.429.** 0,25; 4. **4.430.** 4. **4.431.** 1,44; 1,5. **4.432.** 4. **4.433.** 3. **4.434.** 9. **4.435.** 3; 10. **4.436.** 0,25. **4.437.** 2. **4.438.** 9. **4.439.** 1. **4.440.** 4. **4.441.** 1,25; 5. **4.442.** 0,1; 10. **4.443.** −1,75; 2. **4.444.** 0,5; 2. **4.445.** 0,2; 5. **4.446.** 0,5; 2. **4.447.** 0,1; 10. **4.448.** 0,125; 2. **4.449.** 0,125; 0,5. **4.450.** 0,25; 4. **4.451.** 1. **4.452.** 2. **4.453.** 1. **4.454.** 0. **4.455.** 1. **4.456.** 3. **4.457.** 2. **4.458.** 2. **4.459.** 1. **4.460.** 1. **4.461.** 14. **4.462.** 5. **4.463.** 0,2. **4.464.** 6. **4.465.** 4. **4.466.** ∅. **4.467.** 7. **4.468.** 0,04. **4.469.** 6. **4.470.** ∅. **4.471.** ±0,01; ±100. **4.472.** −0,375; 1,5; −2,5;

$-0{,}625$. **4.473.** -99; -63, -19, -17 **4.474.** -126; 124; $-0{,}8$; $-1{,}2$. **4.475.** -783; 675, -55; -53 **4.476.** $-\frac{4}{3}$; 0, $-\frac{5}{6}$, $-\frac{1}{2}$ **4.477.** $-1{,}8$, 0,2; $-0{,}84$; $-0{,}76$. **4.478.** -9; 4,5; -3; $-1{,}5$ **4.479.** $-2{,}5$; $-0{,}5$; $-1{,}25$; $-1{,}75$. **4.480.** $\frac{51}{40}$; $-\frac{49}{40}$, $\frac{3}{40}$; $-\frac{1}{40}$. **4.481.** (1, 3) **4.482.** (2, 8) **4.483.** (0,25; 2). **4.484.** (2; 5). **4.485.** (3, 9) **4.486.** (3; 4) **4.487.** (1; 9). **4.488.** (0,5, 4) **4.489.** (4, 16). **4.490.** (1; 7) **4.491.** $\left(\sqrt[4]{4};\ \sqrt[4]{16}\right)$. **4.492.** $\left(3^6;\ \frac{1}{3}\right)$ **4.493.** (3,2, 0,2) **4.494.** (2; 8) **4.495.** (6; 4). **4.496.** (11; 9). **4.497.** $(8;\ \sqrt{56})$. **4.498.** (16, 1). **4.499.** (4, 4). **4.500.** (100; 0,1), $\left(\frac{1}{\sqrt{10}};\ \frac{1}{1000\sqrt{10}}\right)$. **4.501.** (1, 2) **4.502.** (1; 4) **4.503.** (1, 2). **4.504.** (2; 6) **4.505.** (1; 1) **4.506.** (2; 20). **4.507.** (0; 0). **4.508.** (2; 11) **4.509.** (0,5; 1) **4.510.** (2; 4). **4.511.** (16; 3), $\left(\frac{1}{64}; -2\right)$. **4.512.** (1; 10), ($-1$; 0,1). **4.513.** (3, 1) **4.514.** (1; 27). **4.515.** (1; 0,1), $(-4;\ 10^{6})$. **4.516.** (2; 0,5), (4, 1). **4.517.** $\left(-1;\ \frac{1}{9}\right)$, (2; 3). **4.518.** (8, 1), $\left(\frac{1}{4}; -\frac{3}{2}\right)$. **4.519.** (16; 2). **4.520.** (10; 2)

Раздел V. Неравенства

§ 15. Рациональные неравенства и системы неравенств

5.001. -1. **5.002.** -8. **5.003.** -7. **5.004.** -3. **5.005.** 4. **5.006.** -2. **5.007.** 5. **5.008.** 2. **5.009.** 72. **5.010.** 5. **5.011.** 4; 5; 6. **5.012.** -1. **5.013.** 1; 2. **5.014.** 4. **5.015.** -1; 0; 1; 2. **5.016.** -4, -3 **5.017.** 2. **5.018.** 11, 12; 13. **5.019.** 0. **5.020.** 5; 6. **5.021.** 0. **5.022.** 0; 1. **5.023.** -2, -1; 0. **5.024.** 1. **5.025.** 0; 1; 2; 3. **5.026.** -1; 0. **5.027.** -1. **5.028.** 1; 2 **5.029.** -1; 0 **5.030.** 0; 1; 2. **5.031.** 1, 2; 3. **5.032.** 2; 3; 4. **5.033.** 0; 1. **5.034.** 2; 3. **5.035.** 1. **5.036.** 0; 1; 2. **5.037.** 0; 1; 2. **5.038.** 2. **5.039.** 1; 2. **5.040.** 0; 1. **5.041.** (0; 3). **5.042.** ($-1{,}5$; 2,5). **5.043.** (0; 6) **5.044.** (1, 15). **5.045.** (0; 5). **5.046.** (-1; 25) **5.047.** (0; 12). **5.048.** (2; 26). **5.049.** (0, 16) **5.050.** (-3, 17) **5.051.** $(-\infty, -7) \cup (0, 7)$. **5.052.** $(-\infty; -4) \cup (0; 4)$. **5.053.** $(-\infty; -6) \cup (0; 6)$. **5.054.** $(-\infty; -11) \cup (0, 11)$. **5.055.** $(-\infty; -8) \cup (0, 8)$. **5.056.** $(-\infty; -9) \cup (0; 9)$. **5.057.** $(-\infty; -10) \cup (0; 10)$. **5.058.** $(-\infty; -12) \cup (0; 12.)$ **5.059.** $(-\infty; -2) \cup (0; 2)$. **5.060.** $(-\infty; -3) \cup (0; 3)$. **5.061.** $(-\infty; 0) \cup \left(\frac{15}{8}, 3\right)$ **5.062.** $(-\infty, 0) \cup \left(\frac{20}{7}, 5\right)$. **5.063.** $(-\infty; 0) \cup \left(\frac{21}{4}; 7\right)$. **5.064.** $(-\infty; 0) \cup \left(\frac{12}{7}; 6\right)$. **5.065.** $(-\infty; 0) \cup \left(\frac{18}{5}; 6\right)$. **5.066.** $(-\infty; 0) \cup \left(\frac{6}{5}; 4\right)$. **5.067.** $(-\infty; 0) \cup (5; 9)$. **5.068.** $(-\infty; 0) \cup \left(\frac{70}{9}; 10\right)$ **5.069.** $(-\infty, 0) \cup \left(\frac{10}{11}; 2\right)$. **5.070.** $(-\infty; 0) \cup \left(\frac{25}{9}; 5\right)$. **5.071.** $(-4; -2) \cup (0; 1)$. **5.072.** $(-2; 0) \cup (1, 3)$. **5.073.** $(-2; -1) \cup (1; 3)$.

5.074. $(-5; -1) \cup (0,5; 1)$. **5.075.** $(-4; -1) \cup (1; 2)$. **5.076.** $(-3; -1) \cup (1; 2)$ **5.077.** $(-3; -1) \cup (1; 4)$. **5.078.** $(-2; -1) \cup (1; 5)$. **5.079.** $(-4; -1) \cup (2; 2,5)$. **5.080.** $(-8; -7) \cup (1; 3)$. **5.081.** $[-4; -3) \cup (-1; 1)$. **5.082.** $[-2; 1) \cup (2; 3]$. **5.083.** $[-3; -1) \cup [1; 2)$. **5.084.** $[-3; -2) \cup (-1; 2]$. **5.085.** $[-6; -5] \cup (3; 5)$. **5.086.** $[-4; -1] \cup \cup (5; 6)$. **5.087.** $[-2; -1] \cup (1; 3)$. **5.088.** $(3; 5) \cup [6; 7]$. **5.089.** $[-5; -4] \cup (-1; 2)$. **5.090.** $(-4; -3) \cup [5; 7]$. **5.091.** $(-1; 4)$. **5.092.** $(-4; 1)$. **5.093.** $(0; 2)$. **5.094.** $(-3; 4)$. **5.095.** $(-3; 2)$. **5.096.** $(-4; 2)$. **5.097.** $(-6; 2)$. **5.098.** $(-1; 4)$. **5.099.** $(-4; 1)$. **5.100.** $(-1; 3)$. **5.101.** -30. **5.102.** -4. **5.103.** -6. **5.104.** -5. **5.106.** 6,5. **5.107.** -30. **5.108.** -1. **5.109.** -49. **5.110.** -54. **5.111.** $(0; 2)$. **5.112.** $(1; 4)$. **5.113.** $(0; 5)$. **5.114.** $(0; 2)$. **5.115.** $(0; 6)$. **5.116.** $(0; 7)$. **5.117.** $(0; 8)$. **5.118.** $(0; 2)$. **5.119.** $(1; 5)$. **5.120.** $(0; 9)$.

§ 16. Неравенства, содержащие неизвестные под знаком абсолютной величины

5.121. $(-2,5; 3,5)$. **5.122.** $(2; 4)$ **5.123.** $(1; 4)$. **5.124.** $(8; 12)$ **5.125.** $(-1,25; 2,25)$ **5.126.** $(0; 0,4)$. **5.127.** $(-9; -5)$. **5.128.** $(-0,5; 3,5)$ **5.129.** $(-4,5; 0,5)$. **5.130.** $(-0,5; 1,5)$. **5.131.** 0. **5.132.** 0. **5.133.** -1. **5.134.** -1. **5.135.** 2. **5.136.** 1. **5.137.** 11. **5.138.** 2 **5.139.** 7. **5.140.** 4. **5.141.** 0. **5.142.** 4. **5.143.** -1. **5.144.** -2. **5.145.** 4. **5.146.** 2. **5.147.** 2 **5.148.** 1. **5.149.** 3. **5.150.** 0. **5.151.** $[-1; 1]$. **5.152.** $(2; 4)$. **5.153.** $(-1; 3)$. **5.154.** $(-3; 3)$ **5.155.** $(-5; 1)$. **5.156.** $(-3; 1)$. **5.157.** $(-5; -1)$. **5.158.** $[-1; 0]$. **5.159.** $(-2; -1)$. **5.160.** $(-3; -1)$.

§ 17. Иррациональные неравенства

5.161. 5. **5.162.** 1. **5.163.** 2. **5.164.** 18. **5.165.** 67. **5.166.** 2. **5.167.** 1. **5.168.** -4. **5.169.** 5 **5.170.** -3 **5.171.** $[-2; -0,875)$. **5.172.** $[0,5; 1,5)$. **5.173.** $[-1,5; 0,5)$. **5.174.** $[2; 5)$. **5.175.** $[3; 7)$. **5.176.** $[2; 2,5)$. **5.177.** $[0,25; 2,5)$. **5.178.** $[-5; 15)$. **5.179.** $[-2; -1,75)$. **5.180.** $[-1; 0)$. **5.181.** $(-2; 14]$. **5.182.** $[1; 10)$. **5.183.** $(-8; 4,8]$. **5.184.** $(4; 5)$. **5.185.** $[-6; 3)$. **5.186.** $[0,5; 5)$. **5.187.** $[-78; 3)$. **5.188.** $[-61; 3)$. **5.189.** $[-1; 3)$. **5.190.** $[-48; 16)$.

§ 18. Показательные неравенства

5.191. 0 **5.192.** 4 **5.193.** -2. **5.194.** 2 **5.195.** 1 **5.196.** -1 **5.197.** -3 **5.198.** -5 **5.199.** -1 **5.200.** 3. **5.201.** 0. **5.202.** 5. **5.203.** -4. **5.204.** 1 **5.205.** -3. **5.206.** 7 **5.207.** 2. **5.208.** -2. **5.209.** -1. **5.210.** 1. **5.211.** -1. **5.212.** 6. **5.213.** -4. **5.214.** 4. **5.215.** 2

5.216. −3. **5.217.** 1. **5.218.** −2. **5.219.** 0. **5.220.** −2. **5.221.** 3. **5.222.** 3. **5.223.** 1 **5.224.** 2. **5.225.** 0. **5.226.** 4. **5.227.** 3. **5.228.** 2. **5.229.** −1. **5.230.** 1. **5.231.** (0; 1) **5.232.** (−1; 0). **5.233.** (−1; 0). **5.234.** (1; 3). **5.235.** [0; 2]. **5.236.** [−1; 0]. **5.237.** [2; 3] **5.238.** (−2; −1). **5.239.** (0; 3). **5.240.** [1; 2]. **5.241.** (0; 1). **5.242.** (0; 1). **5.243.** (0; 2). **5.244.** (0; 0,5) **5.245.** (−1; 0). **5.246.** (−2; 1). **5.247.** (−3; 1). **5.248.** (−1; 1). **5.249.** (−1; 0). **5.250.** (0; 0,25). **5.251.** (−1; 7). **5.252.** (−8; 4). **5.253.** (0; 4). **5.254.** (0; 0,5). **5.255.** (0,5; 1). **5.256.** (−0,4; 1,2). **5.257.** (−1; 4). **5.258.** (0,5; 1). **5.259.** (−6; −1). **5.260.** (−4; 8). **5.261.** (−2; −0,4). **5.262.** (1; 4). **5.263.** (0,5; 2). **5.264.** (0; 0,4). **5.265.** (1; 1,5). **5.266.** (0; 0,5). **5.267.** (−5; −2). **5.268.** (0,8; 1). **5.269.** (−0,5; −0,4). **5.270.** (−4; 2). **5.271.** [0; 5). **5.272.** (0; 0,04). **5.273.** [1; 2). **5.274.** [3; 8). **5.275.** (0; 9). **5.276.** [1; 5). **5.277.** (0; 7). **5.278.** [2; 4). **5.279.** [1; 9). **5.280.** (0; 16). **5.281.** [0; 1) **5.282.** [1; 2). **5.283.** [2; 3). **5.284.** [−1; 8). **5.285.** [3; 7). **5.286.** [0; 1). **5.287.** [−2; 2). **5.288.** (−0,25; 0,5). **5.289.** (2,5; 5,5). **5.290.** [0,5; 1). **5.291.** (0,5; 1,5). **5.292.** (2; 3). **5.293.** (0,2; 0,8). **5.294.** [2; 3). **5.295.** [4; 5). **5.296.** (0,5; 2). **5.297.** (1; 2). **5.298.** (0; 3). **5.299.** (−2; 4). **5.300.** (3; 4). **5.301.** [0; 2]. **5.302.** [0; 3]. **5.303.** [0; 2]. **5.304.** [0; 9]. **5.305.** [0; 6]. **5.306.** [0; 1]. **5.307.** [0; 0,5]. **5.308.** [0; 4]. **5.309.** [0; 1]. **5.310.** [0; 2).

§ 19. Логарифмические неравенства

5.311. −5. **5.312.** 6. **5.313.** 2. **5.314.** −2. **5.315.** 8 **5.316.** 3. **5.317.** 21. **5.318.** −3. **5.319.** 7. **5.320.** −7. **5.321.** 6. **5.322.** 7. **5.323.** −2. **5.324.** 0. **5.325.** −4. **5.326.** 4. **5.327.** 3. **5.328.** 8. **5.329.** 5. **5.330.** 1. **5.331.** 1; 2. **5.332.** −1; 0; 1. **5.333.** −5; −4. **5.334.** 9; 10. **5.335.** −1; 0. **5.336.** 0; 1; 2. **5.337.** 7; 8; 9. **5.338.** −3; −2. **5.339.** 1; 2; 3; 4. **5.340.** 13; 14. **5.341.** (5; 30). **5.342.** (−3; 0). **5.343.** (3; 3,125). **5.344.** (5; 32). **5.345.** (−3; 1). **5.446.** (2; 5). **5.347.** (5; 9). **5.348.** (−20; 7). **5.349.** (−13; 12). **5.350.** (7; 11). **5.351.** 1. **5.352.** −4. **5.353.** 0. **5.354.** −1. **5.355.** 7. **5.356.** 1. **5.357.** 8. **5.358.** 14. **5.359.** 6. **5.360.** 4. **5.361.** (−3; 3). **5.362.** (1; 2). **5.363.** (−2; 2). **5.364.** (−1; 1). **5.365.** (1; 4). **5.366.** (1; 3). **5.367.** (−1; 1). **5.368.** (1; 3). **5.369.** (0,5; 1). **5.370.** (0,5; 1). **5.371.** (4; 7). **5.372.** (7; 11). **5.373.** (−7; −4). **5.374.** (−1; 10). **5.375.** (−5; 2). **5.376.** (1; 3). **5.377.** (−2; 1). **5.378.** (−5; −3). **5.379.** (1; 3). **5.380.** (4; 7). **5.381.** (2; 4). **5.382.** (6; 7). **5.383.** (3; 6). **5.384.** (0; 1). **5.385.** (−2; 5). **5.386.** (5; 7). **5.387.** (−2; −1,5). **5.388.** (2; 2,25). **5.389.** (1; 1,5). **5.390.** (−1; −0,5). **5.391.** (1; 5). **5.392.** (−1; 3). **5.393.** (−2; 8). **5.394.** (0; 3).

5.395. (2; 7). **5.396.** (3; 5). **5.397.** (1; 3). **5.398.** (4; 6). **5.399.** (−1; 2). **5.400.** (−2; 0). **5.401.** (1,5; 2). **5.402.** (1,3; 2,3). **5.403.** (−4; −3). **5.404.** (2,5; 3). **5.405.** (−1; −0,5) **5.406.** (−4, −2). **5.407.** (3; 6). **5.408.** (1,25; 1,5). **5.409.** (2,5; 3,5) **5.410.** (−2; 0). **5.411.** (2; 3). **5.412.** (0; 1). **5.413.** (−1; 0). **5.414.** (−1; −0,5). **5.415.** (0; 1). **5.416.** (0,25; 0,625). **5.417.** (−0,2; −0,1). **5.418.** (0; 0,5). **5.419.** (1; 2). **5.420.** (3,5; 4). **5.421.** [0,1; 1). **5.422.** (−0,2; 0). **5.423.** (0,25; 1). **5.424.** (−10; −1). **5.425.** (0,1; 1). **5.426.** (1; 2). **5.427.** (2; 11). **5.428.** (0,1; 1). **5.429.** (0,2; 1). **5.430.** [0,1; 1). **5.431.** (0; 40) **5.432.** (0; 0,75]. **5.433.** (0; 5]. **5.434.** $\left(0; \frac{1}{2\left(\sqrt[3]{2}\right)}\right)$. **5.435.** (0; 5). **5.436.** $\left(0, \frac{1}{16}\right)$. **5.437.** (0; 100). **5.438.** (0; 4). **5.439.** (0; 400). **5.440.** (0; 3). **5.441.** (1; 4). **5.442.** (1; 2). **5.443.** (1; 3]. **5.444.** (0; 1). **5.445.** (0,5; 1). **5.446.** (1; 5]. **5.447.** (1; 2,5). **5.448.** (1; 10]. **5.449.** (0; 1) ∪ [1,5; +∞). **5.450.** (0,6; 1).

Раздел VI. Прогрессии

§ 20. Арифметическая прогрессия

6.001. 4. **6.002.** 0,5. **6.003.** 1,5. **6.004.** 26. **6.005.** 7. **6.006.** 16,6. **6.007.** 8. **6.008.** 14,8. **6.009.** 0,6. **6.010.** 20. **6.011.** 13. **6.012.** 14. **6.013.** 17. **6.014.** 6. **6.015.** 21. **6.016.** 66. **6.017.** 9. **6.018.** 25. **6.019.** 40. **6.020.** 34. **6.021.** 136,5. **6.022.** 62,5. **6.023.** 8. **6.024.** 10,2. **6.025.** 45. **6.026.** 0,4. **6.027.** 1. **6.028.** 5,2. **6.029.** 64. **6.030.** 2,4. **6.031.** 2144. **6.032.** 345. **6.033.** 204. **6.034.** −1200. **6.035.** 438,5. **6.036.** −148,5. **6.037.** −300. **6.038.** 119,25. **6.039.** −79 **6.040.** 1408. **6.041.** 1. **6.042.** 1,25. **6.043.** 7,5. **6.044.** 45. **6.045.** 2. **6.046.** 14. **6.047.** 8,5. **6.048.** 2,5. **6.049.** 9. **6.050.** 8,5. **6.051.** 7,4; 37; 66,6. **6.052.** 17; 29; 41. **6.053.** 9; 16; 23. **6.054.** 44; 88; 132. **6.055.** 60; 54; 48. **6.056.** 23; 35; 47. **6.057.** −13; −26; −39. **6.058.** 38; 133; 228. **6.059.** 57; 84; 111. **6.060.** 84; 63; 42. **6.061.** 640,5. **6.062.** 1331. **6.063.** 60,8. **6.064.** −1033,2. **6.065.** −299,6. **6.066.** 508,5. **6.067.** −189. **6.068.** −120. **6.069.** 497. **6.070.** −201,5 **6.071.** −832. **6.072.** 393,75. **6.073.** 288. **6.074.** 60,5. **6.075.** 250,5. **6.076.** 420. **6.077.** 316,2. **6.078.** 12 467. **6.079.** 416. **6.080.** 490. **6.081.** 98 730. **6.082.** 1566. **6.083.** 45 045. **6.084.** 1635. **6.085.** 5538. **6.086.** 8190. **6.087.** 1265. **6.088.** 700 **6.089.** 41 400. **6.090.** 981. **6.091.** 2. **6.092.** 4. **6.093.** 0,5. **6.094.** 3. **6.095.** 1,5. **6.096.** −2. **6.097.** 0,5. **6.098.** −2. **6.099.** −0,5. **6.100.** 2.

§ 21. Геометрическая прогрессия

6.101. 1 **6.102.** 512. **6.103.** 1. **6.104.** 2. **6.105.** -21 **6.106.** $-0{,}0625$. **6.107.** 0,02 **6.108.** 1. **6.109.** 32,125. **6.110.** 2 **6.111.** 12. **6.112.** 8. **6.113.** 15,5 **6.114.** 124. **6.115.** 2540 **6.116.** $-12{,}5$. **6.117.** 10,23 **6.118.** 0,4. **6.119.** 787,5. **6.120.** -63. **6.121.** 16 **6.122.** 15,75 **6.123.** $\frac{8}{3}$. **6.124.** 40,5. **6.125.** $-\frac{32}{27}$. **6.126.** $\frac{7}{8}$. **6.127.** 10. **6.128.** 0,09 **6.129.** $-\frac{5}{3}$. **6.130.** 0,0064. **6.131.** 3; 192. **6.132.** 6; 12. **6.133.** 8; 27. **6.134.** -1; 1. **6.135.** 3. **6.136.** $-0{,}5$; 1,5. **6.137.** 0,2; 5. **6.138.** 1; 9. **6.139.** 4; 27. **6.140.** 2; 18. **6.141.** 3, 243. **6.142.** 5; 3125. **6.143.** 12; 972. **6.144.** 18; 288. **6.145.** 50; 800. **6.146.** 2; 32. **6.147.** 8, 128. **6.148.** 4; 1024. **6.149.** 27; 2187. **6.150.** 32; 512.

Раздел VII. Начала анализа

§ 22. Общие свойства функций

7.001. $[-3; 3]$. **7.002.** $\varnothing$. **7.003.** $(1; +\infty)$ **7.004.** $(-\infty; -1] \cup [2; +\infty)$. **7.005.** $(-\infty; -1) \cup$ $\cup\ (-1; 0) \cup (0; 1) \cup (1; +\infty)$. **7.006.** $[0; 2]$. **7.007.** $(-\infty; -1) \cup (-1; 1) \cup (1; +\infty)$ **7.008.** $(-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$. **7.009.** $[0; +\infty)$. **7.010.** $(-\infty; 1)$. **7.011.** 15. **7.012.** -6. **7.013.** 17. **7.014.** 15. **7.015.** 25. **7.016.** 9. **7.017.** -8. **7.018.** 6. **7.019.** 3. **7.020.** -10. **7.021.** -5. **7.022.** 4; 5. **7.023.** -2; -1. **7.024.** 6; 7; 8. **7.025.** 8; 9; 10. **7.026.** 8; 9. **7.027.** -1; 0. **7.028.** 2; 3. **7.029.** -1; 0; 1. **7.030.** 4; 5. **7.031.** 630°. **7.032.** 900°. **7.033.** 810° **7.034.** 135°. **7.035.** 144°. **7.036.** 1080°. **7.037.** 270°. **7.038.** 450°. **7.039.** 540°. **7.040.** 900°. **7.041.** 3). **7.042.** 1); 3). **7.043.** 3). **7.044.** 2); 3). **7.045.** 1); 2). **7.046.** 1) **7.047.** 1); 3). **7.048.** 2); 3). **7.049.** 2); 3). **7.050.** 3). **7.051.** Четная. **7.052.** Четная. **7.053.** Общего вида **7.054.** Нечетная. **7.055.** Общего вида. **7.056.** Общего вида. **7.057.** Общего вида. **7.058.** Четная. **7.059.** Общего вида. **7.060.** Четная. **7.061.** Общего вида. **7.062.** Нечетная. **7.063.** Нечетная. **7.064.** Общего вида. **7.065.** Нечетная. **7.066.** Нечетная. **7.067.** Нечетная. **7.068.** Общего вида. **7.069.** Нечетная. **7.070.** Четная. **7.071.** 1). **7.072.** 1); 3). **7.073.** 3). **7.074.** 1); 2). **7.075.** 3). **7.076.** 2); 3). **7.077.** 1). **7.078.** 1) **7.079.** 2). **7.080.** 2); 3). **7.081.** 3). **7.082.** 1). **7.083.** 2), 3). **7.084.** 2). **7.085.** 2); 3). **7.086.** 1). **7.087.** 2); 3). **7.088.** 1). **7.089.** 1); 3) **7.090.** 2) **7.091.** 3). **7.092.** 1); 2). **7.093.** 3). **7.094.** 1) **7.095.** 3). **7.096.** 1); 2). **7.097.** 2) **7.098.** 2). **7.099.** 1). **7.100.** 2). **7.101.** 1) **7.102.** 1). **7.103.** 2) **7.104.** 3). **7.105.** 2)

7.106. 1); 2). **7.107.** 1); 2) **7.108.** 1) **7.109.** 1), 3). **7.110.** 2). **7.111.** $\frac{3}{2x-9}; -\frac{3}{7}$. **7.112.** $-\frac{3}{2}; \frac{1}{2}$ **7.113.** $1-x$; -2 **7.114.** $\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$; 2 **7.115.** $\frac{x+1}{x-1}$; 3. **7.116.** $x-2$; 0. **7.117.** $-\frac{4}{x}$; 2. **7.118.** $\frac{2x-4}{2x-5}$; $\frac{6}{7}$ **7.119.** $\frac{1-2x}{6x}$, 0. **7.120.** $\frac{1}{2x}+\frac{9}{2}$; 1,6

§ 23. Элементы дифференциального исчисления

7.121. 6,0625 **7.122.** -3. **7.123.** 8. **7.124.** 2. **7.125.** -18. **7.126.** -1. **7.127.** -5. **7.128.** 5,1 **7.129.** 0,75 **7.130.** 0,5. **7.121'.** $y' = 6x^2 - 6x + 0,5$. **7.122'.** $y' = 2\sqrt{2}\,x - \frac{1}{\ln 2} + 16x^3$ **7.123'.** $y' = -5 - \frac{3}{\sqrt{7}}x^2 + 2e^2x$. **7.124'.** $y' = x^{e} + \sqrt[3]{3} - 2 \cdot 3^3x$. **7.125'.** $y' = 2a^2x + 3$ **7.126'.** $y' = \frac{1}{t} - 16x^3 + 2c^3x$ **7.127'.** $y' = \sqrt{a} + 5x^4\ln b$. **7.128'.** $y' = 2a^{\frac{2}{3}}x - \pi$ **7.129'.** $y' = t - \sqrt{a^2+b^2}$ **7.130'.** $y' = \sqrt{2}\,z + \ln\frac{2}{3}$. **7.131.** -3. **7.132.** 5 **7.133.** -3

7.134. 0,75 **7.135.** 4 **7.136.** 0,5. **7.137.** 2. **7.138.** 1. **7.139.** $-0,03$. **7.140.** 2

7.131'. $y' = \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{4}{x^2}$. **7.132'.** $y' = -\frac{10}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{x^5}} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{\sqrt[5]{x^4}}$. **7.133'.** $y' = -\frac{2\pi}{x^3} + \frac{5}{4} \cdot \sqrt[4]{x}$.

7.134'. $y' = 3\sqrt{x} + \frac{9}{x^4}$. **7.135'.** $y' = \frac{5}{2}x\sqrt{x} - \frac{2}{\sqrt{x}} + \frac{1}{a}$. **7.136'.** $y' = -\frac{2}{x^2} + \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

7.137'. $y' = -\frac{10}{x^3} - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{\sqrt[4]{x^3}}$. **7.138'.** $y' = \frac{5}{\sqrt{x}} - \frac{1}{x^2} + \frac{3c}{x^4}$. **7.139'.** $y' = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{\sqrt[6]{x^5}} + \frac{b}{x^2} + 8b$

7.140'. $y' = 2\pi - \frac{a}{bx^2}$. **7.141'.** $y' = e^{x^2} \cdot 2x$. **7.142'.** $y' = 101 \cdot (5-2x)^{100} \cdot (-2)$.

7.143'. $y' = \cos(1-x^3) \cdot (-3x^2)$ **7.144'.** $y' = 2\operatorname{tg}(\sqrt{x}) \cdot \frac{1}{\cos^2(\sqrt{x})} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

7.145'. $y' = -\sin(e^x) \cdot e^x$. **7.146'.** $y' = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{\operatorname{tg}^2 3x}} \cdot \frac{1}{\cos^2 3x} \cdot 3$.

7.147'. $y' = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{(x^2+2x-1)^3}} \cdot (2x+2)$ **7.148'.** $y' = 2\ln(1-x) \cdot \frac{1}{1-x} \cdot (-1)$.

7.149'. $y' = -\frac{2}{\ln^3(\sin x)} \cdot \frac{1}{\sin x} \cdot \cos x$. **7.150'.** $y' = 2^{\sin x} \cdot \ln 2 \cdot \sin x$ **7.151'.** $y = 4$.

7.152'. $y = \frac{1}{2} + \sqrt{3} \cdot x$. **7.153'.** $y = \frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{2}+1}{2}$. **7.154'.** $y = 20x - 35$. **7.155'.** $y = -\frac{1}{e}$.
7.156'. $y = 3x + 1$. **7.157'.** $y = -2\sqrt{\pi} \cdot x + 2\pi$. **7.158'.** $y = 1 - 6x$. **7.159'.** $y = -x - 4$.
7.160'. $y = \frac{1}{3}x - 1$ **7.141.** -2; 2. **7.142.** -1; 7 **7.143.** 0,25. **7.144.** $-7,75$. **7.145.** $-1,6$. **7.146.** 3,2; 4,8. **7.147.** -2; 2 **7.148.** -1; 1 **7.149.** 2; 4 **7.150.** 3. **7.151.** 0. **7.152.** 1 **7.153.** 4 **7.154.** 2 **7.155.** 1,5 **7.156.** 0,25 **7.157.** 42. **7.158.** 104. **7.159.** 2 **7.160.** 3. **7.161.** $-1,5$, 1,5. **7.162.** 2 **7.163.** $-6,5$; 0,5. **7.164.** $-0,2$; 2,2 **7.165.** 0,5. **7.166.** 1,4 **7.167.** 1,5 **7.168.** $-0,5$; 0,5. **7.169.** -3; 3 **7.170.** 0,5 **7.171.** $(-1; 0)$ **7.172.** $(0; 2)$. **7.173.** $(1; 3)$. **7.174.** $(-1; 1)$. **7.175.** $(-2, 2)$. **7.176.** $(-2; 1)$ **7.177.** $(-3; 1)$ **7.178.** $(-1; 2)$ **7.179.** $(-5; 0)$. **7.180** $(-3; 0,5)$ **7.181.** 0, 1,5 **7.182.** 0; 135. **7.183.** 1; 2,125. **7.184.** -1, 8 **7.185.** -112; 0. **7.186.** 3,2; 8,4. **7.187.** -16; 11 **7.188.** $-1,375$; 0. **7.189.** 0, 5,5 **7.190.** -4; 0. **7.191.** $-1,5$; -1; 1,5 **7.192.** $-2,5$; 0; 2,5. **7.193.** -1; 0,5; 1. **7.194.** -2. 0,2 **7.195.** $-2,5$. 1, 2,5. **7.196.** $-0,25$; 0; 0,25. **7.197.** 1; 2; 3. **7.198.** -4; -1; 4.

7.199. −1,75; 0; 1,75. **7.200.** −3; −2; 3. **7.201.** 14; 14. **7.202.** 0,25. **7.203.** 7; 7. **7.204.** 23; 23. **7.205.** 2. **7.206.** 4; 4. **7.207.** 0,5. **7.208.** 45; 45. **7.209.** 0,25. **7.210.** −1. 7. **7.211.** 80. **7.212.** 16. **7.213.** 40. **7.214.** 24. **7.215.** $\frac{5}{\sqrt{\pi+4}}$. **7.216.** 1. **7.217.** 2 **7.218.** 0,5. **7.219.** 8. **7.220.** 32.

§ 24. Элементы интегрального исчисления

7.171'. $-\frac{2}{\sqrt{x}}+C$. **7.172'.** $-\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt[4]{x^3}}+C$. **7.173'.** $\frac{6}{17}x^2\cdot\sqrt[6]{x^5}+C$.

7.174'. $-\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{x^5}+C$. **7.175'.** $-\frac{3}{\sqrt[3]{x}}+C$. **7.176'.** $6\cdot\sqrt[6]{x}+C$. **7.177'.** $\frac{2}{5}x^2\cdot\sqrt{x}+C$.

7.178'. $\frac{6}{13}x^2\cdot\sqrt[6]{x}+C$. **7.179'.** $\frac{5}{34}x^6\sqrt[5]{x^4}+C$. **7.180'.** $\frac{3}{7}x^2\sqrt[3]{x}+C$.

7.181'. $\frac{x^2}{2}+2x+\frac{5}{x}+C$. **7.182'.** $3e^x-2\sin x+C$. **7.183'.** $\ln|x|-\frac{x^3}{3}+\pi x+C$.

7.184'. $-\frac{3}{x}-\ln|x|+x+C$. **7.185'.** $\mathrm{tg}x+\frac{8}{3}x\sqrt{x}+C$. **7.186'.** $3\cdot\sqrt[3]{x^2}+\pi\,\mathrm{ctg}\,x+C$.

7.187'. $\frac{x^3}{3}+\ln|x|-2e^x+C$. **7.188'.** $\frac{2}{5}x^2\sqrt{x}+\frac{4}{3}x\sqrt{x}+2\sqrt{x}+C$.

7.189'. $-2\cos x-\sin x+\sqrt{2}\cdot x+C$. **7.190'.** $\frac{x^3}{3}-\cos x+\frac{5}{6}x\sqrt[5]{x}+C$.

7.191'. $-\frac{\cos 2x}{2}+C$. **7.192'.** $-e^{-x}+C$. **7.193'.** $-\frac{\sin(1-3x)}{3}+C$. **7.194'.** $\frac{\mathrm{tg}\,2x}{2}+C$.

7.195'. $\frac{\mathrm{arctg}\,2x}{2}+C$ **7.196'.** $3\arcsin\frac{x}{3}+C$. **7.197'.** $\frac{\ln|2x+5|}{2}+C$. **7.198'.** $\frac{(3x-1)^{101}}{303}+C$.

7.199'. $-\frac{1}{20(5x+2)^4}+C$. **7.200'.** $-\frac{1}{6}(1-4x)^{\frac{3}{2}}+C$. **7.201'.** $\frac{3}{4}\left(3\cdot\sqrt[3]{3}-1\right)$. **7.202'.** 1.

7.203'. $\frac{10}{3}$. **7.204'.** $2+\pi$. **7.205'.** 1. **7.206'.** 1. **7.207'.** 1. **7.208'.** $\frac{\pi}{2}$. **7.209'.** $\frac{\pi}{6}$.

7.210'. $\frac{1}{5}$. **7.211'.** $\frac{1}{2}\ln 2$. **7.212'.** $\frac{1}{6}$. **7.213'.** $\frac{1}{2}$. **7.214'.** $\frac{1}{\sqrt{e}}-\frac{1}{e}$. **7.215'.** $\frac{\ln 2}{2}$.

7.216'. $\frac{\pi}{8}$. **7.217'.** $2-\ln 3$. **7.218'.** $-\frac{\ln 5}{4}$. **7.219'.** $\frac{(e^4-1)}{2}$. **7.220'.** $\sqrt{10}-1$.

7.221'. $57\frac{1}{6}$. **7.222'.** $\frac{4}{3}$. **7.223'.** $\frac{4}{3}$. **7.224'.** $\frac{8}{3}$. **7.225'.** 42. **7.226'.** $\frac{2}{3}$.

7.227'. $9\frac{1}{3}$. **7.228'.** $\frac{1}{24}$. **7.229'.** $1\frac{5}{27}$ **7.230'.** $\frac{23}{48}$. **7.231'.** $\frac{32}{3}$. **7.232'.** 9.

7.233'. $\frac{8}{3}$ **7.234'.** $\frac{1}{6}$. **7.235'.** $\frac{1}{3}$. **7.236'.** $\ln 2$. **7.237'.** 4. **7.238'.** $1{,}5-\ln 2$.

7.239'. $e-1$. **7.240'.** $\frac{8}{3}-\ln 2$.

Раздел VIII. Тригонометрия

§ 25. Тригонометрические преобразования

8.001. $2\sin\frac{19}{12}\alpha\cos\frac{\alpha}{12}$. **8.002.** $2\sin^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{3}\right)$. **8.003.** $\frac{\sin\frac{2\alpha}{3}}{\cos\left(\frac{\alpha}{3}+\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{\alpha}{3}-\frac{\pi}{4}\right)}$. **8.004.** $2\sin 6\alpha\cos 2\alpha$. **8.005.** $2\sin\frac{13\alpha}{56}\cos\frac{29\alpha}{56}$. **8.006.** $2\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-3\alpha\right)$. **8.007.** $-2\sin\frac{\alpha}{3}\sin\frac{\alpha}{24}$. **8.008.** $2\sin\frac{5\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}$. **8.009.** $2\cos\frac{11\alpha}{20}\cos\frac{17\alpha}{60}$. **8.010.** $-\frac{2}{\cos 2\alpha}$. **8.011.**

$2\cos^2 8\alpha\cos 2\alpha$. **8.012.** $4\cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{3\alpha}{2}\sin 3\alpha$. **8.013.** $-\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{11\alpha}{2}$. **8.014.** $2\sin^2 8\alpha\cos 2\alpha$. **8.015.** $-4\sin^2\alpha\sin 3\alpha$. **8.016.** $\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{9\alpha}{2}$. **8.017.** $-2\sin 2\alpha\cos 3\alpha\cos 4\alpha$. **8.018.** $-4\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{3\alpha}{2}\sin 4\alpha$. **8.019.** $\cos\alpha\sin 7\alpha$. **8.020.** $4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{3\alpha}{2}\cos 6\alpha$. **8.021.** $4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\alpha\sin\frac{3\alpha}{2}$. **8.022.** $2\sqrt{2}\cos\alpha\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)$. **8.023.** $4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\sin\frac{\alpha+\beta}{2}$. **8.024.** $4\sin 2\alpha\sin^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)$. **8.025.** $2\sqrt{2}\sin\frac{\alpha}{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)$. **8.026.** $4\cos\alpha\sin\left(\frac{\pi}{8}+\frac{\alpha}{2}\right)\times$ $\times\sin\left(\frac{\pi}{8}-\frac{\alpha}{2}\right)$. **8.027.** $4\cos 2\alpha\cos 3\alpha\sin\alpha$. **8.028.** $4\sin 2\alpha\sin^2\left(\frac{\pi}{4}+2\alpha\right)$. **8.029.** $2\sqrt{2}\cos\alpha\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)$. **8.030.** $4\sin 3\alpha\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)$. **8.051.** 3. **8.052.** −1,75. **8.053.** −0,25. **8.054.** 1,25. **8.055.** −1. **8.056.** 2,5. **8.057.** 1,75. **8.058.** −0,25. **8.059.** −2,25. **8.060.** 3,5. **8.061.** 3. **8.062.** 1. **8.063.** 2. **8.064.** −1. **8.065.** −1. **8.066.** 1. **8.067.** −1. **8.068.** 2. **8.069.** 0,125. **8.070.** 2. **8.071.** 0,5. **8.072.** −2. **8.073.** −1. **8.074.** 2. **8.075.** 1. **8.076.** 0,5. **8.077.** 2,5. **8.078.** 0,25. **8.079.** 3. **8.080.** 0,5. **8.081.** 0,25. **8.082.** 1. **8.083.** 2. **8.084.** −1. **8.085.** 4. **8.086.** 1. **8.087.** 6. **8.088.** −0,5. **8.089.** 4. **8.090.** 2. **8.091.** 10. **8.092.** 3. **8.093.** 0,4. **8.094.** −1. **8.095.** 2. **8.096.** 0,5. **8.097.** 0,2. **8.098.** −0,5. **8.099.** −2. **8.100.** 2. **8.101.** 0,2. **8.102.** 1. **8.103.** 0,25. **8.104.** 2. **8.105.** 2. **8.106.** 0,5. **8.107.** 0,5. **8.108.** 0,5. **8.109.** 0. **8.110.** 0,75. **8.111.** 1. **8.112.** 2. **8.113.** 1,5. **8.114.** −2. **8.115.** 3. **8.116.** 0,5. **8.117.** −2. **8.118.** −1. **8.119.** 2. **8.120.** −1. **8.121.** −2. **8.122.** 4,5. **8.123.** −0,5. **8.124.** 3,5. **8.125.** 1. **8.126.** −1,5. **8.127.** −0,4. **8.128.** −2,5. **8.129.** −2. **8.130.** 3,5. **8.131.** −15. **8.132.** −18. **8.133.** 6. **8.134.** 14. **8.135.** 19. **8.136.** 5. **8.137.** 8. **8.138.** −19. **8.139.** −6. **8.140.** −9. **8.141.** 0,2. **8.142.** 4. **8.143.** 0,25. **8.144.** 3. **8.145.** 0,1. **8.146.** 7. **8.147.** 0,25. **8.148.** 3. **8.149.** 0,1. **8.150.** 7. **8.151.** 4. **8.152.** 2. **8.153.** −4. **8.154.** −1. **8.155.** 2. **8.156.** −1. **8.157.** 1. **8.158.** −8. **8.159.** −2. **8.160.** 0,5. **8.161.** −1. **8.162.** 11. **8.163.** 2. **8.164.** 10. **8.165.** 7. **8.166.** 13. **8.167.** 11. **8.168.** −9. **8.169.** −2. **8.170.** 13. **8.171.** $-\frac{\sqrt{3}}{2}$. **8.172.** $-\frac{1}{2}$. **8.173.** 1. **8.174.** $-\frac{2\sqrt{5}}{5}$. **8.175.** −1. **8.176.** $-\frac{\sqrt{3}}{2}$. **8.177.** $-\frac{2\sqrt{5}}{5}$. **8.178.** $-\frac{\sqrt{5}}{5}$. **8.179.** $\sqrt{3}$. **8.180.** $-\frac{2\sqrt{5}}{5}$. **8.181.** 1,2. **8.182.** 8,5. **8.183.** 2,3. **8.184.** −20. **8.185.** −0,55. **8.186.** 2,15. **8.187.** 2,1. **8.188.** 0,4. **8.189.** −0,24. **8.190.** −10. **8.191.** 0,75. **8.192.** 0,125. **8.193.** 0,5. **8.194.** 0,4. **8.195.** −0,25. **8.196.** 0,62. **8.197.** 1. **8.198.** $\frac{10}{3}$. **8.199.** $-\frac{8}{3}$. **8.200.** $-\frac{8}{3}$. **8.201.** 2. **8.202.** −1. **8.203.** 1. **8.204.** 1. **8.205.** 1. **8.206.** 0,5. **8.207.** 1. **8.208.** 0,5. **8.209.** 1. **8.210.** −1. **8.211.** 0,875. **8.212.** −0.92. **8.213.** 0,8. **8.214.** $\frac{15}{17}$. **8.215.** $\frac{15}{8}$. **8.216.** 0,4. **8.217.** 1,28. **8.218.** −0,875. **8.219.** 0,96. **8.220.** −0,8. **8.221.** $-\frac{4}{3}$. **8.222.** 0,75. **8.223.** $-\frac{25}{12}$. **8.224.** 0,6. **8.225.** −0,8. **8.226.**

1. **8.227.** −0,75 **8.228.** −0,75 **8.229.** 0,6. **8.230.** 0 **8.231.** 0,5. **8.232.** −0,4. **8.233.** 0,4 **8.234.** 0,6 **8.235.** −0,8. **8.236.** −0,9. **8.237.** −0,6. **8.238.** 0,8. **8.239.** 0,75. **8.240.** 0,51 **8.241.** 0,2 **8.242.** 0,6. **8.243.** −0,4. **8.244.** −0,28. **8.245.** 0,28. **8.246.** 0,84 **8.247.** 0,91 **8.248.** −0,19. **8.249.** −0,92. **8.250.** −0,82. **8.251.** 0,6 **8.252.** 0,3. **8.253.** 0,1. **8.254.** 0,8. **8.255.** 0,35. **8.256.** 0,9. **8.257.** 0,85. **8.258.** 0,4. **8.259.** 0,45. **8.260.** 0,65. **8.261.** $\frac{1}{26}$. **8.262.** $-\frac{11}{14}$ **8.263.** −1,4. **8.264.** $\frac{59}{62}$. **8.265.** $-\frac{1}{7}$. **8.266.** $-\frac{11}{5}$ **8.267.** $\frac{5}{8}$. **8.268.** $-\frac{37}{38}$. **8.269.** $-\frac{1}{4}$ **8.270.** 3,2. **8.271.** $\sqrt{2}$ **8.272.** 3. **8.273.** $-\sqrt{3}$. **8.274.** 1. **8.275.** −1. **8.276.** −1 **8.277.** −6. **8.278.** 1 **8.279.** −0,5 **8.280.** $-\sqrt{3}$ **8.281.** −1. **8.282.** 1 **8.283.** $\sqrt{2}$ **8.284.** −3. **8.285.** −0,5 **8.286.** 0,5 **8.287.** 2,5. **8.288.** 0,1 **8.289.** −0,2. **8.290.** 4 **8.291.** −1,1, 1,1 **8.292.** −0,75, 0,75. **8.293.** $-\frac{\sqrt{3}}{2}$; $\frac{\sqrt{3}}{2}$ **8.294.** −1,2; 1,2 **8.295.** −0,64. **8.296.** ±4, ±2 **8.297.** $-\frac{\sqrt{7}}{4}$, $\frac{\sqrt{7}}{4}$. **8.298.** $\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\pm\frac{\sqrt{6}}{2}$. **8.299.** 0,56. **8.300.** −9; 9 **8.301.** $\frac{7}{8}$. **8.302.** 0,944. **8.303.** 0,936. **8.304.** 224. **8.305.** −80. **8.306.** 80. **8.307.** $\frac{13}{16}$. **8.308.** $-\frac{9\sqrt{3}}{2}$. **8.309.** $\frac{7\sqrt{5}}{10}$. **8.310.** 97. **8.311.** 5. **8.312.** 4. **8.313.** 0,1. **8.314.** −10. **8.315.** 0,2. **8.316.** 0,25. **8.317.** 3. **8.318.** 0,5. **8.319.** 8 **8.320.** 2,5.

§ 26. Тригонометрические уравнения

(здесь параметры k и n принимают все целочисленные значения, т.е $k \in Z$, $n \in Z$)

8.321. $\pi + 2\pi k$ **8.322.** $2\pi k$. **8.323.** $-\frac{\pi}{2} + 2\pi k$. **8.324.** πk. **8.325.** πk **8.326.** $\frac{\pi}{2} + 2\pi k$. **8.327.** $\frac{\pi}{4} + 2\pi k$. **8.328.** $\frac{\pi}{2} + \pi k$. **8.329.** $-\frac{\pi}{4} + 2\pi k$. **8.330.** $\frac{\pi}{2} + \pi k$. **8.331.** $\frac{\pi}{6} + 2\pi k$; $\frac{5\pi}{6} + 2\pi k$. **8.332.** $\pm\frac{5\pi}{6} + 2\pi k$. **8.333.** $\frac{\pi}{4} + 2\pi k$; $\frac{3\pi}{4} + 2\pi n$. **8.334.** $-\frac{\pi}{3} + \pi k$. **8.335.** $\pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k$. **8.336.** $\frac{\pi}{6} + \pi k$. **8.337.** $-\frac{\pi}{3} + 2\pi k$; $-\frac{2\pi}{3} + 2\pi n$. **8.338.** $\pm\frac{\pi}{4} + 2\pi k$. **8.339.** $-\frac{\pi}{4} + 2\pi k$, $-\frac{3\pi}{4} + 2\pi n$. **8.340.** $\frac{\pi}{6} + \pi k$. **8.341.** $\frac{\pi}{3} + \pi k$. **8.342.** $-\frac{\pi}{6} + 2\pi k$; $-\frac{5\pi}{6} + 2\pi n$. **8.343.** $\pm\frac{3\pi}{4} + 2\pi k$ **8.344.** $-\frac{\pi}{3} + \pi k$ **8.345.** $\pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi k$. **8.346.** $-\frac{\pi}{6} + \pi k$. **8.347.** $\pm\frac{\pi}{6} + 2\pi k$. **8.348.** $-\frac{\pi}{6} + \pi k$. **8.349.** $\frac{\pi}{3} + 2\pi k$; $\frac{2\pi}{3} + 2\pi n$. **8.350.** $\frac{\pi}{3} + \pi k$. **8.351.** 30°. **8.352.** 225°. **8.353.** 45°; 105°. **8.354.** 60°. **8.355.** 180°. **8.356.** 135°. **8.357.** 18°. **8.358.** 10°; 50°. **8.359.** 40°; 80°. **8.360.** 105°; 165°. **8.361.** 150° **8.362.** 48°. **8.363.** 252° **8.364.** 15°; 75° **8.365.** 280°; 320° **8.366.** 105°. **8.367.** 255°. **8.368.** 150°. **8.369.** 105°; 135°. **8.370.** 96°; 120°; 168° **8.371.** 1; 2; 3. **8.372.** 5 **8.373.** 4; 5 **8.374.** 2; 4. **8.375.** 1, 7. **8.376.** 4; 8 **8.377.** 3. **8.378.** 3, 5. **8.379.** 8. **8.380.** 2, 6. **8.381.** 10,5. **8.382.** 3,5 **8.383.** 10 **8.384.** 6 **8.385.** 0,125, 0,625. **8.386.** 17,5. **8.387.** 1,75 **8.388.** 5. **8.389.** 3. **8.390.** 3. **8.391.**

$\frac{\pi}{2}+\pi k$. **8.392.** $\pm\frac{\pi}{12}+\frac{\pi k}{2}$; $\pm\frac{\pi}{6}+\frac{\pi n}{2}$. **8.393.** $\frac{\pi k}{2}$ **8.394.** $\pm\frac{\pi}{2}+\frac{3}{2}\pi k$. **8.395.** $\frac{\pi}{6}+\frac{\pi k}{3}$. **8.396.** $\pm\frac{\pi}{6}+\frac{\pi k}{2}$. **8.397.** $\pm\frac{3\pi}{4}+3\pi k$. **8.398.** $\pm\frac{\pi}{12}+\pi k$; $\pm\frac{5\pi}{12}+\pi n$. **8.399.** $\pm\frac{2\pi}{3}+4\pi k$; $\pm\frac{4\pi}{3}+4\pi n$ **8.400.** $\pm\frac{\pi}{4}+3\pi k$; $\pm\frac{5\pi}{4}+3\pi n$. **8.401.** $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2}$. **8.402.** $\pm\frac{\pi}{3}+\pi k$. **8.403.** $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2}$. **8.404.** $\pm\frac{\pi}{3}+\pi k$. **8.405.** $\pm\frac{\pi}{6}+\pi k$. **8.406.** $\pm\frac{\pi}{6}+\pi k$. **8.407.** $\pm\frac{\pi}{6}+\pi k$. **8.408.** $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2}$. **8.409.** $\pm\frac{\pi}{4}+\pi k$. **8.410.** $\pm\frac{\pi}{3}+\pi k$. **8.411.** $\frac{\pi}{6}+2\pi k$; $\frac{5\pi}{6}+2\pi n$. **8.412.** $\frac{\pi}{12}+\pi k$; $\frac{5\pi}{12}+\pi n$. **8.413.** $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2}$. **8.414.** $-\frac{\pi}{2}+2\pi k$; $\frac{\pi}{6}+2\pi n$; $\frac{5\pi}{6}+2\pi m$ **8.415.** πk; $-\frac{\pi}{2}+2\pi n$. **8.416.** $\pm\frac{3\pi}{4}+2\pi k$ **8.417.** $\frac{\pi}{4}+2\pi k$; $\frac{3\pi}{4}+2\pi n$. **8.418.** $-\frac{\pi}{6}+2\pi n$; $-\frac{5\pi}{6}+2\pi k$. **8.419.** $\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k$. **8.420.** πk; $\frac{\pi}{4}+\pi n$. **8.421.** $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}$ **8.422.** $\pm\frac{\pi}{6}+\pi k$ **8.423.** πk **8.424.** $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2}$ **8.425.** $\pm\frac{\pi}{3}+\pi k$. **8.426.** $\pm\frac{\pi}{6}+\pi k$ **8.427.** πk. $-\frac{\pi}{4}+\pi n$; **8.428.** $\frac{\pi}{2}+\pi k$; $\frac{\pi}{4}+\pi n$. **8.429.** πk; $-\frac{\pi}{4}+\pi n$. **8.430.** $\frac{\pi}{2}+\pi k$. $\frac{\pi}{4}+\pi n$ **8.431.** $45^\circ + 90^\circ n$; $25^\circ + 30^\circ k$. **8.432.** $90^\circ k$; $5^\circ + 20^\circ n$ **8.433.** $180^\circ k$. $10^\circ + 60^\circ n$. **8.434.** $90^\circ k$; $135^\circ + 180^\circ n$ **8.435.** $36^\circ n$; $40^\circ + 60^\circ k$. **8.436.** $45^\circ n$; $-30^\circ + 180^\circ k$. **8.437.** $15^\circ + 45^\circ n$. **8.438.** $75^\circ + 90^\circ n$; $-45^\circ + 60^\circ k$. **8.439.** $30^\circ + 90^\circ k$; $180^\circ + 360^\circ \cdot n$. **8.440.** $180^\circ(3k+1)$; $-10^\circ + 60^\circ n$. **8.441.** $180^\circ n$; $30^\circ + 180^\circ k$. **8.442.** $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2}$; $\frac{\pi}{6}+\frac{2}{3}\pi n$. **8.443.** $30^\circ + 180^\circ k$; $\pm 20^\circ + 120^\circ n$. **8.444.** $\frac{\pi k}{5}$; $\frac{\pi}{6}+\frac{\pi n}{3}$. **8.445.** $\frac{\pi k}{4}$. **8.446.** πk; $\frac{\pi}{6}+\pi n$. **8.447.** $\frac{\pi k}{2}$. **8.448.** $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2}$; $\pm\frac{\pi}{20}+\frac{2}{5}\pi n$. **8.449.** $3\pi k$; $\frac{\pi}{9}+\frac{2}{3}\pi n$; $\frac{2\pi}{9}+\frac{2}{3}\pi m$. **8.450.** πk; $-\frac{\pi}{4}+\pi n$. **8.451.** $-\frac{\pi}{2}+2\pi k$ **8.452.** πk. **8.453.** $-\frac{3\pi}{4}+2\pi k$. **8.454.** $150^\circ + 360^\circ k$. **8.455.** $\frac{\pi}{4}+\pi k$ **8.456.** $2\pi k$. **8.457.** $-60^\circ + 360^\circ k$. **8.458.** $150^\circ + 360^\circ k$. **8.459.** $-\frac{5\pi}{6}+2\pi k$ **8.460.** $-\frac{5\pi}{6}+2\pi k$ **8.461.** $\pm\frac{\pi}{6}+2\pi n$. **8.462.** πk; $\pm\frac{\pi}{6}+2\pi n$ **8.463.** πk; $\pm\frac{\pi}{6}+2\pi n$. **8.464.** $\frac{\pi}{2}+\pi k$; $-\frac{2\pi}{3}+2\pi n$; $-\frac{\pi}{3}+2\pi m$; **8.465.** $\frac{\pi}{4}+2\pi n$. **8.466.** πk; $\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n$. **8.467.** $2\pi k$; $\pm\frac{\pi}{2}+4\pi k$. **8.468.** $\frac{\pi}{2}+\pi n$; $\frac{\pi}{4}+2\pi m$; $\frac{3\pi}{4}+2\pi k$. **8.469.** $\frac{\pi}{2}+\pi n$. $\frac{\pi}{3}+2\pi m$; $\frac{2\pi}{3}+2\pi k$. **8.470.** $\pi(2n+1)$. **8.471.** $2\pi k$; $\pi/5 + 2\pi n/5$. **8.472.** $6\pi k/7$; $6\pi n/5$. **8.473.** $\pi n/3$. **8.474.** $4\pi k/19$, $k \neq 19n$. **8.475.** $2\pi k/7$; $\pi + 2\pi n$. **8.476.** $\frac{\pi}{7}+\frac{2}{7}\pi k$; $\frac{\pi}{3}+\frac{2}{3}\pi n$. **8.477.** $\pi k/5$. **8.478.** $\pi k/5$; $k \neq 5n$. **8.479.** $\pi k/4$. **8.480.** $2\pi k/5$; $2\pi k/3$. **8.481.** 90°. **8.482.** 54°. **8.483.** 15°. **8.484.** 9°; 45°; 81°. **8.485.** 105°; 165°. **8.486.** 310°; 350°. **8.487.** 370°; 410°. **8.488.** 130°; 170°. **8.489.** 30°. **8.490.** 27°. **8.491.** 150°. **8.492.** 10°; 30°. **8.493.** 330°. **8.494.** 90° **8.495.** 45° **8.496.** 40°; 80°. **8.497.** 15°, 30°. **8.498.** 210°. **8.499.** 18°; 54°. **8.500.** 240°. **8.501.** 198°. **8.502.** 234° **8.503.** 110°, 150° **8.504.** 216°, 220° **8.505.** 126°; 130°. **8.506.** 54°; 126°. **8.507.** 25°, 27°. **8.508.** 126°; 130°. **8.509.** 110°. **8.510.** 108°, 144° **8.511.** $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2}$; $\frac{\pi}{6}+\frac{2}{3}\pi n$. **8.512.** $\frac{\pi}{6}+\frac{\pi n}{3}$. **8.513.** $\frac{\pi k}{2}$; $\pm\frac{\pi}{6}+\frac{2}{5}\pi n$. **8.514.** $\frac{\pi k}{5}$; $\frac{\pi}{12}+\pi n$; $\frac{5\pi}{12}+\pi m$ **8.515.** $\frac{\pi k}{3}$, $\pm\frac{\pi}{8}+\pi n$ **8.516.** $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2}$; $\frac{\pi}{3}+2\pi k$; $\frac{2\pi}{3}+2\pi n$. **8.517.** $\frac{\pi k}{2}$. $\frac{\pi}{6}+2\pi n$; $\frac{5\pi}{6}+2\pi m$. **8.518.** πn; $\frac{\pi}{6}+\frac{\pi k}{3}$. **8.519.** $\frac{\pi k}{2}$; $\pm\frac{\pi}{9}+\frac{2\pi n}{3}$ **8.520.** $\frac{\pi k}{2}$. **8.521.** $-25^\circ + 180^\circ n$. **8.522.**

$95° + 180°k$. **8.523.** $-60° + 180°k$ **8.524.** $100° + 360°k$; $-20° + 360°n$. **8.525.** $15°+360°k$; $-105° + 360°n$. **8.526.** $100° + 360°k$; $-20° + 360°n$. **8.527.** $-15° + 360°k$; $105° + 360°n$. **8.528.** $145° + 360°n$; $-95° + 360°k$. **8.529.** $-5° + 360°k$; $-125° + 360°n$. **8.530.** $100° + 360°k$; $-140° + 360°n$. **8.531.** $\frac{\pi}{24} + \frac{\pi k}{6}; \frac{\pi}{2} + \pi n$. **8.532.** $2\pi k/5$; $\pi/2 + \pi n$; $\pi(2m + 1)$. **8.533.** $\pi k/8$. **8.534.** $\frac{2\pi k}{5}$; $\frac{\pi}{2} + \pi n$; $\frac{\pi}{11} + \frac{2}{11}\pi m$. **8.535.** $\pi k/5$; $\pi k/7$. **8.536.** $\frac{\pi k}{5}$; $\frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{3}$. **8.537.** $\pi k/7$; $\pi n/2$. **8.538.** $\pi k/4$. **8.539.** $\pi k/2$ **8.540.** $\frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{4}$; $-\frac{\pi}{18} + \frac{2\pi k}{3}$; $-\frac{5\pi}{18} + \frac{2\pi m}{3}$. **8.541.** $\pi/6 + 2\pi k$; $5\pi/6 + 2\pi n$ **8.542.** $-\pi/4 + \pi k$. **8.543.** $\pm\pi/3 + 2\pi n$. **8.544.** $\pi/4 + \pi k$. **8.545.** $\pi/2 + 12\pi n$. **8.546.** $\pm 4\pi + 12\pi(2k+1)$. **8.547.** $\pi+12\pi n$; $5\pi+12\pi k$. **8.548.** $\pm 4\pi + 12\pi k$. **8.549.** πk. **8.550.** $2\pi + 4\pi k$. **8.551.** $\pm\frac{5\pi}{6} - \frac{\pi}{4} + 2\pi k$. **8.552.** $\frac{\pi}{8} \pm \frac{3\pi}{8} + \pi k$. **8.553.** $\pm 4\pi + \pi(12k + 1)$. **8.554.** $\frac{\pi}{9} \pm \frac{\pi}{9} + \frac{2\pi k}{3}$. **8.555.** $\frac{\pi}{3} \pm \frac{\pi}{4} + 2\pi k$. **8.556.** $\pm 2\pi/3 + 2\pi k$. **8.557.** $\frac{11\pi}{36} + \pi + 2\pi k$. **8.558.** $-\frac{\pi}{4} \pm \frac{5\pi}{6} + 2\pi k$. **8.559.** $\frac{\pi}{4} + 2\pi k$. **8.560.** $\frac{\pi}{6} \pm \frac{\pi}{12} + \pi k$. **8.561.** $\pm 2\pi/3 + 2\pi k$; $\pi/4 + \pi n$. **8.562.** $\frac{\pi}{4} + \pi k$; $\frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{3}$. **8.563.** $\pi/2 + \pi k$; $\pi/6 + 2\pi n$; $5\pi/6 + 2\pi m$. **8.564.** πk; $\pi/2 + 2\pi n$. **8.565.** $-\frac{\pi}{12} \pm \frac{\pi}{3} + \pi k$. **8.566.** πk. **8.567.** $\pi/2 + \pi k$; $\pm\pi/3 + \pi n$. **8.568.** $\pi/4 + \pi k$. **8.569.** $\pi/4 + \pi n$; $\pm\pi/3 + 2\pi k$. **8.570.** $\pi/2 + 2\pi k$; $\pm\pi/6 + 2\pi n$. **8.571.** $\frac{\pi}{18} + \frac{\pi k}{9}$. **8.572.** πk. **8.573.** $\frac{\pi}{10} + \frac{\pi k}{5}$. **8.574.** $-\frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{2}$. **8.575.** $-25° + 90°k$. **8.576.** $-20° + 30°k$. **8.577.** $3\pi/4 + \pi k$. **8.578.** $-\pi/4 + \pi k$. **8.579.** $\pi/4 + \pi k$. **8.580.** $\pi/4 + \pi k$. **8.581.** $-\pi/6 + 2\pi k$; $\pi/2 + 2\pi n$ **8.582.** $\pm\pi/6 + \pi k$ **8.583.** $\pm\pi/3 + \pi k$. **8.584.** $-\pi/6 + \pi k$. **8.585.** $\pm\pi/6 + \pi k$. **8.586.** $\pm\pi/3 + \pi k$. **8.587.** πk. **8.588.** $\pm\pi/6 + \pi k$. **8.589.** $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}$. **8.590.** $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}$; **8.591.** $\frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{2}$; $-\frac{\pi}{12} + \pi n$. **8.592.** $\frac{3\pi}{20} + \frac{2}{5}\pi k$; $-\frac{\pi}{12} + \frac{2}{3}\pi n$. **8.593.** $-\frac{\pi}{20} + \frac{2}{5}\pi k$; $\frac{\pi}{12} + \frac{2}{3}\pi n$. **8.594.** $\frac{\pi}{12} + \pi k$; $\frac{7\pi}{48} + \frac{\pi n}{4}$. **8.595.** $\frac{\pi}{10} + \frac{4}{5}\pi k$; $-\frac{\pi}{6} + \frac{4}{3}\pi n$. **8.596.** πk; $\frac{\pi}{3} + \frac{2\pi n}{5}$. **8.597.** $-\frac{2\pi}{15} + \frac{4\pi k}{5}$; $\frac{2\pi}{9} + \frac{4\pi n}{3}$. **8.598.** $4\pi k$; $\frac{4\pi}{15} + \frac{4}{5}\pi n$. **8.599.** $\frac{\pi}{12} + \frac{2}{5}\pi k$; $\frac{\pi}{36} + \frac{2}{3}\pi n$. **8.600.** πk; $\frac{\pi}{9} + \frac{\pi n}{3}$. **8.601.** $\pi n/2$; $\pi k/5$. **8.602.** $2\pi k/3$; $6\pi n/5$; $\frac{3\pi}{4} + \frac{3\pi k}{2}$. **8.603.** $\pm\frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{2}$. **8.604.** $\pi n/5$; $\pi k/2$; $\pi/2 + \pi m$. **8.605.** $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}$; $\pm\frac{4\pi}{3} + 4\pi n$. **8.606.** $9\pi k/2$; $9\pi/2 + 9\pi n$. **8.607.** $\frac{5\pi}{4} + \frac{5\pi k}{2}$; $\frac{\pi}{2} + \pi n$; $\frac{5\pi}{2} + 5\pi m$. **8.608.** $\frac{\pi}{2} + \pi k$; $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi m}{2}$; $\frac{\pi}{10} + \frac{\pi n}{5}$. **8.609.** $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}$ **8.610.** $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}$. **8.611.** $\frac{\pi k}{8}$; $\frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{4}$. **8.612.** $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}$; $\pm\frac{\pi}{3} + \pi n$. **8.613.** $\frac{\pi}{24} + \frac{\pi k}{2}$; $\frac{5\pi}{24} + \frac{\pi n}{2}$ **8.614.** $\frac{\pi k}{2}$; $\frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{4}$. **8.615.** $\pi k/14$. **8.616.** $\pi/2 + \pi k$; $6\pi k$. **8.617.** $3\pi k/13$; $\pi/2 + \pi k$. **8.618.** $\frac{2\pi k}{11}$; $\frac{\pi}{7} + \frac{2\pi k}{7}$. **8.619.** πk; $\frac{\pi}{26} + \frac{\pi k}{13}$. **8.620.** $\frac{2\pi k}{15}$; $\frac{\pi}{17} + \frac{2\pi n}{17}$. **8.621.** $\pi/4 + \pi k$; $\pi/3 + \pi n$. **8.622.** $\pi/6 + \pi k$; $\pi/3 + \pi n$. **8.623.** $\pi/6 + \pi n$; $\mathrm{arctg}5 + \pi k$. **8.624.** $\pi/4 + \pi k$; $-\pi/3 + \pi n$. **8.625.** $-\pi/4 + \pi n$; $\mathrm{arctg}0{,}75 + \pi k$. **8.626.** $-\pi/4 + \pi k$; $\mathrm{arctg}3 + \pi n$. **8.627.** $\pi/4 + \pi k$; $-\mathrm{arctg}1{,}5 + \pi n$. **8.628.** $\pi/4 + \pi k$; $\mathrm{arctg}3 + \pi n$. **8.629.** $\pi/4 + \pi k$; $-\mathrm{arctg}0{,}4 + \pi n$. **8.630.** $\pi/4 + \pi k$;

$\mathrm{arctg}\,0{,}25 + \pi n$. **8.631.** $\pi/4 + 2\pi k$. **8.632.** $-\pi/4 + \pi k$. **8.633.** $-\pi/4 + \pi k$; $\pi/2 + 2\pi n$. **8.634.** $\pi/4 + \pi k$. **8.635.** $-\pi/4 + \pi k$. **8.636.** $-\pi/4 + \pi k$. **8.637.** $\pi/4 + \pi k$. **8.638.** $-\frac{\pi}{8} + \pi k/2$. **8.639.** $-\pi/12 + \pi k$; $-5\pi/12 + \pi n$. **8.640.** $5\pi/12 + \pi k$; $\pi/12 + \pi n$. **8.641.** $\pi/4 + \pi k$. **8.642.** $\pi/2 + \pi k$. **8.643.** $4\pi k$; $\pi + 4\pi n$. **8.644.** $\pi/2 + 2\pi k$. **8.645.** $\pm\pi/3 + \pi k$. **8.646.** πk; $\pm\pi/4 + \pi n$. **8.647.** $-\pi/4 + \pi k$. **8.648.** $\pi + 2\pi k$; $\pi/2 + 2\pi n$. **8.649.** $\pi/2 + 2\pi k$. **8.650.** $2\pi k$ **8.651.** $\left(\frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{2};\ \frac{3\pi}{8} + \frac{\pi k}{2}\right)$. **8.652.** $\left(\frac{7\pi}{6} + \pi k;\ -\frac{\pi}{6} + \pi k\right)$. **8.653.** $\left(-\frac{\pi}{6} + \pi k; -\pi k\right)$; $\left(-\frac{\pi}{2} + \pi n; \frac{\pi}{3} - \pi n\right)$. **8.654.** $\left(\frac{\pi}{6} + 2\pi k;\ \frac{\pi}{6} - 2\pi k\right)$. **8.655.** $\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{2}; -\frac{\pi}{3} - \frac{\pi n}{2}\right)$. **8.656.** $\left(\frac{5\pi}{6} + 2\pi k; -\frac{\pi}{6} - 2\pi k\right)$. **8.657.** $\left(\frac{\pi}{6} + \pi k;\ \frac{\pi}{6} - \pi k\right)$. **8.658** . $\left(\frac{5\pi}{6} + \pi k; \frac{5\pi}{6} - \pi k\right)$. **8.659.** $\left(-\frac{3\pi}{8} + \frac{\pi k}{2}; \frac{3\pi}{8} + \frac{\pi k}{2}\right)$.

8.660. $\left(\frac{\pi}{4} + \pi k;\ -\frac{\pi}{4} + \pi k\right)$. **8.661.** $\left(\frac{3\pi}{2} + \pi k;\ -\frac{\pi}{6} + \pi k\right)$. **8.662.** $\left(\frac{\pi}{2} + \pi k;\ \frac{\pi}{4} - \pi k\right)$.
8.663. $\left(\pi k;\ -\frac{\pi}{3} + \pi k\right)$. **8.664.** $\left(\pi k;\ \frac{\pi}{3} - \pi k\right)$. **8.665.** $\left(\frac{\pi}{2} + \pi k;\ -\frac{\pi}{6} - \pi k\right)$.
8.666. $\left(\pi k;\ -\frac{2\pi}{3} + \pi k\right)$. **8.667.** $\left(\frac{\pi}{12} + \pi k;\ -\frac{\pi}{6} + \pi k\right)$. **8.668.** $\left(\frac{17}{12}\pi - \pi k;\ -\frac{\pi}{6} + \pi k\right)$.
8.669. $\left(\frac{\pi}{4} + \pi k;\ \frac{\pi}{6} - \frac{2}{3}\pi k\right)$. **8.670.** $\left(-\frac{\pi}{6} + \pi k;\ -\frac{5\pi}{4} + \frac{3\pi k}{2}\right)$. **8.671.** $(2\pi n; \pi + 2\pi n)$.
8.672. $\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{3\pi}{2} + 2\pi n\right)$. **8.673.** $\left(\pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n\right)$. **8.674.** $\left(\frac{\pi}{2} + \pi n; \pi + \pi n\right)$.
8.675. $\left[2\pi n; \frac{\pi}{2} + 2\pi n\right) \cup \left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n; 2\pi + 2\pi n\right]$. **8.676.** $(-\pi + \pi n; \pi + 2\pi n)$.
8.677. $\left(\frac{\pi}{4} + \pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n\right)$. **8.678.** $\left(\frac{\pi}{4} + \pi n; \pi + \pi n\right)$. **8.679.** $(2\pi n; 2\pi + 2\pi n)$.
8.680. $\left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{3\pi}{2} + 2\pi n\right)$. **8.681.** $\left(2\pi k + \frac{5\pi}{6};\ 2\pi k + \frac{7\pi}{6}\right)$. **8.682.** $\left(2\pi k + \frac{\pi}{3};\ 2\pi k + \frac{2\pi}{3}\right)$.
8.683. $\left(2\pi k - \frac{\pi}{3};\ 2\pi k + \frac{\pi}{3}\right)$. **8.684.** $\left(2\pi k - \frac{5\pi}{6};\ 2\pi k - \frac{\pi}{6}\right)$. **8.685.** $\left(\pi k - \frac{\pi}{2};\ \pi k + \frac{\pi}{4}\right)$.
8.686. $\left(\pi k + \frac{3\pi}{4};\ \pi k + \pi\right)$. **8.687.** $\left(\pi k + \frac{\pi}{3};\ \pi k + \frac{\pi}{2}\right)$. **8.688.** $\left(2\pi k;\ 2\pi k + \frac{\pi}{6}\right) \cup \left(2\pi n - \frac{5\pi}{6};\ 2\pi n + \pi\right)$. **8.689.** $\left(2\pi k + \frac{\pi}{2};\ 2\pi k + \frac{2\pi}{3}\right) \cup \left(2\pi n - \frac{2\pi}{3};\ 2\pi n - \frac{\pi}{2}\right)$.
8.690. $\left(\pi k;\ \pi k + \frac{\pi}{6}\right)$.

Раздел IX. Планиметрия

§ 27. Углы. Прямые. Треугольники

9.001. 40°. **9.002.** 108°. **9.003.** 49°. **9.004.** 78°. **9.005.** 24°. **9.006.** 60°. **9.007.** 57°. **9.008.** 168°. **9.009.** 132°. **9.010.** 36°. **9.011.** 50°. **9.012.** 85°. **9.013.** 72°. **9.014.** 30°; 60°. **9.015.** 120°. **9.016.** 30°. **9.017.** 72°. **9.018.** 30°. **9.019.** 144°. **9.020.** 110°. **9.021.** 25. **9.022.** 78 **9.023.** 118. **9.024.** 38. **9.025.** 12,5. **9.026.** 78. **9.027.** 15. **9.028.** 15. **9.029.** 2,5. **9.030.** 8 **9.031.** 2; 6. **9.032.** 3; $\sqrt{41}$. **9.033.** 5; $\sqrt{313}$. **9.034.** 9; $\sqrt{17}$. **9.035.** 10; $2\sqrt{7}$. **9.036.** 6; $2\sqrt{63}$. **9.037.** $3\sqrt{3}$; $3\sqrt{5}$. **9.038.** 6; $\sqrt{62}$. **9.039.** 13; $\sqrt{119}$. **9.040.** $\sqrt{11}$; $\sqrt{61}$. **9.041.** 10. **9.042.** 49. **9.043.** 18,75. **9.044.** 6,75. **9.045.** 9,375. **9.046.** 3,125. **9.047.** 45

9.048. 42. **9.049.** 12. **9.050.** 0,75 **9.051.** 2. **9.052.** 80 **9.053.** 50 **9.054.** 25. **9.055.** 17. **9.056.** 70. **9.057.** 24. **9.058.** 18. **9.059.** 6. **9.060.** 3. **9.061.** 3. **9.062.** 12. **9.063.** 25. **9.064.** 3,625. **9.065.** 5,25. **9.066.** 2,5. **9.067.** 40. **9.068.** 4; 5. **9.069.** 28,8. **9.070.** 5; 12. **9.071.** 6,5. **9.072.** 22. **9.073.** 0,1. **9.074.** 0,6. **9.075.** 0,3. **9.076.** 10. **9.077.** 10,5. **9.078.** 45. **9.079.** 30 **9.080.** 8,5. **9.081.** 4. **9.082.** 4. **9.083.** 1,875. **9.084.** 11. **9.085.** 9,5. **9.086.** 0,5. **9.087.** 0,75 **9.088.** 3. **9.089.** 0,7. **9.090.** 1,5 **9.091.** 50; 72. **9.092.** 12. **9.093.** 9. **9.094.** 0,5. **9.095.** 8. **9.096.** 12. **9.097.** 6; 8. **9.098.** 1; 16. **9.099.** 150 **9.100.** 5,2 **9.101.** 2. **9.102.** 24 **9.103.** 5,2. **9.104.** 8 **9.105.** 136 **9.106.** 7 **9.107.** 2,31. **9.108.** 0,25. **9.109.** 2. **9.110.** 4.

§ 28. Четырехугольники и многоугольники

9.111. 40,5. **9.112.** 44,8. **9.113.** 25,5. **9.114.** 69. **9.115.** 34. **9.116.** 180. **9.117.** 29. **9.118.** 12. **9.119.** 12. **9.120.** 35. **9.121.** 13,5. **9.122.** 0,75. **9.123.** 0,9. **9.124.** 6. **9.125.** 11. **9.126.** 52,5 **9.127.** 3. **9.128.** 2. **9.129.** 6. **9.130.** 24. **9.131.** 30°. **9.132.** 85°. **9.133.** 54° **9.134.** 26. **9.135.** 150°. **9.136.** 135°. **9.137.** 160°. **9.138.** 125°. **9.139.** 150°. **9.140.** 45° **9.141.** 4,5. **9.142.** 0,8. **9.143.** 96. **9.144.** 90,75. **9.145.** 19,6. **9.146.** 2. **9.147.** 3,5. **9.148.** 6. **9.149.** 4,5 **9.150.** 6 **9.151.** 1,8. **9.152.** 2,25. **9.153.** 6 **9.154.** 0,4 **9.155.** 7. **9.156.** 19,5. **9.157.** 6. **9.158.** 12. **9.159.** 18. **9.160.** 0,6. **9.161.** 0,875 **9.162.** 4,5. **9.163.** 2,4. **9.164.** 72,25. **9.165.** 28,5. **9.166.** 225 **9.167.** 1242 . **9.168.** 7,5. **9.169.** 180. **9.170.** 75

§ 29. Окружность и круг. Вписанные углы

9.171. 75°. **9.172.** 55. **9.173.** 54°; 126°. **9.174.** 54. **9.175.** 1°. **9.176.** 20°; 40°. **9.177.** 17. **9.178.** 15°. **9.179.** 5. **9.180.** 3. **9.181.** 160°. **9.182.** 70°. **9.183.** 63°. **9.184.** 110°. **9.185.** 84°. **9.186.** 96°. **9.187.** 67°. **9.188.** 13°. **9.189.** 100°. **9.190.** 16°. **9.191.** 15. **9.192.** 14. **9.193.** 5,25. **9.194.** 0,125 **9.195.** 1,25. **9.196.** 1,5 **9.197.** 0,375 **9.198.** 6,2. **9.199.** 13,5 **9.200.** 7. **9.201.** 31,2. **9.202.** 40,5. **9.203.** 8. **9.204.** 11,5. **9.205.** 9,6. **9.206.** 30 **9.207.** 3,12. **9.208.** 28,5. **9.209.** 28,125. **9.210.** 7,5. **9.211.** 0,5. **9.212.** 1. **9.213.** 6. **9.214.** 0,25. **9.215.** 14. **9.216.** 19 **9.217.** 2. **9.218.** 18. **9.219.** 4. **9.220.** 3,5

§ 30. Треугольники и окружность

9.221. 80°. **9.222.** 1. **9.223.** 3. **9.224.** 6. **9.225.** 18 **9.226.** 1. **9.227.** 10. **9.228.** 6. **9.229.** 1. **9.230.** 38° **9.231.** 0,25. **9.232.** 1,8. **9.233.** 7,25. **9.234.** 2,1. **9.235.** 14,8. **9.236.** 12. **9.237.** 11,2. **9.238.** 17. **9.239.** 40. **9.240.** 8. **9.241.** 0,75. **9.242.** 0,25. **9.243.** 2,6 **9.244.**

7. **9.245.** 30°. **9.246.** 15. **9.247.** 2. **9.248.** –0,5. **9.249.** 6. **9.250.** 4. **9.251.** 0,75. **9.252.** 4. **9.253.** 2. **9.254.** 12. **9.255.** 2. **9.256.** 28. **9.257.** 1. **9.258.** 2. **9.259.** 7,25. **9.260.** 25.

§ 31. Разные задачи

9.261. 2,8; 1,6. **9.262.** 6,4. **9.263.** 0,625. **9.264.** 5, 7,5. **9.265.** 1,75. **9.266.** 10,2. **9.267.** 9. **9.268.** 3,5. **9.269.** 6,6. **9.270.** 5. **9.271.** 30°. **9.272.** 4,8°. **9.273.** 37°. **9.274.** 15. **9.275.** 57°. **9.276.** 4,5. **9.277.** 2,5. **9.278.** 0,5. **9.279.** 4. **9.280.** 10°. **9.281.** 1,5. **9.282.** 6. **9.283.** 48. **9.284.** 3. **9.285.** 0,75. **9.286.** 0,5. **9.287.** 6. **9.288.** 3. **9.289.** 2. **9.290.** 1. **9.291.** 1,6. **9.292.** 6. **9.293.** 4,8. **9.294.** 6. **9.295.** 40,3. **9.296.** 45. **9.297.** 4. **9.298.** 2,88. **9.299.** 1,92. **9.300.** 0,125. **9.301.** 24. **9.302.** 2880. **9.303.** 4,25. **9.304.** 16. **9.305.** 60. **9.306.** 10. **9.307.** 4,5. **9.308.** 14. **9.309.** 25. **9.310.** 11. **9.311.** 27. **9.312.** 30,25. **9.313.** 56,25. **9.314.** 0,75. **9.315.** 0,25. **9.316.** 75. **9.317.** 75. **9.318.** 1,75. **9.319.** 61,25. **9.320.** 1,25. **9.321.** $\frac{1}{10}$. **9.322.** $\frac{3}{8}$. **9.323.** $\frac{1}{6}$. **9.324.** $\frac{1}{12}$. **9.325.** $\frac{1}{6}$. **9.326.** $\frac{1}{4}$. **9.327.** $\frac{4}{25}$. **9.328.** $\frac{1}{10}$. **9.329.** $\frac{1}{4}$. **9.330.** $\frac{3}{10}$. **9.331.** $\frac{1}{18}$. **9.332.** $\frac{16}{69}$. **9.333.** $\frac{1}{24}$. **9.334.** $\frac{4}{5}$. **9.335.** $\frac{1}{48}$. **9.336.** $\frac{1}{120}$. **9.337.** $\frac{4}{5}$. **9.338.** $\frac{1}{6}$. **9.339.** 16. **9.340.** $\frac{1}{8}$. **9.341.** 9. **9.342.** $\frac{2}{15}$. **9.343.** $\frac{3}{40}$. **9.344.** $\frac{1}{30}$. **9.345.** $\frac{3}{16}$. **9.346.** $\frac{1}{14}$. **9.347.** $\frac{2}{15}$. **9.348.** $\frac{112}{9}$. **9.349.** $\frac{2}{15}$. **9.350.** 48

Раздел X. Стереометрия

§ 32. Многогранники

10.001. 1,5. **10.002.** 2. **10.003.** 1. **10.004.** 8. **10.005.** 5. **10.006.** 27. **10.007.** 4. **10.008.** 1. **10.009.** 6. **10.010.** 54. **10.011.** 6. **10.012.** 14. **10.013.** 1. **10.014.** 20. **10.015.** 60. **10.016.** 4. **10.017.** 11. **10.018.** 4. **10.019.** 162. **10.020.** 48. **10.021.** 54. **10.022.** 126. **10.023.** 4. **10.024.** 312. **10.025.** 36. **10.026.** 6,5. **10.027.** 10,5. **10.028.** 324. **10.029.** 20,25. **10.030.** 12. **10.031.** 144. **10.032.** 1. **10.033.** 1,5. **10.034.** 2. **10.035.** 18. **10.036.** 70. **10.037.** 4. **10.038.** 70. **10.039.** 12. **10.040.** 26. **10.041.** 36. **10.042.** 4. **10.043.** 13. **10.044.** 9. **10.045.** 3. **10.046.** 1. **10.047.** 7,5. **10.048.** 10. **10.049.** 3. **10.050.** 0,125. **10.051.** 10. **10.052.** 60. **10.053.** 90. **10.054.** 3. **10.055.** 64. **10.056.** 1. **10.057.** 27. **10.058.** 40. **10.059.** 2. **10.060.** 16

§ 33. Пирамида

10.061. 3. **10.062.** 9. **10.063.** 3. **10.064.** 9. **10.065.** 19. **10.066.** 84. **10.067.** 16. **10.068.** 18. **10.069.** 3. **10.070.** 0,25. **10.071.** 52. **10.072.** 13. **10.073.** 109. **10.074.** 9,5. **10.075.** 37. **10.076.** 3. **10.077.** 14. **10.078.** 185. **10.079.** 60. **10.080.** 98. **10.081.** 12. **10.082.** 3. **10.083.** 33,8. **10.084.** 1. **10.085.** 216. **10.086.** 45. **10.087.** 105. **10.088.** 106,4. **10.089.**

6,25. **10.090.** 508. **10.091.** 9. **10.092.** 0,5. **10.093.** 4,5. **10.094.** 1. **10.095.** 6. **10.096.** 9. **10.097.** 1,5. **10.098.** 0,75. **10.099.** 144. **10.100.** 18. **10.101.** 32,25. **10.102.** 872. **10.103.** 42. **10.104.** 24. **10.105.** 3,25. **10.106.** 342. **10.107.** 2. **10.108.** 4. **10.109.** 24. **10.110.** 37. **10.111.** 0,5. **10.112.** 8. **10.113.** 108. **10.114.** 1,5. **10.115.** 3. **10.116.** 1. **10.117.** 18. **10.118.** 48. **10.119.** 6. **10.120.** 3.

§ 34. Фигуры вращения

10.121. 16. **10.122.** 18. **10.123.** 127. **10.124.** 2. **10.125.** 12. **10.126.** 5488. **10.127.** 420. **10.128.** 800. **10.129.** 17. **10.130.** 66. **10.131.** 149. **10.132.** 195. **10.133.** 495. **10.134.** 193. **10.135.** 26. **10.136.** 37. **10.137.** 252. **10.138.** 204. **10.139.** 71. **10.140.** 72. **10.141.** 768. **10.142.** 22. **10.143.** 1. **10.144.** 0,5. **10.145.** 4. **10.146.** 153,6. **10.147.** 15. **10.148.** 8. **10.149.** 0,125. **10.150.** 6. **10.151.** 3,375. **10.152.** 140. **10.153.** 3,75. **10.154.** 12. **10.155.** 392. **10.156.** 37,5. **10.157.** 125. **10.158.** 330. **10.159.** 3,5. **10.160.** 120. **10.161.** 387. **10.162.** 5600. **10.163.** 39. **10.164.** 3645. **10.165.** 64. **10.166.** 131. **10.167.** 75. **10.168.** 324. **10.169.** 1716. **10.170.** 16. **10.171.** 180. **10.172.** 15,625. **10.173.** 3. **10.174.** 11. **10.175.** 64. **10.176.** 22,5. **10.177.** 15,12. **10.178.** 36. **10.179.** 9,5. **10.180.** 176. **10.181.** 19. **10.182.** 26. **10.183.** 110. **10.184.** 3. **10.185.** 5. **10.186.** 501. **10.187.** $15\sqrt{15}$. **10.188.** 12. **10.189.** 11. **10.190.** 10. **10.191.** 2,4. **10.192.** 5. **10.193.** 8. **10.194.** 25. **10.195.** 1,8. **10.196.** 4. **10.197.** 24. **10.198.** 3. **10.199.** 0,6625. **10.200.** 6. **10.201.** 72. **10.202.** 12,5. **10.203.** 0,25. **10.204.** 294. **10.205.** 0,5. **10.206.** 1,75. **10.207.** 75. **10.208.** 76. **10.209.** 4,5. **10.210.** 144.

§ 35. Разные задачи

10.211. 30°. **10.212.** 30°. **10.213.** 45°. **10.214.** 45°. **10.215.** 30°. **10.216.** 30°. **10.217.** 60°. **10.218.** 30°. **10.219.** 0,2. **10.220.** 45°. **10.221.** 0,9. **10.222.** 0,25. **10.223.** 0,4. **10.224.** 0,2. **10.225.** 0,5. **10.226.** 0,2. **10.227.** 0,25. **10.228.** 0,3. **10.229.** 45. **10.230.** 0,6. **10.231.** 6. **10.232.** 42. **10.233.** 81. **10.234.** 2,25. **10.235.** 1,5. **10.236.** 54. **10.237.** 0,5. **10.238.** 0,25. **10.239.** 72. **10.240.** 8. **10.241.** 1. **10.242.** 2. **10.243.** 0,25. **10.244.** 4. **10.245.** 1,25. **10.246.** 1,5. **10.247.** 2. **10.248.** 2. **10.249.** 3. **10.250.** 1.