Национальный институт образования

Факультативные занятия

Н. М. Рогановский, Е. Н. Рогановская, О. И. Тавгень

Геометрия

11 класс

Многообразие идей и методов

Пособие для учащихся
общеобразовательных учреждений
с белорусским и русским языками обучения

Рекомендовано
Научно-методическим учреждением
«Национальный институт образования»
Министерства образования
Республики Беларусь

Минск • «Аверсэв» • 2011

УДК 514(075.3=161.3=161.1)
ББК 22.151я721
Р59

Серия основана в 2010 году

Рогановский, Н. М.

Р59 Геометрия. 11 класс. Многообразие идей и методов : пособие для учащихся общеобразоват. учреждений с белорус. и рус. яз. обучения / Н. М. Рогановский, Е. Н. Рогановская, О. И. Тавгень. — Минск : Аверсэв, 2011. — 202 с. : ил. — (Факультативные занятия).

ISBN 978-985-529-665-3.

Пособие составлено в соответствии с программой факультативного курса. В издании содержится теоретический и практический материал, приводятся различные методы решения геометрических задач.

Предназначено учащимся 11 классов для использования на факультативных занятиях по геометрии.

УДК 514(075.3=161.3=161.1)
ББК 22.151я721

ISBN 978-985-529-665-3

ОТ АВТОРОВ

Этот учебный год для вас во многих отношениях является завершающим: заканчивается не только изучение геометрии, но и ваше обучение в средней школе. Надеемся, что вы определились в своих планах на будущее и в этих планах математика не окажется на последнем месте. Желаем вам в полной мере воспользоваться преимуществами, которые вы получили при дополнительном изучении геометрии, и реализовать эти преимущества при поступлении в вуз, при централизованном тестировании, проводимом в последнее время в Республике Беларусь. В 11 классе на факультативных занятиях изучаются темы: *метод геометрических преобразований (движения и преобразования подобия) — развитие этого метода в курсе стереометрии; многогранники, тела вращения и их комбинации; объемы тел, площади поверхностей: начала методов математического анализа в курсе стереометрии*. Первая тема развивает аналогичную планиметрическую тему, существенно дополняет базовый курс стереометрии, знакомит с современными идеями и методами геометрии, вторая более детально знакомит с комбинациями стереометрических тел, третья тема содержит вопросы измерения геометрических величин в курсе стереометрии, излагаемые с общих математических позиций — элементов математического анализа, изучаемых в базовом курсе. В каждой теме достаточное количество задач, что позволяет улучшить навыки в решении стереометрических задач.

Цель факультативного курса «Геометрия. Многообразие идей и методов» — познакомить вас с наиболее важными математическими методами, применяемыми в геометрии. Каждое доказательство теоремы или решение задачи опирается на ранее известные теоретические сведения. Обычно оно воспринимается как использование отдельных определений, теорем, аксиом, соответствующие ссылки на теоретический материал выглядят довольно разобщенными и плохо предсказуемыми, в результате чего возникают определенные трудности в понимании и осмыслении логических рассуждений. Чтобы преодолеть эти трудности, надо стремиться прежде всего увидеть общий стержень в рассуждениях, замысел, структуру — то, что делает это рассуждение единым целым. Знание того, какой математический метод используется, как раз помогает осмыслить рассуждение в целом, понять его суть, а главное — существенно улучшить умение решать задачи.

Несколько советов о том, как пользоваться данной книгой

1. Вначале изучите теоретический материал параграфа. Он приводится в основном в справочных целях. Не все теоремы даются с доказательством. Доказательства приводятся только к узловым, наиболее важным теоремам или в случае, если они носят оригинальный характер и проще тех, которые имеются в том или ином учебнике. В остальных случаях за доказательством вы можете обратиться к основному учебнику. Формулировки определений, теорем и доказательства теорем необходимо понять и постараться запомнить. Прочитайте их несколько раз, воспроизведите вслух, выполните на бумаге необходимые рисунки и записи.

2. Разберите образцы решения задач, данные в теоретической части параграфа.

3. После изучения теории и разбора решений задач-образцов перейдите к решению задач. Желательно на каждом занятии решать задачи различных уровней сложности. В случае затруднений еще раз обратитесь к теоретическому материалу (к аксиомам, определениям, теоремам, образцам решения задач). Определенную помощь можно найти в разделе «Ответы и указания к решению задач».

Тема 1

МЕТОД ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ: РАЗВИТИЕ ЭТОГО МЕТОДА В КУРСЕ СТЕРЕОМЕТРИИ

§ 1. ДВИЖЕНИЕ. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ПОДОБИЯ. ИХ ОБЩИЕ СВОЙСТВА

1.1. Определения

Из планиметрической части факультативного курса вы знаете, что геометрические преобразования являются одной из тем, которые связывают школьный курс с современной математической наукой. Что такое геометрическое преобразование пространства? Это *взаимно однозначное соответствие между точками пространства*. В геометрии принято в таком случае говорить о *взаимно однозначном отображении пространства на себя*. Приходим к следующему определению.

Геометрическим преобразованием пространства называется взаимно однозначное отображение пространства на себя.

Если при выполнении преобразования П фигура Ф (в частности, точка) переходит в фигуру $Ф_1$, то фигура $Ф_1$ называется *образом фигуры* Ф в данном преобразовании.

Записывают: $Ф_1 = П(Ф)$, $Ф \to Ф_1$.

Напомним, что геометрические преобразования являются примерами *обратимых функций*, только областью определения и множеством значений этих функций являются не числовые множества, а множества точек. Как и в планиметрии, основными являются следующие два определения.

- Преобразование, сохраняющее расстояние между точками, называется **движением**.
- Преобразование, изменяющее расстояние между точками в одно и то же число раз ($k \neq 0$), называется **преобразованием подобия**. Число k называется *коэффициентом подобия*.

Значение этих преобразований подтверждается тем фактом, что элементарная геометрия рассматривает только такие фигуры и их свойства, которые сохраняются при движении и преобразовании подобия.

Одним из распространенных примеров геометрических преобразований является *симметрия относительно плоскости* (рис. 1). Наглядное представление об этой симметрии дают, например, отражение неба, берега озера или реки от поверхности воды, отражение в плоском зеркале, симметрия в архитектуре, технике и т. д.

***Лебеди, отраженные в слонах, 1937.* С. Дали**

Рис. 1

Как и на плоскости, в пространстве существуют *осевая и центральная симметрии*, *параллельный перенос*, которые часто встречаются в архитектуре, живописи и природе (рис. 2).

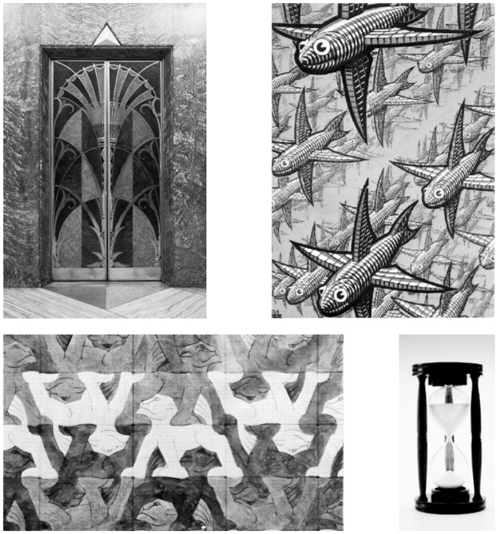


Рис. 2

Преобразование подобия находит применение при изготовлении увеличенных или уменьшенных копий предметов (рис. 3).

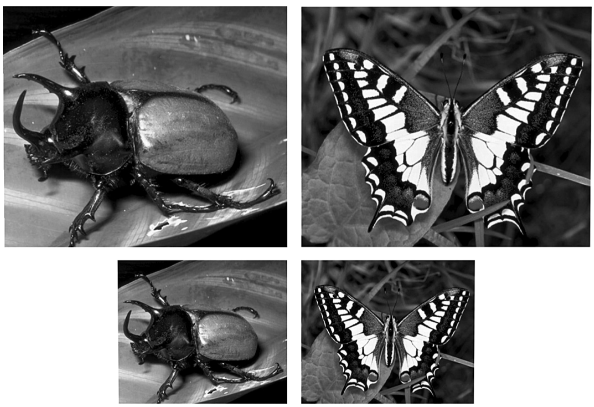


Рис. 3

При изучении геометрических преобразований сначала выясняют *вид преобразования*: является оно движением или преобразованием подобия или относится к другому виду преобразований. Для этого берут две произвольные точки A и B, их образы A_1 и B_1 и сравнивают расстояния AB и A_1B_1. Если эти расстояния равны, то имеем дело с движением. Если отношение этих расстояний постоянно, то получаем преобразование подобия. Если ни одно из этих условий не выполняется, то данное преобразование отличается от движения и преобразования подобия.

Напомним, что если при преобразовании некоторые точки переходят в себя, то они называются *неподвижными точками* данного преобразования. Наличие или отсутствие неподвижных точек является одним из возможных свойств геометрического преобразования.

Геометрические преобразования могут сильно отличаться друг от друга своими свойствами. Например, не все геометрические преобразования сохраняют прямолинейное расположение точек. Поэтому очень важно знать, сохраняют ли движения и преобразования подобия прямолинейное расположение точек, переводят ли они отрезок в отрезок, луч — в луч, угол — в равный угол и т. д.

Метод геометрических преобразований применяется как при изучении свойств этих преобразований, так и при решении задач, в которых непосредственно о геометрических преобразованиях ничего не говорится. В последнем случае предполагается перевод понятий, используемых в задаче, на язык геометрических преобразований. Это дает возможность использовать свойства геометрических преобразований и с их помощью решить задачу. Как и в планиметрии, применение метода геометрических преобразований часто начинается с выполнения преобразований данной фигуры или отдельных ее элементов. Допустим, нам надо доказать, что при движении плоскость переходит в плоскость. Для этого вначале на данной плоскости α выбираем три точки, не лежащие на одной прямой, рассматриваем их образы в движении, через полученные образы проводим плоскость α_1 и после этого устанавливаем, что любая точка плоскости α переходит в некоторую точку плоскости α_1.

1.2. Некоторые свойства движения и преобразования подобия

Рассмотрим общие свойства, относящиеся ко всем движениям и ко всем преобразованиям подобия. (Обратите внимание на то, какие из этих свойств аналогичны преобразованиям, известным из курса планиметрии, а какие — выполняются только для преобразований пространства.)

Теоремы 1

1. **Движение и преобразование подобия переводят точки, лежащие на прямой, в точки, также лежащие на прямой, причем сохраняют порядок взаимного расположения точек.**

2. **При движении и преобразовании подобия прямые переходят в прямые, лучи — в лучи, отрезки — в отрезки.**

3. **При движении отрезок переходит в равный ему отрезок, треугольник — в равный ему треугольник, угол (и при движении, и при преобразовании подобия) — в равный ему угол.**

4. **Последовательное выполнение (композиция) двух движений (преобразований подобия) есть также движение (преобразование подобия).**

5. **Если преобразование** П **(движение, преобразование подобия) переводит прямую в прямую, то преобразование** П **плоскость переводит в плоскость.**

6. **Если преобразование** П **прямую переводит в параллельную прямую, то преобразование** П **плоскость переводит в параллельную плоскость.**

Следствие. *Движение и преобразование подобия сохраняют параллельность и перпендикулярность прямых и плоскостей.*

Доказательства теорем 5—6.

5. 1) Пусть преобразование П (движение, преобразование подобия) прямую переводит в прямую. Докажем, что преобразование П плоскость переводит в плоскость. Пусть плоскость α (рис. 4) — некоторая данная плоскость. Возьмем на ней три точки A, B и C, не лежащие на одной прямой. Рассмотрим образы этих точек:

$$A_1 = \Pi(A),\ B_1 = \Pi(B),$$
$$C_1 = \Pi(C);$$

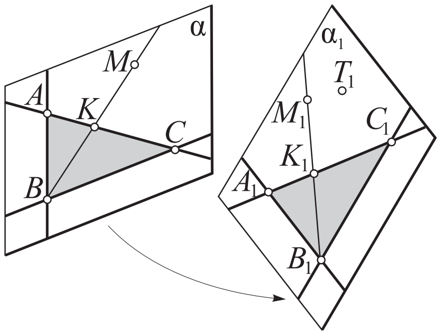


Рис. 4

2) точки A_1, B_1, C_1 не лежат на одной прямой. Проведем через них плоскость α_1. Докажем, что $\Pi(\alpha) = \alpha_1$;

3) для этого возьмем произвольную точку $M \in \alpha$ и докажем, что $\Pi(M) \in \alpha_1$. Пусть K — точка пересечения прямых AC и MB. Образ точки K — точка K_1 — должен лежать на прямой A_1C_1. Отметим точку $K_1 \in A_1C_1$;

4) тогда прямая BK должна перейти в прямую B_1K_1, а точка $M \in BK$ — в точку $M_1 \in B_1K_1$;

5) так как $M_1 \in B_1K_1$ и $B_1K_1 \subset \alpha_1$, то $M_1 \in \alpha_1$;

6) нетрудно теперь доказать, что произвольная точка $T_1 \in \alpha_1$ является образом некоторой точки $T \in \alpha$;

7) в итоге получаем, что $\Pi(\alpha) = \alpha_1$.

6. 1) Докажем, что если преобразование Π переводит прямую в параллельную прямую, то преобразование Π плоскость переводит в параллельную плоскость. Пусть $\Pi(\alpha) = \alpha_1$ (рис. 5);

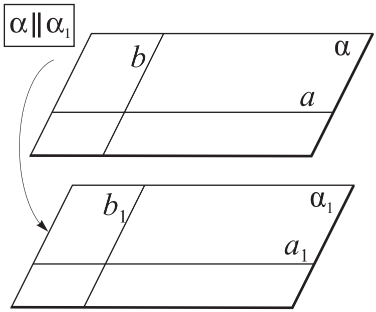


Рис. 5

2) в плоскости α возьмем две пересекающиеся прямые a и b;

3) пусть $\Pi(a) = a_1$, $\Pi(b) = b_1$. Прямые a_1 и b_1 пересекаются и принадлежат плоскости α_1;

4) по условию $a \parallel a_1$, $b \parallel b_1$. Тогда на основании признака параллельности двух плоскостей $\alpha \parallel \alpha_1$.

1.3. Примеры решения задач

Задача 1 (6, а, рис. 6).

Решение.

1) Пусть $M(x_1; y_1; z_1)$ и $N(x_2; y_2; z_2)$ — две произвольные точки пространства. Тогда точки $M_1(x_1; y_1; z_1 + 3)$ и $N_1(x_2; y_2; z_2 + 3)$ — их образы;

2) найдем квадраты расстояний MN и M_1N_1:

$$MN^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2,$$

$$M_1N_1^{\,2} = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 + 3 - z_1 - 3)^2;$$

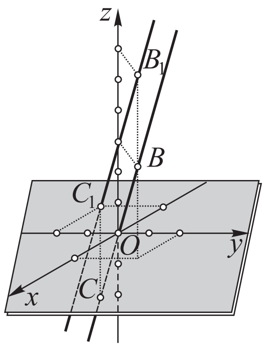


Рис. 6

3) отсюда $MN = M_1N_1$ и, значит, данное преобразование является движением;

4) поэтому это преобразование переводит прямые в прямые;

5) прямая BC (см. рис. 6) перейдет в прямую, проходящую через точки $B_1(1; 2; 6)$ и $C_1(-1; -2; 0)$.

Задача 2 (6, в, рис. 7).

Решение.

1) Так как данное преобразование является движением, то оно плоскость переводит в плоскость;

2) плоскость MNP перейдет в плоскость, проходящую через точки $M_1(4; 0; 3)$, $N_1(0; 3; 3)$, $P_1(0; 0; 5)$;

3) найдем уравнения плоскостей MNP и $M_1N_1P_1$. Воспользуемся общим уравнением плоскости:

$$Ax + By + Cz + D = 0. \qquad (*)$$

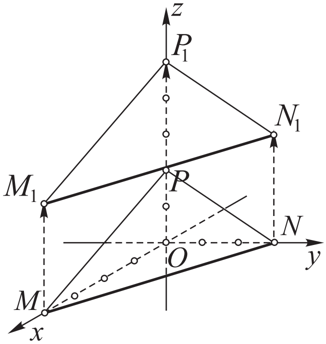


Рис. 7

Для плоскости MNP имеем:

$$\begin{cases} A\cdot 4 + B\cdot 0 + C\cdot 0 + D = 0, \\ A\cdot 0 + B\cdot 3 + C\cdot 0 + D = 0, \\ A\cdot 0 + B\cdot 0 + C\cdot 2 + D = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} 4A + D = 0, \\ 3B + D = 0, \\ 2C + D = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = -\frac{1}{4}D, \\ B = -\frac{1}{3}D, \\ C = -\frac{1}{2}D. \end{cases}$$

Выражения для A, B и C подставим в выражение (*):

$$-\frac{1}{4}Dx - \frac{1}{3}Dy - \frac{1}{2}Dz + D = 0, \quad -\frac{1}{4}x - \frac{1}{3}y - \frac{1}{2}z + 1 = 0.$$

Получаем уравнение плоскости MNP: $3x + 4y + 6z - 12 = 0$.

Для плоскости $M_1N_1P_1$ имеем:

$$\begin{cases} A\cdot 4 + B\cdot 0 + C\cdot 3 + D = 0, \\ A\cdot 0 + B\cdot 3 + C\cdot 3 + D = 0, \\ A\cdot 0 + B\cdot 0 + C\cdot 5 + D = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} 4A + 3C + D = 0, \\ 3B + 3C + D = 0, \\ 5C + D = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C = -\frac{1}{5}D, \\ B = -\frac{2}{15}D, \\ A = -\frac{1}{10}D. \end{cases}$$

Выражения для A, B и C подставим в выражение (*):

$$-\frac{1}{10}Dx-\frac{2}{15}Dy-\frac{1}{5}Dz+D=0,\quad -\frac{1}{10}x-\frac{2}{15}y-\frac{1}{5}z+1=0.$$

Получаем уравнение плоскости $M_1N_1P_1$: $3x+4y+6z-30=0$.

Ответ: $3x+4y+6z-12=0$, $3x+4y+6z-30=0$.

Задача 3 (6, ж, рис. 8).

Замысел доказательства. Воспользуемся методом геометрических преобразований.

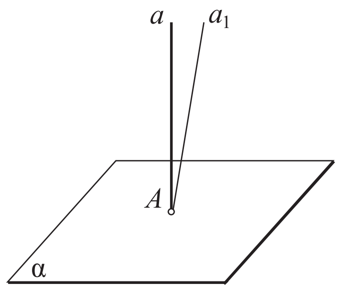


Рис. 8

Доказательство.

1) Пусть $a \cap \alpha = A$. Так как $A \in \alpha$, то по условию точка A является неподвижной. Значит, образ прямой a — прямая a_1 — проходит через точку A;

2) так как движение сохраняет перпендикулярность прямой и плоскости, то

$$\left.\begin{aligned}&\alpha \to \alpha,\\ &a \to a_1,\\ &a \perp \alpha\end{aligned}\right\} \Rightarrow\ a_1 \perp \alpha;$$

3) через точку A к плоскости α можно провести только одну перпендикулярную прямую. Поэтому прямые a и a_1 совпадают;

4) следовательно, в данном движении прямая a переходит сама в себя.

§ 2. ВИДЫ ДВИЖЕНИЙ. СИММЕТРИЯ ОТНОСИТЕЛЬНО ПЛОСКОСТИ, ЦЕНТРАЛЬНАЯ СИММЕТРИЯ

2.1. Определения

Если плоскость α проходит через середину отрезка AA_1 (рис. 9, *а*) и перпендикулярна к нему, то точки A и A_1 называются **симметричными относительно плоскости** α.

Если точка принадлежит плоскости α, то относительно этой плоскости она считается симметричной сама себе.

Преобразование, при котором каждая точка A (рис. 9, *б*) переходит в симметричную ей точку A_1 относительно плоскости α, называется **симметрией относительно плоскости**. Плоскость α называется *плоскостью симметрии*.

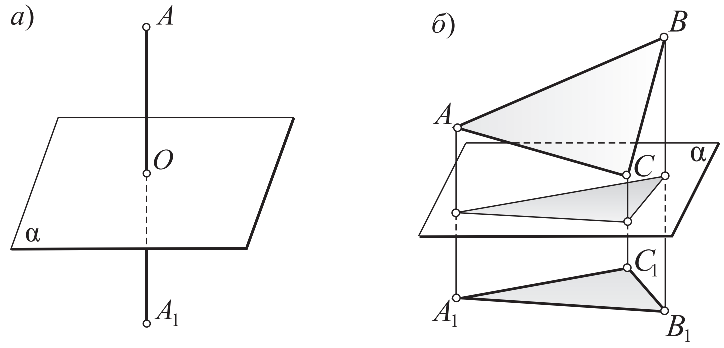


Рис. 9

Записывают: $\alpha(A) = A_1$. Эта запись означает, что при симметрии относительно плоскости α точка A переходит в точку A_1.

Если $\alpha(A) = A_1$, то и наоборот, $\alpha(A_1) = A$. Говорят, что точки A и A_1 являются *взаимно симметричными* относительно плоскости α.

Если прямая s проходит через середину отрезка AA_1 (рис. 10, *а*) и перпендикулярна к нему, то точки A и A_1 называются **симметричными относительно прямой** s. При этом точки прямой s считаются симметричными сами себе.

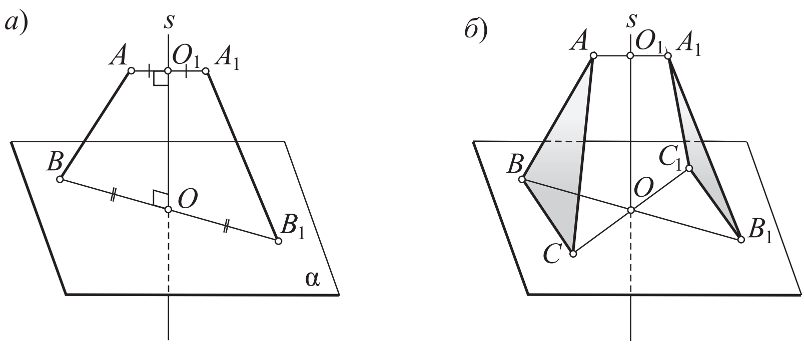


Рис. 10

Преобразование, при котором каждая точка A (рис. 10, *б*) переходит в точку A_1, симметричную относительно прямой s, называется **осевой симметрией**. Прямая s называется *осью симметрии*.

Записывают: $s(A) = A_1$. Эта запись означает, что при осевой симметрии с осью s точка A переходит в точку A_1.

Если $s(A) = A_1$, то, очевидно, $s(A_1) = A$. Говорят, что точки A и A_1 являются *взаимно симметричными* относительно оси s.

Если точка O является серединой отрезка AA_1 (рис. 11, *а*), то точки A и A_1 называются **симметричными относительно точки** O. При этом точка O считается симметричной сама себе.

Преобразование, при котором каждая точка A (рис. 11, *б*) переходит в симметричную ей точку A_1 относительно точки O, называется **центральной симметрией**. Точка O называется *центром симметрии*.

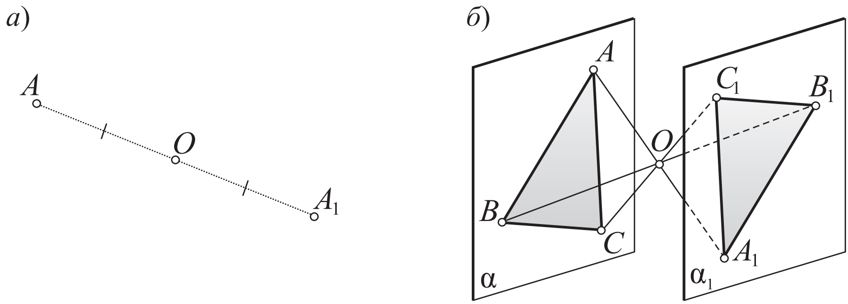


Рис. 11

Записывают: $O(A) = A_1$. Эта запись означает, что при центральной симметрии с центром O точка A переходит в точку A_1.

Очевидно, что если $O(A) = A_1$, то $O(A_1) = A$. Говорят, что точки A и A_1 являются *взаимно симметричными* относительно центра O.

Пусть $s \perp \alpha$ (рис. 12) и O — точка пересечения прямой s и плоскости α. **Поворотом вокруг оси** s **на угол** φ называется преобразование, которое в каждой плоскости, перпендикулярной к оси s, вызывает поворот вокруг центра O на угол φ.

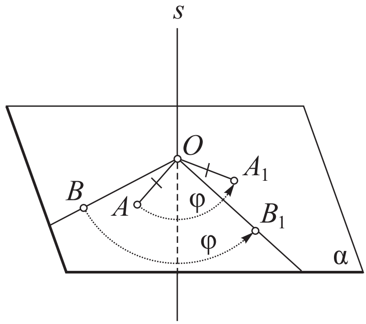


Рис. 12

Очевидно, что осевая симметрия пространства является поворотом вокруг оси на 180°.

Параллельным переносом на вектор $\vec{m}$ (рис. 13) называется преобразование пространства, при котором каждая точка A переходит в точку A_1 такую, что $\overrightarrow{AA_1} = \vec{m}$. Вектор $\vec{m}$ называется *вектором параллельного переноса* (вектором, на который совершается параллельный перенос).

Записывают: $\vec{m}(A) = A_1$. Эта запись означает, что при параллельном переносе на вектор $\vec{m}$ точка A перешла в точку A_1.

Винтовым движением с осью s, углом поворота φ и вектором переноса $\vec{m}$, параллельным оси s (рис. 14), называется последовательное выполнение (композиция) поворота вокруг оси s на угол φ и параллельного переноса на вектор $\vec{m}$.

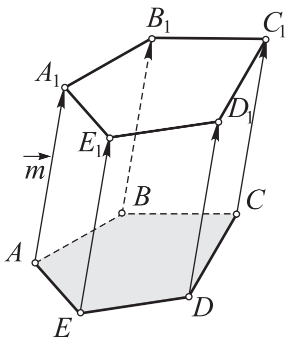


Рис. 13

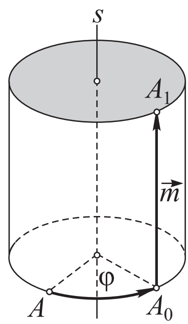


Рис. 14

2.2. Свойства движений

Теоремы 2

1. **Каждое из следующих преобразований: а) симметрия относительно плоскости; б) центральная симметрия; в) поворот вокруг оси; г) осевая симметрия; д) параллельный перенос; е) винтовое движение — является движением;**

2. **При центральной симметрии и параллельном переносе прямая переходит в параллельную прямую, плоскость — в параллельную плоскость.**

Доказательство.

1. а) Преобразование пространства может вызывать в некоторой плоскости известное из планиметрии преобразование. Часто бывает удобно воспользоваться свойствами этого планиметрического преобразования.

1) Пусть даны две точки A и B (рис. 15) и им симметричные относительно плоскости α точки A_1 и B_1. Так как AA_1 и BB_1 перпендикулярны к плоскости α, то они параллельны;

2) поэтому прямые AA_1 и BB_1 лежат в одной плоскости. Обозначим ее β;

3) пусть s — прямая пересечения плоскостей α и β. Имеем: $AA_1 \perp s$, $BB_1 \perp s$ и прямая s делит отрезки AA_1 и BB_1 пополам;

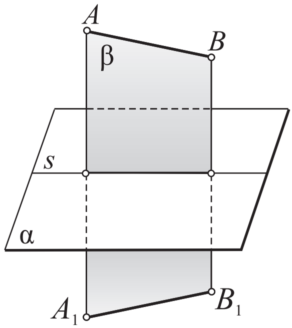


Рис. 15

4) это означает, что симметрия относительно плоскости α в плоскости β вызывает известную из планиметрии осевую симметрию с осью s;

5) в планиметрии доказывалось, что осевая симметрия является движением. Поэтому $AB = A_1B_1$;

6) отсюда следует, что симметрия относительно плоскости является движением.

1. б) 1) Так как точки A, A_1, B, B_1 и O (рис. 16) лежат в одной плоскости (обозначим ее α), то нетрудно заметить, что центральная симметрия пространства с центром O вызывает в плоскости α центральную симметрию с тем же центром;

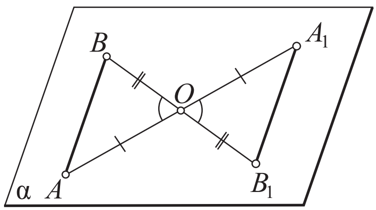


Рис. 16

2) из планиметрии известно, что центральная симметрия плоскости является движением. Поэтому $AB = A_1B_1$;

3) это означает, что центральная симметрия пространства является движением.

(Продолжение смотрите в следующем параграфе.)

2.3. Примеры решения задач

Задача 1 (12, а, рис. 17). В этой задаче требуется понятие перпендикулярности двух плоскостей перевести на язык геометрических преобразований.

Доказательство.

1) Пусть $\alpha \cap \beta = a$. Так как $a \subset \alpha$, то при симметрии относительно плоскости α прямая a перейдет сама в себя;

2) пусть плоскость β_1 — образ плоскости β при симметрии относительно плоскости α. Так как прямая a переходит сама в себя, то $a \subset \beta_1$;

3) движение сохраняет перпендикулярность плоскостей. Поэтому $\beta_1 \perp \alpha$;

4) плоскости β и β_1 обе проходят через прямую a и перпендикулярны к плоскости α. Поэтому β и β_1 совпадают;

5) следовательно, при симметрии относительно плоскости α плоскость β переходит сама в себя: $\alpha(\beta) = \beta$.

Задача 2 (12, б, рис. 18). Данная задача аналогична предыдущей.

Доказательство.

1) Симметрия относительно плоскости α является движением, в котором все точки плоскости α остаются неподвижными;

2) так как $a \perp \alpha$, то в таком движении прямая a переходит сама в себя (см. задачу 3 (6, ж) из § 1);

3) следовательно, при симметрии относительно плоскости α прямая a переходит сама в себя: $\alpha(a) = a$.

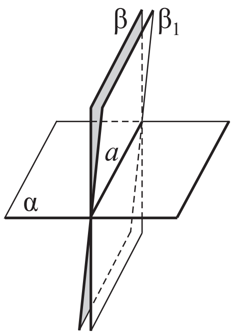


Рис. 17

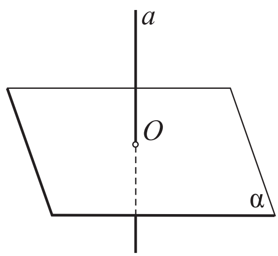


Рис. 18

Задача 3 (12, г, рис. 19). *Замысел решения.* Воспользуемся свойствами центральной симметрии.

Доказательство.

1) Пусть $O_1(a) = a'$. Так как при центральной симметрии прямая переходит в параллельную прямую, то $a \parallel a'$;

2) аналогично: $a_1 \parallel a'$;

3) тогда $(a \parallel a'$ и $a_1 \parallel a') \Rightarrow a \parallel a_1$.

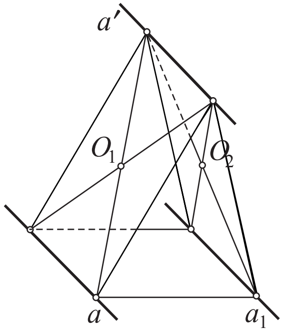


Рис. 19

§ 3. ПОВОРОТ ВОКРУГ ОСИ, ОСЕВАЯ СИММЕТРИЯ

3.1. Теория

Продолжим доказательство теорем 2.

Доказательство.

1. в) (Методом равных треугольников, рис. 20.)

1) Пусть при повороте вокруг оси s на угол φ точки A и B переходят соответственно в точки A_1 и B_1. Докажем, что $AB = A_1B_1$;

2) нетрудно доказать, что отрезок, параллельный оси поворота, переходит в равный отрезок, причем параллельный оси поворота. Далее воспользуемся этим;

3) построения: через концы отрезка AB проведем плоскости α и β, перпендикулярные к оси поворота; через точки A и A_1 проведем соответственно перпендикуляры AC и A_1C_1 к плоскости α;

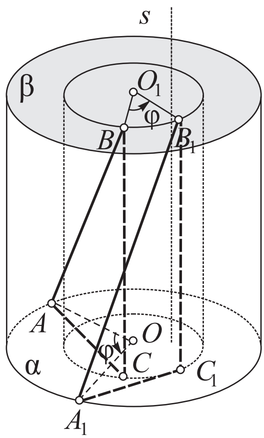


Рис. 20

4) очевидно, что в данном повороте вокруг оси отрезок BC переходит в равный отрезок B_1C_1 (см. п. 2), AC — в равный отрезок A_1C_1 (поворот вокруг оси в плоскости α вызывает поворот вокруг точки O, который, как известно из планиметрии, сохраняет расстояние между точками), а значит, треугольник ABC — в треугольник $A_1B_1C_1$;

5) так как треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ — прямоугольные и их катеты равны, то эти треугольники равны. Отсюда $AB = A_1B_1$.

1. г) Справедливость этой теоремы непосредственно следует из предыдущей. (Убедитесь в этом.)

3.2. Примеры решения задач

Задача 1 (17, а, рис. 21).

Замысел решения. Воспользуемся свойствами поворота.

Доказательство.

1) Пусть $A \in \alpha$, $B \in \alpha$, и в данном повороте точка B перейдет в точку B_1;

2) так как $s \perp \alpha$ и $AB \subset \alpha$, то $s \perp AB$;

3) в данном повороте $s \to s$, $AB \to AB_1$;

4) так как поворот является движением, то он сохраняет перпендикулярность прямых. Поэтому

$$\left.\begin{aligned} &s \perp AB, \\ &s \to s, \\ &AB \to AB_1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow s \perp AB_1;$$

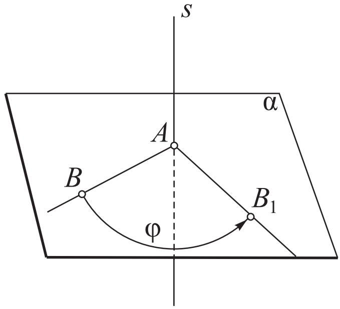


Рис. 21

5) если $s \perp AB_1$, то $B_1 \in \alpha$;

6) поэтому при повороте относительно оси s плоскость α перейдет сама в себя.

Задача 2 (17, в, рис. 22).

Доказательство.

1) Пусть $s(A) = A_1$ и $\alpha(A_1) = A_2$;

2) рассмотрим прямую $a = \alpha \cap AA_1A_2$;

3) симметрия относительно оси s в пространстве в плоскости AA_1A_2 вызывает симметрию относительно этой же оси s;

4) симметрия относительно плоскости α в плоскости AA_1A_2 вызывает симметрию относительно прямой a;

5) так как $s \perp \alpha$ и $a \subset \alpha$, то $s \perp a$;

6) последовательное выполнение (композиция) двух симметрий с перпендикулярными ося-

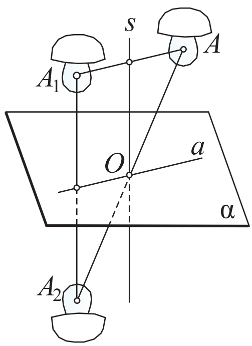


Рис. 22

ми s и a в плоскости AA_1A_2 является центральной симметрией относительно точки $O = s \cap a$;

7) значит, точки A и A_2 симметричны относительно точки O и в плоскости AA_1A_2, и в пространстве;

8) поэтому $\alpha \cdot s = O$.

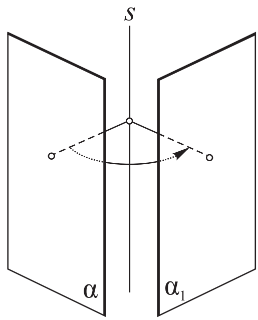


Рис. 23

Задача 3 (17, д, рис. 23). *Замысел решения.* Воспользуемся свойствами поворота.

Доказательство.

1) Любое движение (значит, и поворот вокруг оси) сохраняет параллельность прямой и плоскости;

2) так как при повороте вокруг оси s

$$\left.\begin{array}{l} s \to s, \\ \alpha \to \alpha_1, \\ s \parallel \alpha \end{array}\right\} \Rightarrow s \parallel \alpha_1.$$

§ 4. ПАРАЛЛЕЛЬНЫЙ ПЕРЕНОС, ВИНТОВОЕ ДВИЖЕНИЕ

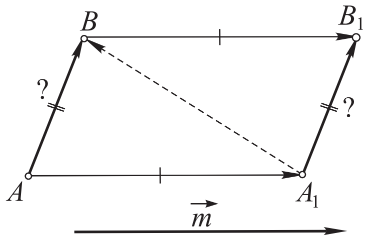
4.1. Теория

Продолжим доказательство теорем 2.

1. д) 1) Этот способ основан на связи параллельного переноса пространства с параллельным переносом плоскости. Параллельный перенос пространства на вектор, параллельный плоскости ABB_1A_1, вызывает в этой плоскости параллельный перенос на тот же вектор $\vec{m}$ (рис. 24);

2) параллельный перенос плоскости является движением;

3) поэтому $AB = A_1B_1$.



$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{A_1B} = \ldots = \overrightarrow{A_1B_1}$

Рис. 24

1. е) Последовательное выполнение (композиция) движений есть движение. Поэтому винтовое движение является движением.

2. а) 1) Пусть при центральной симметрии с центром O прямая AB переходит в прямую A_1B_1 (рис. 25). Прямые AB, A_1B_1 и точка O лежат в одной плоскости;

2) поэтому прямую A_1B_1 можно рассматривать как образ прямой AB при центральной симметрии плоскости ABA_1B_1 относительно того же центра;

3) как известно из планиметрии, при центральной симметрии прямая переходит в параллельную прямую. Следовательно, $AB \parallel A_1B_1$.

2. б) 1) Пусть при параллельном переносе на вектор $\vec{m}$ (рис. 26) прямая AB переходит в прямую A_1B_1. Ранее было доказано, что $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A_1B_1}$;

2) отсюда следует, что $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{A_1B_1}$;

3) поэтому $AB \parallel A_1B_1$.

По аналогии с планиметрией можно сформулировать следующее определение.

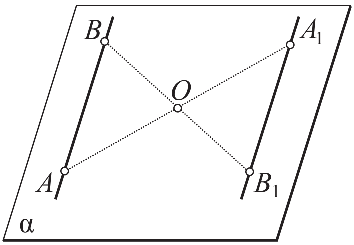


Рис. 25

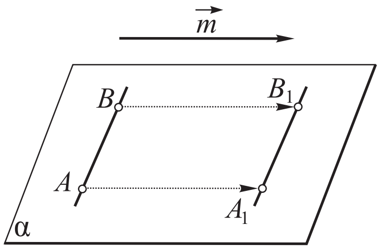


Рис. 26

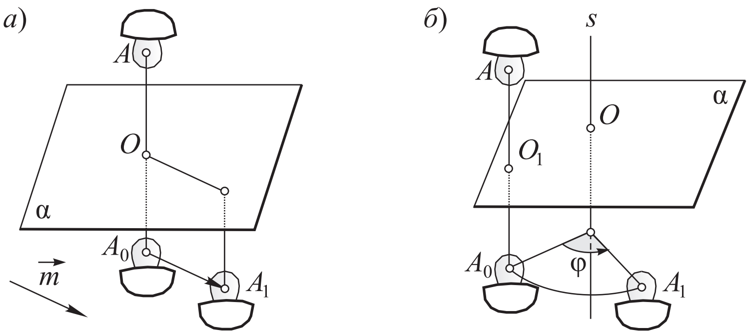


Рис. 27

Две фигуры называются **равными**, если существует движение, которое одну из них переводит в другую.

Существуют и другие примеры движений. Приведем их определения.

Скользящей симметрией (рис. 27, *а*) называется последовательное выполнение симметрии относительно плоскости α и параллельного переноса на вектор $\vec{m}$, параллельный этой плоскости.

Поворотной симметрией (рис. 27, *б*) называется последовательное выполнение симметрии относительно плоскости α и поворота на некоторый угол φ вокруг оси s, перпендикулярной к этой плоскости.

4.2. Примеры решения задач

Задача 1 (20, а, рис. 28). В данной задаче предлагается доказать одно из свойств параллельного переноса.

Доказательство.

1) Пусть $A \in a$ и $\vec{m}(A) = A_1$. Тогда $\overrightarrow{AA_1} = \vec{m}$ (по определению параллельного переноса);

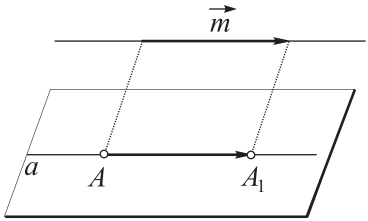


Рис. 28

2) так как $\overrightarrow{AA_1} = \vec{m}$, то $AA_1 \parallel \vec{m}$;

3) имеем: $a \parallel \vec{m}$ (по условию) и $AA_1 \parallel \vec{m}$ (по п. 2);

4) поэтому прямые a и AA_1 совпадают (как параллельные прямые, имеющие общую точку A); значит, $A_1 \in a$;

5) это означает, что любая точка A прямой a при параллельном переносе на данный вектор $\vec{m}$ переходит в точку $A_1 \in a$;

6) значит, $\vec{m}(a) = a$.

Задача 2 (20, в, рис. 29).

Решение.

1) По определению параллельного переноса $\overrightarrow{AA_1} = \vec{m}$;

2) по определению координат вектора $\overrightarrow{AA_1}\,(x - a;\, y - b;\, z - c)$;

3) поэтому

$x - a = 2,\ y - b = 3,\ z - c = 4$;

4) отсюда $x = a + 2, y = b + 3, z = c + 4$.

Ответ: $A_1(a + 2; b + 3; c + 4)$.

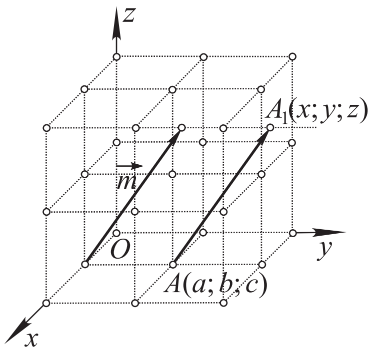


Рис. 29

Задача 3 (20, е, рис. 30). Данная задача является типичным примером задачи на применение метода геометрических преобразований.

Доказательство.

1) Пусть точка A принадлежит линии пересечения плоскостей α и γ, точка B — линии пересечения плоскостей β и γ. Воспользуемся параллельным переносом на вектор $\vec{m} = \overrightarrow{AB}$;

2) так как при параллельном переносе плоскость переходит в параллельную плоскость, то $\vec{m}(\alpha) = \beta$;

3) $\vec{m}(\gamma) = \gamma$;

4) так как при параллельном переносе (как и при любом движении) перпендикулярность плоскостей сохраняется, то

$$\left.\begin{array}{l}\alpha \perp \gamma,\\ \vec{m}(\alpha) = \beta,\\ \vec{m}(\gamma) = \gamma\end{array}\right\} \Rightarrow \beta \perp \gamma.$$

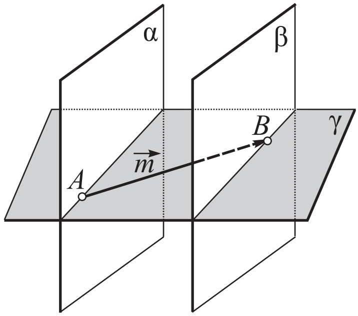


Рис. 30

§ 5. ГОМОТЕТИЯ КАК ПРИМЕР ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ПОДОБИЯ

5.1. Теория

Гомотетией с центром O (рис. 31) **и коэффициентом** $k \neq 0$ называется такое преобразование пространства, при котором каждая точка X переходит в точку X_1 такую, что $\overrightarrow{OX_1} = k\overrightarrow{OX}$.

Теоремы 3

> 1. **Гомотетия является преобразованием подобия.**
> 2. **При гомотетии прямая переходит в параллельную прямую, плоскость — в параллельную плоскость.**

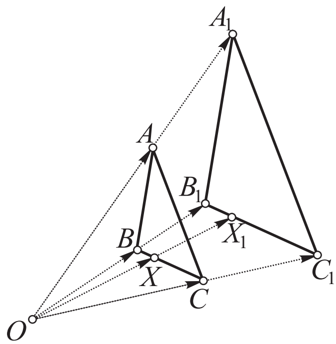


Рис. 31

Доказательства.

1. 1) Точки O, A, B, A_1, B_1 лежат в одной плоскости β (рис. 32);

2) гомотетия пространства с центром O вызывает в этой плоскости гомотетию с тем же центром;

3) причем, как известно из планиметрии, $A_1B_1 = |k|\,AB$.

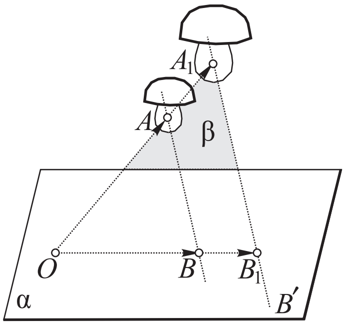


Рис. 32

2. 1) Гомотетия пространства с центром O вызывает в плоскости β гомотетию с тем же центром. Как известно из планиметрии, гомотетия прямую переводит в параллельную прямую;

2) поэтому $A_1B_1 \parallel AB$;

3) кроме того, в силу теоремы 1.6 гомотетия плоскость будет переводить в параллельную плоскость.

5.2. Примеры решения задач

Задача 1 (см. рис. 32). Гомотетия пространства задана центром O и парой гомотетичных точек A и A_1. Дана некоторая точка B, не принадлежащая прямой OA. Постройте точку B_1, гомотетичную точке B в заданной гомотетии.

Решение.

1) Через прямую OA и точку B проведем плоскость β;

2) в плоскости β проведем прямую AB и прямую A_1B', параллельную прямой AB;

3) точку B_1 строим как точку пересечения прямых A_1B' и OB. Точка B_1 — искомая точка (докажите это).

Задача 2 (23, б, рис. 33).

Построение. 1) На прямой a возьмем произвольную точку M и построим ее образ M_1 в данной гомотетии:

$$M_1 = AM \cap m,$$

где прямая m проходит через точку A_1 и $m \parallel AM$;

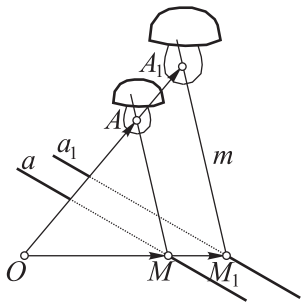


Рис. 33

2) через точку M_1 проведем прямую a_1, параллельную прямой a. Прямая a_1 — искомая прямая, гомотетичная прямой a в данной гомотетии.

Доказательство и *исследование* проведите самостоятельно.

Задача 3 (23, в, рис. 34).

Поиск решения. 1) Искомую точку X нетрудно построить, если вначале построим гомотетичную ей точку X_1. Узнаем, какими свойствами обладает точка X_1;

2) точка X_1 должна принадлежать данной плоскости α (по условию). Кроме того, она лежит на прямой m, проходящей через точку A_1 и параллельной прямой a;

3) итак, точка X_1 находится как точка пересечения прямой m и плоскости α:

$$X_1 = m \cap \alpha;$$

4) зная точку X_1 , строим точку X.

Построение. Строим:

1) m: $A_1 \in m$, $m \parallel a$;

2) $X_1 = m \cap \alpha$;

3) OX_1;

4) $X = OX_1 \cap a$.

Точка X — искомая точка.

Доказательство и *исследование* проведите самостоятельно.

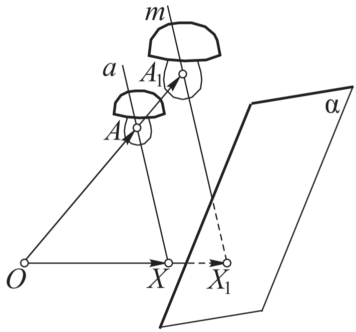


Рис. 34

§ 6. МЕТОД ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

Мы уже познакомились с целым рядом задач, которые были решены с помощью метода геометрических преобразований. Обратимся к новым задачам.

6.1. Задачи на композиции преобразований

С помощью метода геометрических преобразований можно решать различные геометрические задачи. Убедимся в том, что изученные ранее свойства геометрических преобразований позволяют установить ряд новых их свойств.

Задача 1. Осевую симметрию пространства можно представить как последовательное выполнение (композицию) двух симметрий относительно двух взаимно перпендикулярных плоскостей, проходящих через ось симметрии. Докажите это.

Доказательство.

1) Пусть $s(A) = A'$ (рис. 35). Проведем через s произвольную плоскость α и плоскость β, перпендикулярную α. Положим, что $\alpha(A) = A_1$ и $\beta(A_1) = A_2$. Докажем, что A' и A_2 совпадают: $A' = A_2$;

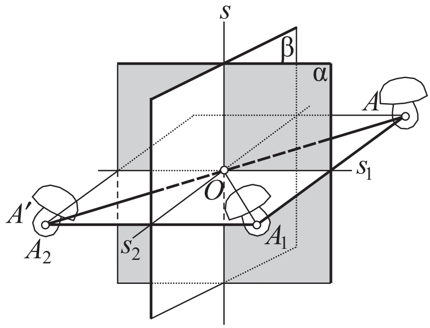


Рис. 35

2) в самом деле, так как $AA_1 \perp \alpha$, то $AA_1 \perp s$ и $A_1A_2 \perp \beta$, следовательно, $A_1A_2 \perp s$. Итак, ось s перпендикулярна плоскости AA_1A_2, пересекающей s в точке O, в которой ее пересекает AA';

3) плоскость AA_1A_2 пересекает плоскости α и β по перпендикулярным прямым s_1 и s_2. В силу симметрии имеем: $OA = OA_1 = OA_2 = OA'$; $\angle AOs_1 = \angle s_1OA_1$; $\angle A_1Os_2 = \angle s_2OA_2$;

4) так как $\angle s_1OA_1 + \angle A_1Os_2 = 90°$, то

$$\angle AOs_1 + \angle s_1OA_1 + \angle A_1Os_2 + \angle s_2OA_2 = 180°,$$

отсюда $\angle AOA_2 = 180°$;

5) если $\angle AOA_2 = 180°$ и $OA_2 = OA'$, то точка A_2 совпадает с точкой A'.

Задача 2. Центральную симметрию пространства можно представить как последовательное выполнение трех симметрий относительно трех перпендикулярных плоскостей, проходящих через центр симметрии. Докажите это.

Доказательство.

1) Пусть O — центр данной симметрии и $O(A) = A'$ (рис. 36). Проведем через O произвольную плоскость α и через ту же точку O — перпендикулярную к ней плоскость β. Пусть $\alpha \cap \beta = s_1$. Через точку O проведем еще плоскость γ, перпендикулярную s_1;

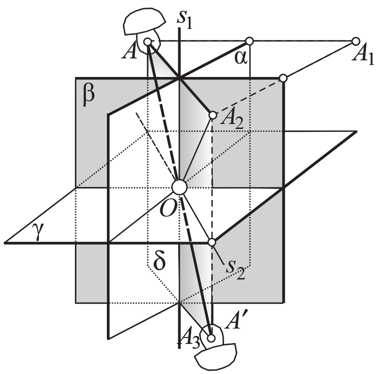


Рис. 36

2) пусть $\alpha(A) = A_1$, $\beta(A_1) = A_2$, $\gamma(A_2) = A_3$. Докажем, что $A_3 = A'$;

3) последовательное выполнение двух симметрий относительно плоскостей α и β на основании задачи 1 можно заменить симметрией относительно оси s_1. Тогда в силу симметрии $OA = OA_2 = OA_3 = OA'$;

4) обратимся теперь к углам. Для этого через точку A и прямую s_1 проведем плоскость δ. Очевидно, что точки A_2, A_3 и A' лежат в этой плоскости. Пусть $\delta \cap \gamma = s_2$. Тогда в силу симметрии будем иметь: $\angle AOs_1 = \angle s_1OA_2$; $\angle A_2Os_2 = \angle s_2OA_3$;

5) так как $\angle s_1OA_2 + \angle A_2Os_2 = 90°$, то

$$\angle AOs_1 + \angle s_1OA_2 + \angle A_2Os_2 + \angle s_2OA_3 = 180°.$$

Поэтому $\angle AOA_3 = 180°$;

6) если $\angle AOA_3 = 180°$ и $OA_3 = OA'$, то точка $A_3 = A'$.

Задача 3. Поворот вокруг оси можно заменить последовательным выполнением двух симметрий относительно двух плоскостей, пересекающихся по оси поворота; линейный угол между плоскостями равен половине угла поворота. Докажите это.

Доказательство.

1) Пусть при повороте вокруг оси s на угол φ (рис. 37) точка A переходит в точку A'. Проведем через s произвольную плоскость α. Пусть $\alpha(A) = A_1$. Построим далее плоскость симметрии точек A_1 и A' — плоскость β: $\beta(A_1) = A'$. Докажем, что плоскость β проходит через ось s и пересекает α под углом $\frac{\varphi}{2}$;

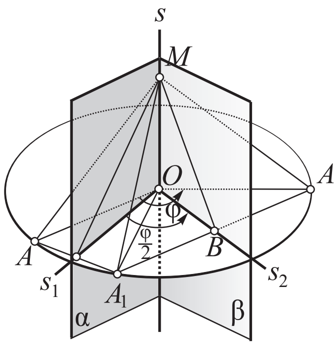


Рис. 37

2) в самом деле, возьмем произвольную точку $M \in s$. Так как симметрия относительно плоскости и поворот вокруг оси являются движениями, то $MA_1 = MA = MA'$;

3) поэтому $\Delta MA_1A'$ является равнобедренным. Обозначим через B середину отрезка A_1A'. Отрезок MB является медианой равнобедренного треугольника MA_1A'. Значит, $A_1A' \perp MB$;

4) учитывая, что $A_1A' \perp \beta$, получаем, что $MB \subset \beta$. Отсюда $M \in \beta$. Так как M — произвольная точка оси s, то $s \subset \beta$;

5) перейдем теперь к рассмотрению углов. В силу симметрии $\angle AOs_1 = \angle s_1OA_1$; $\angle A_1Os_2 = \angle s_2OA'$;

6) так как

$$PAOs_1 + \angle s_1OA_1 + \angle A_1Os_2 + \angle s_2OA' = \angle AOA' = \varphi,$$

то $\angle s_1Os_2 = \dfrac{\varphi}{2}$.

6.2. Задачи на совмещение равных фигур

Следующие задачи связаны с понятием равных и ориентированных фигур.

Две равные фигуры называются *одинаково ориентированными* (рис. 38, *а*), если каждые четыре не лежащие в одной плоскости точки A, B, C, D первой фигуры и соответствующие им точки A', B', C', D' второй фигуры расположены так, что для наблюдателя, смотрящего поочередно из точек D и D' на треугольники ABC и $A'B'C'$, они окажутся одинаково ориентированными. Если при этих же условиях треугольники ABC и $A'B'C'$ (рис. 38, *б*) будут противоположно ориентированными, то и фигуры называются *противоположно ориентированными*. (Заметим, что точки A, B, C, D и A', B', C', D' — вершины соответственных тетраэдров.)

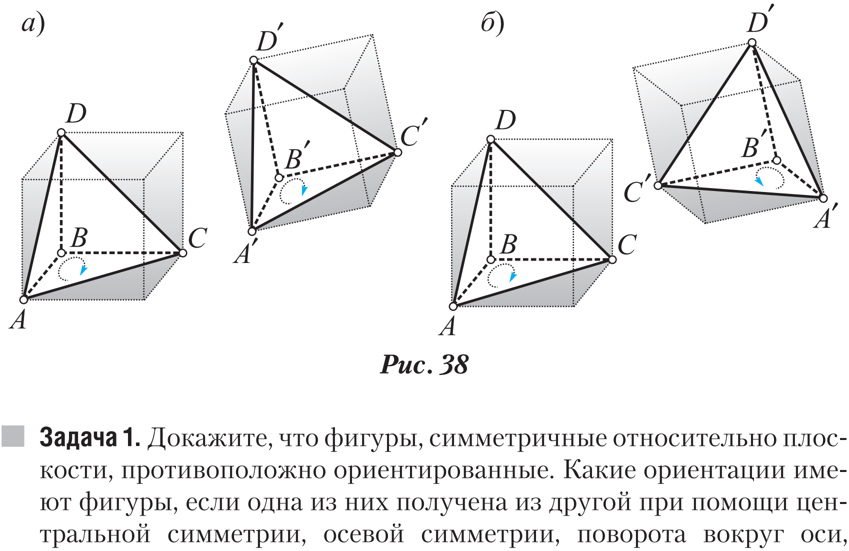


Рис. 38

Задача 1. Докажите, что фигуры, симметричные относительно плоскости, противоположно ориентированные. Какие ориентации имеют фигуры, если одна из них получена из другой при помощи центральной симметрии, осевой симметрии, поворота вокруг оси, параллельного переноса, винтового движения? (Решите самостоятельно.)

Задача 2. Две равные и одинаково ориентированные фигуры можно совместить не более чем четырьмя последовательными симметриями относительно четырех плоскостей. Докажите это.

Доказательство.

1) При доказательстве воспользуемся утверждением, что плоскость симметрии двух данных точек есть геометрическое место точек, равноудаленных от этих точек (докажите самостоятельно);

2) приступим теперь к решению данной задачи. Пусть $\Phi = \Phi'$ (рис. 39, *а*) и точкам A, B, C, D, E, ... первой фигуры соответствуют точки A', B', C', D', E', ... второй фигуры (точки A, B, C, D и A', B', C', D' — вершины соответственных тетраэдров);

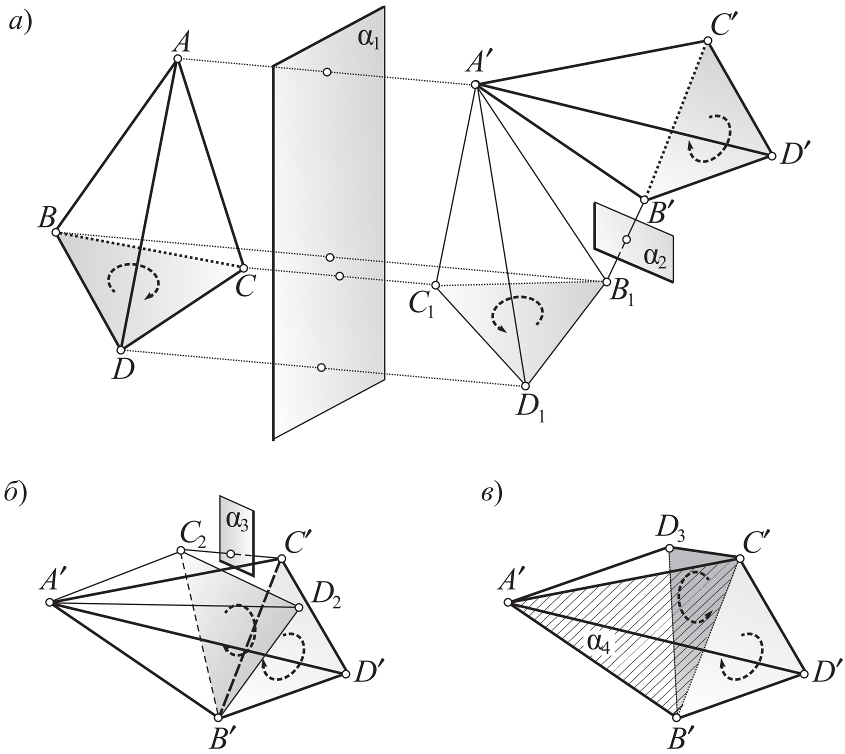


Рис. 39

3) проведем плоскость α_1 — плоскость симметрии точек A и A'. Выполним симметрию относительно этой плоскости. При этом точка A перейдет в точку A', B — в B_1, C — в C_1, D — в D_1, E — в E_1 и т. д. Получили фигуру Φ_1, которая противоположно ориентирована с фигурой Φ'. У фигур Φ_1 и Φ' оказались совмещенными соответственные точки одной пары;

4) проведем плоскость симметрии точек B_1 и B' — плоскость α_2 и выполним симметрию относительно этой плоскости. Так как $A'B' = A'B_1$, то плоскость α_2 пройдет через точку A'. Поэтому при симметрии относительно плоскости α_2 точка A' останется неподвижной. Точка B_1 при этом перейдет в точку B', C_1, — в C_2, D_1 — в D_2, E_1 — в E_2 и т. д. Получили фигуру Φ_2, которая с фигурой Φ' одинаково ориентирована. У фигур Φ_2 и Φ' оказались совмещенными уже две пары соответственных точек;

5) проведем плоскость симметрии точек C_2 и C' — плоскость α_3 (рис. 39, *б*). При симметрии относительно этой плоскости точки A' и B' окажутся неподвижными (так как они лежат на этой плоскости), а точка C_2 перейдет в точку C'. Точка D_2 при этом перейдет в точку D_3, E_2 — в E_3 и т. д. Получили фигуру Φ_3, которая противоположно ориентирована с фигурой Φ'. Фигуры Φ_3 и Φ' имеют совмещенными уже три пары соответственных точек;

6) точки A', B', C' не лежат на одной прямой. В противном случае точки A', B', C' и D' оказались бы лежащими в одной плоскости, но с самого начала эти точки мы выбираем не лежащими в одной плоскости;

7) через точки A', B' и C' проведем плоскость α_4 (рис. 39, *в*). Так как фигуры Φ_3 и Φ' противоположно ориентированы, то точки D_3 и D' лежат по разные стороны от плоскости α_4. В силу равенств $A'D' = A'D_3$, $B'D' = B'D_3$, $C'D' = C'D_3$ плоскость симметрии точек D' и D_3 проходит через точки A', B' и C', а значит, эта плоскость совпадает с плоскостью α_4;

8) аналогично плоскости симметрии остальных соответственных точек совпадают с плоскостью α_4. Это означает, что при выполнении симметрии относительно плоскости α_4 фигура Φ_3 совпадает с фигурой Φ';

9) в итоге совмещение фигур Φ и и Φ' достигнуто четырьмя симметриями относительно четырех плоскостей.

Рассмотренные факты позволяют решить следующую задачу.

Задача 3. а) Две равные и одинаково ориентированные фигуры можно совместить не более чем двумя следующими движениями: оба движения — параллельные переносы; первое движение — перенос, второе — поворот вокруг оси; первое движение — поворот вокруг оси, второе — перенос; оба движения — повороты вокруг оси.

б) Две равные и одинаково ориентированные фигуры можно совместить одним винтовым движением.

Замечание. Для выработки умения решать задачи методом геометрических преобразований рекомендуем прорешать задачи из раздела «Задания для самостоятельной работы».

Тема 2 МНОГОГРАННИКИ, ТЕЛА ВРАЩЕНИЯ И ИХ КОМБИНАЦИИ

§ 1. ПОНЯТИЕ «МНОГОГРАННИК». ЦИЛИНДР

1.1. Понятия «тело» и «многогранник»

Основными видами геометрических фигур являются линии, поверхности и тела. Представление о линии дает тонкая нить, от толщины и ширины которой легко отвлечься, а о поверхности — тонкая пленка, толщиной которой можно пренебречь. Линии и поверхности могут быть плоскими или пространственными фигурами. Тела всегда являются пространственными фигурами. Примерами тел являются многогранники, цилиндр, конус, шар и его части. Строгое определение понятия «тело» дается в вузовском курсе. Мы ограничимся лишь наглядным представлением об этом понятии.

Наглядно *тело* можно представить как цельную часть пространства, отделенную от другой его части некоторой поверхностью. Эта поверхность принадлежит телу и всюду «прилегает» к его внутренности.

Тело может быть ограниченным или неограниченным. В школьном курсе рассматриваются главным образом ограниченные тела.

Ограниченное тело можно определить как тело, содержащееся внутри тетраэдра или куба.

Многогранником называется ограниченное тело, поверхность которого состоит из конечного числа многоугольников. Многоугольники называются *гранями* многогранника, вершины многоугольников — *вершинами* многогранника, стороны многоугольников — *ребрами* многогранника.

В школьном курсе изучаются многогранники, которые удовлетворяют двум условиям:

1) для них выполняется равенство Г + В – Р = 2, где Г — число граней, В — число вершин, Р — число ребер (это равенство называется *эйлеровой характеристикой* многогранника);

2) они являются *выпуклыми*, т. е. располагаются по одну сторону относительно плоскости каждой своей грани.

На рисунке 40, *а* показана фигура, являющаяся объединением тетраэдра $PABC$ и отрезка PK (в виде «шпиля» к тетраэдру). Такая фигура не является телом, так как точки отрезка PK принадлежат поверхности фигуры и «не прилегают» к внутренности этой фигуры.

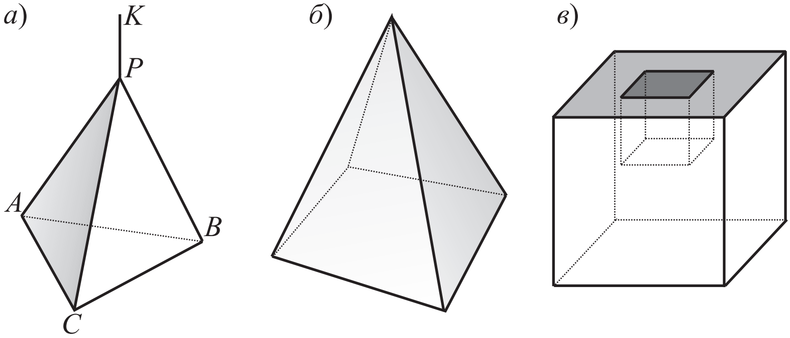


Рис. 40

Фигура, показанная на рисунке 40, *б*, является телом, многогранником. Этот многогранник является выпуклым, и для него выполняется условие: Г + В – Р = 5 + 5 – 8 = 2.

Фигура, показанная на рисунке 40, *в*, также является телом, многогранником. Данный многогранник можно представить как куб, из которого сверху выпилен меньший куб, при этом образовался многогранник с отверстием, которое не является сквозным. Этот многогранник не является выпуклым, и для него Г + В – Р = 11 + 16 – 24 = 3 ≠ 2. Как уже было сказано, такие многогранники в школьном курсе не изучаются.

1.2. Цилиндры

Форму цилиндра имеют трубы, монеты, колонны и т. д. В основании цилиндров обычно лежит круг. В геометрии цилиндрами называют не только такие тела. В основании цилиндра может лежать фигура, ограниченная произвольной замкнутой, не имеющей самопересечений, линией. Особый интерес представляют два вида цилиндров: прямые круговые цилиндры и призмы. Сформулируем определения (рис. 41).

Пусть в некоторой плоскости α (рис. 42, *а—в*) задана фигура Ф, ограниченная произвольной замкнутой, не имеющей самопересечений, линией. Из некоторой точки A плоскости α проведем отрезок AA_1, не лежащий на этой плоскости. Подвергнем фигуру Ф параллельному переносу на вектор $\overrightarrow{AA_1}$. Каждая точка X фигуры Ф перейдет при этом в некоторую точку X_1 фигуры Φ_1. Множество всех отрезков XX_1 образует тело, которое называется **цилиндром**.

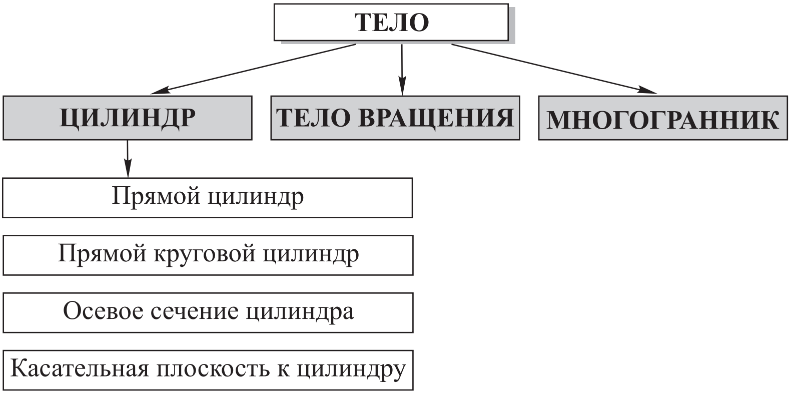


Рис. 41

Из свойств параллельного переноса следует, что фигура Φ_1 лежит в плоскости $\alpha_1 \parallel \alpha$, $\Phi_1 = \Phi$. Фигуры Φ и Φ_1 называются *основаниями* цилиндра, а отрезки XX_1 — *образующими* цилиндра.

Прямым цилиндром называется цилиндр, образующие которого перпендикулярны к плоскостям оснований (рис. 42, *б*, *в*). В противном случае цилиндр называется **наклонным**.

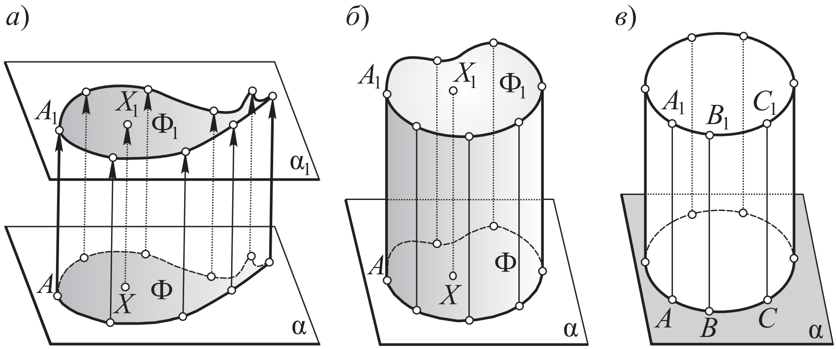


Рис. 42

Если основаниями цилиндра являются круги, то цилиндр называется **круговым**.

Если основаниями цилиндра являются многоугольники, то цилиндр называется **призмой**.

Из круговых цилиндров в данном курсе рассматриваются только прямые круговые цилиндры.

Прямым круговым цилиндром называют цилиндр, который одновременно является прямым и круговым (см. рис. 42, *в*).

Высотой цилиндра называется любой перпендикуляр к плоскостям оснований цилиндра, концы которого лежат на этих плоскостях.

Приведенное определение высоты цилиндра относится как к круговым цилиндрам, так и к призмам. Все высоты цилиндра равны между собой. В частности, для прямого кругового цилиндра высоты равны образующим цилиндра (или отрезку OO_1), соединяющим центры его оснований. На рисунке 43, *а* изображены высоты AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 и OO_1 прямого кругового цилиндра.

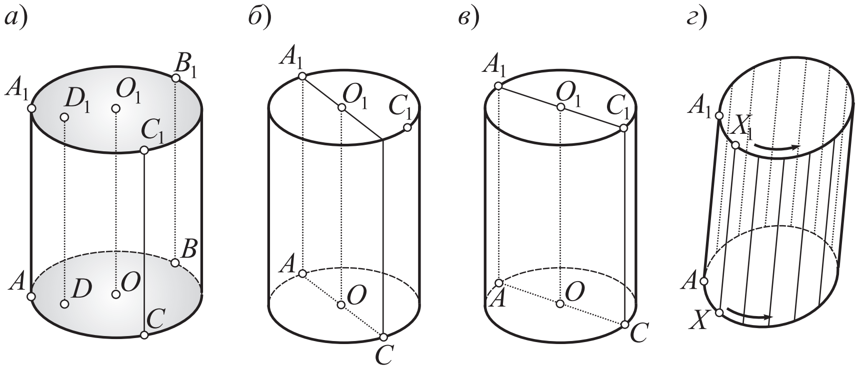


Рис. 43

Прямая, проходящая через центры оснований прямого кругового конуса, называется *осью цилиндра*. Проведем в прямом круговом цилиндре две образующие AA_1 и CC_1 (рис. 43, *б*). Они параллельны. Поэтому через них можно провести плоскость. Эта плоскость пересечет основания по параллельным хордам AC и A_1C_1. Сечение AA_1C_1C — прямоугольник. Если сечение проходит через ось цилиндра (например, сечение AA_1C_1C, рис. 43, *в*), то оно называется *осевым*.

Равносторонним цилиндром называется прямой круговой цилиндр, осевое сечение которого — квадрат.

Если точка X опишет окружность основания цилиндра, то образующая цилиндра (отрезок XX_1, рис. 43, *г*) опишет поверхность, называемую *боковой поверхностью* цилиндра.

Отметим одно свойство прямого кругового цилиндра, связанное с понятием тела вращения.

Телом вращения (рис. 44, *а*) называется такое тело, которое плоскостями, перпендикулярными некоторой прямой — *оси вращения*, пересекается по кругам с центрами на этой прямой.

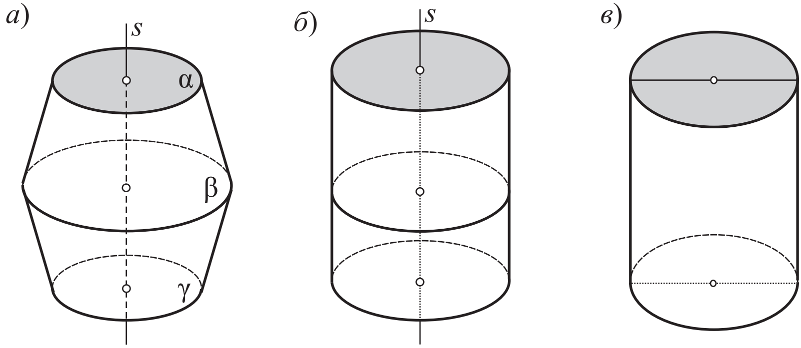


Рис. 44

Нетрудно видеть, что прямой круговой цилиндр является телом вращения (рис. 44, *б*). Имея в виду это свойство, иногда прямой круговой цилиндр называют цилиндром вращения.

Размеры прямого кругового цилиндра вполне определяются заданием радиуса основания и высоты цилиндра.

Построение изображения прямого кругового цилиндра начинают с изображения его оснований. Основания кругового цилиндра изображаются двумя равными эллипсами с соответственно параллельными большими и малыми осями. Кроме оснований изображаются еще крайние образующие эллипса (отрезками, касательными к эллипсам; рис. 44, *в*).

Если боковую поверхность прямого кругового цилиндра разрезать по какой-либо образующей, то ее можно развернуть без растяжения и сжатий (а только изгибая) на плоскости в прямоугольник со сторонами, равными длине окружности основания и высоте цилиндра. Этот прямоугольник (рис. 45) вместе с основаниями дает *развертку* полной поверхности цилиндра.

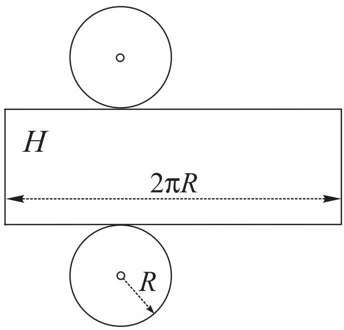


Рис. 45

Касательной плоскостью к прямому круговому цилиндру (рис. 46) называется плоскость, которой принадлежит одна и только одна образующая цилиндра.

Следствие. *Если касательная плоскость к прямому круговому цилиндру* (см. рис. 46) *и осевое сечение проходят через одну и ту же образующую, то они перпендикулярны друг к другу.*

Напомним, что впредь из круговых цилиндров будут рассматриваться только прямые круговые цилиндры.

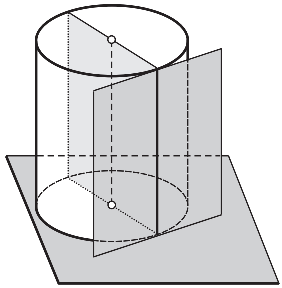


Рис. 46

1.3. Примеры решения задач

Задача 1. S — площадь боковой поверхности цилиндра, Q — площадь осевого сечения. Докажите самостоятельно, что $\frac{S}{Q} = \pi$.

Задача 2. H — высота цилиндра, R — радиус основания, площадь боковой поверхности равна сумме площадей оснований. Докажите самостоятельно, что $H = R$.

Задача 3 (рис. 47). В цилиндр помещен квадрат, две его противоположные вершины находятся в центрах оснований, две другие — на боковой поверхности. Докажите самостоятельно, что цилиндр является равносторонним.

Задача 4 (42, а, рис. 48).

Построения. 1) Строим образующую цилиндра — отрезок AA_1. Так как образующая перпендикулярна плоскости основания, то отрезок

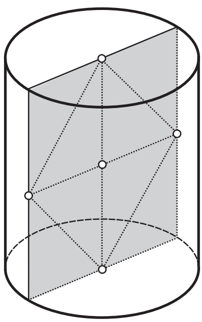


Рис. 47

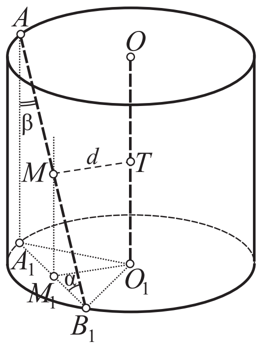


Рис. 48

A_1B_1 — ортогональная проекция отрезка AB_1 на плоскость основания цилиндра;

2) тогда $\angle AB_1A_1$ — угол наклона отрезка AB_1 к плоскости основания цилиндра, синус которого надо найти;

3) так как $AA_1 \parallel OO_1$, то $\angle A_1AB_1$ — искомый угол между AB_1 и осью цилиндра OO_1;

4) осталось указать на чертеже расстояние d между прямыми AB_1 и OO_1. Для этого необходимо через прямую AB_1 провести плоскость, параллельную прямой OO_1. Такой плоскостью является уже построенная плоскость AB_1A_1. Тогда расстояние между скрещивающимися прямыми AB_1 и OO_1 равно расстоянию между параллельными прямой OO_1 и плоскостью AB_1A_1;

5) для нахождения последнего достаточно из точки O_1 провести перпендикуляр к плоскости AB_1A_1. Нетрудно установить, что $O_1M_1 = d$ (M_1 — середина отрезка A_1B_1).

Вычисления. 6) из прямоугольного $\Delta A_1O_1M_1$ по теореме Пифагора $A_1M_1 = \sqrt{R^2 - d^2}$;

7) тогда $A_1B_1 = 2A_1M_1 = 2\sqrt{R^2 - d^2}$;

8) из прямоугольного ΔAB_1A_1 по теореме Пифагора имеем:

$$AB_1 = \sqrt{AA_1^2 + A_1B_1^2} = \sqrt{H^2 + 4(R^2 - d^2)};$$

9) введем обозначения: $\angle AB_1A_1 = \alpha$, $\angle A_1AB_1 = \beta$. Тогда

$$\sin\alpha = \cos\beta = \frac{AA_1}{AB_1} = \frac{H}{\sqrt{H^2 + 4(R^2 - d^2)}}.$$

Ответ: $AB_1 = \sqrt{H^2 + 4(R^2 - d^2)}$, $\sin\alpha = \cos\beta = \dfrac{H}{\sqrt{H^2 + 4(R^2 - d^2)}}$.

Задача 5. Диагональ прямоугольника развертки боковой поверхности цилиндра равна 100 и наклонена к стороне этого прямоугольника под углом в 60° (см. рис. 45). Найдите высоту и радиус основания цилиндра. (Решите самостоятельно.)

§ 2. ПРИЗМА

2.1. Теория

Призма — это цилиндр, в основании которого лежит многоугольник (рис. 49). Иначе можно сказать, что призма — это цилиндр, который является многогранником. Грани $ABCDE$... и $A_1B_1C_1D_1E_1$... называются основаниями призмы. Остальные грани призмы называются боковыми. Ребра, заключенные между параллельными основаниями, называются боковыми ребрами. В зависимости от числа сторон основания призма может быть треугольной, четырехугольной, пятиугольной, ... , n-угольной.

Различные виды призм представлены на схеме, приведенной на рисунке 50.

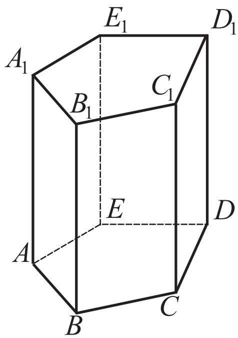


Рис. 49

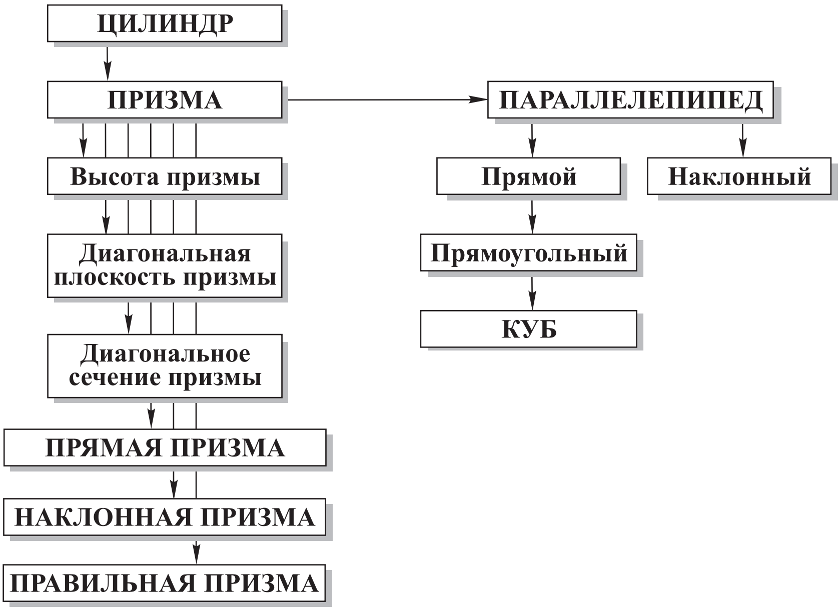


Рис. 50

Прямой призмой называется призма, боковые ребра которой перпендикулярны к плоскостям оснований (рис. 51, *а*). В противном случае призма называется **наклонной** (рис. 51, *б*).

Высотой призмы называется любой перпендикуляр к плоскостям оснований призмы, концы которого лежат на этих плоскостях (рис. 51, *а*—*г*).

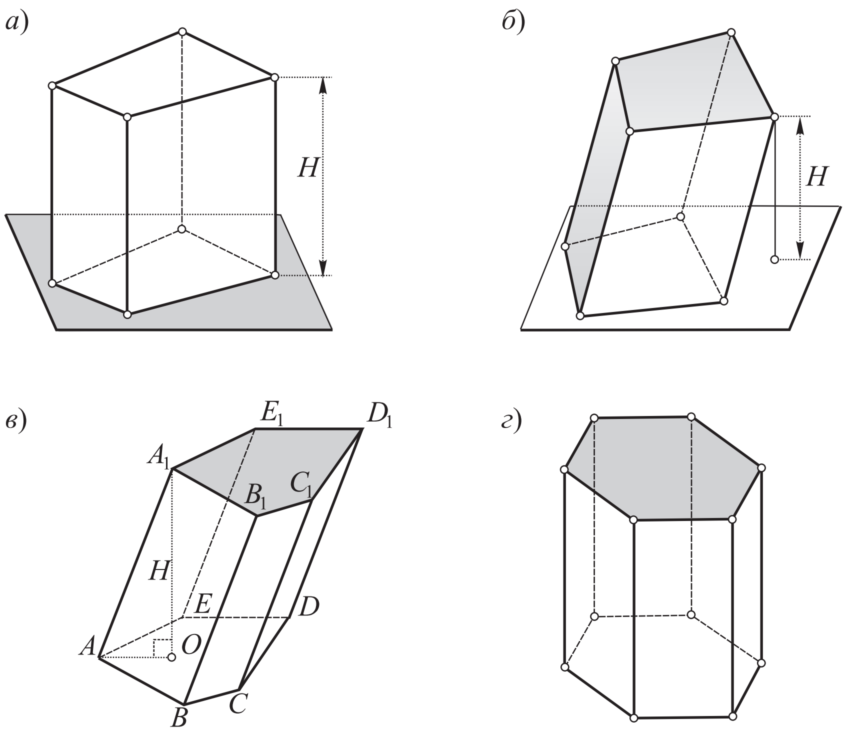


Рис. 51

Высота прямой призмы равна боковому ребру. (Заметим, что боковое ребро наклонной призмы не является высотой.)

На рисунке высоту обычно строят, опуская перпендикуляр из какой-либо вершины верхнего основания к плоскости нижнего основания.

Правильной призмой называется прямая призма, в основании которой лежит правильный многоугольник.

На рисунке 51, *г* изображена правильная шестиугольная призма: ее боковые ребра перпендикулярны плоскости основания и в основании лежит правильный шестиугольник.

Одним из распространенных видов призмы являются параллелепипеды. Заметим, что в стереометрии параллелепипеды играют такую же роль, как и параллелограммы в планиметрии.

Параллелепипед — это призма (рис. 52, *а*), основаниями которой являются параллелограммы.

Прямым параллелепипедом называется параллелепипед, боковые ребра которого перпендикулярны к основаниям (рис. 52, *б*). В противном случае параллелепипед называется **наклонным**.

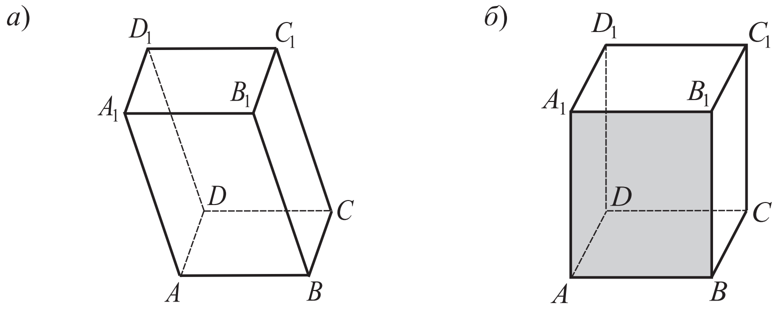


Рис. 52

Аналогом планиметрического прямоугольника в стереометрии служит прямоугольный параллелепипед.

Прямоугольный параллелепипед — это прямой параллелепипед, основаниями которого являются прямоугольники.

На рисунке прямой и прямоугольный параллелепипеды изображаются одинаково (почему?). Так, рисунок 52, *б* можно считать и изображением прямого, и изображением прямоугольного параллелепипедов.

Куб — это прямоугольный параллелепипед с равными ребрами.

Диагональной плоскостью призмы называется плоскость, проходящая через два боковых ребра, не лежащих в одной грани, например плоскости AA_1C_1C, BB_1E_1E и др. (рис. 53).

Сечение, получаемое при пересечении диагональной плоскости с гранями призмы, называется *диагональным сечением*. Им является, например, каждый из четырехугольников AA_1C_1C, BB_1E_1E и др. (см. рис. 53).

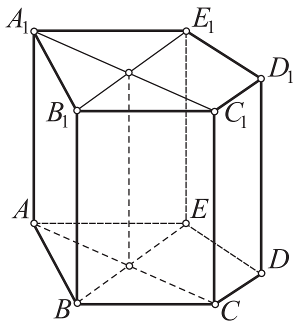


Рис. 53

Теоремы 4

> 1. **В параллелепипеде: а) диагонали пересекаются в одной точке и делятся ею пополам; б) противолежащие грани параллельны и равны.**

> 2. **В прямоугольном параллелепипеде: а) квадрат любой его диагонали равен сумме квадратов трех его измерений; б) все четыре диагонали равны между собой.**

Доказательства.

1. а) Рассмотрим диагонали AC_1 и BD_1 (рис. 54). Они являются диагоналями параллелограмма ABC_1D_1 ($AB \parallel D_1C_1$ и $AB = D_1C_1$). Поэтому AC_1 и BD_1 пересекаются и точкой пересечения O делятся пополам.

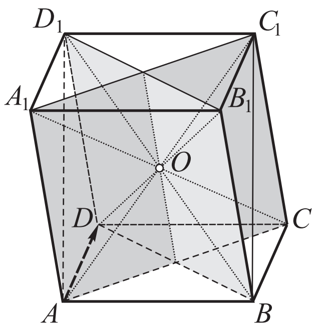


Рис. 54

Далее, рассматривая диагонали A_1C и AC_1, замечаем, что они — диагонали параллелограмма AA_1C_1C ($AA_1 \parallel CC_1$ и $AA_1 = CC_1$). Следовательно, диагональ A_1C проходит через середину AC_1, т. е. точку O, и делится ею пополам. Аналогично доказывается, что диагональ B_1D также проходит через точку O и делится ею пополам.

Таким образом, все четыре диагонали параллелепипеда пересекаются в одной точке и делятся ею пополам.

Следствие. *Точка пересечения диагоналей параллелепипеда является его центром симметрии.*

1. б) Рассмотрим противолежащие грани AA_1B_1B и DD_1C_1C (см. рис. 54). Все грани параллелепипеда — параллелограммы, поэтому $AA_1 \parallel DD_1$ и $AB \parallel DC$. По признаку параллельности двух плоскостей грани AA_1B_1B и DD_1C_1C параллельны. Отрезки AD, BC, A_1D_1 и B_1C_1 равны и параллельны, значит, грань AA_1B_1B может быть совмещена с гранью DD_1C_1C параллельным переносом на вектор $\overrightarrow{AD}$. Поэтому эти грани равны.

Аналогично доказывается параллельность и равенство любых двух других противолежащих граней параллелепипеда.

2. а) Рассмотрим диагональ B_1D (рис. 55). Из прямоугольного треугольника B_1BD по теореме Пифагора $B_1D^2 = BB_1^2 + BD^2$. Из прямоугольного треугольника BAD по теореме Пифагора $BD^2 = AB^2 + DA^2$. Отсюда

$$B_1D^2 = BB_1^2 + AB^2 + DA^2 = DD_1^2 + DC^2 + DA^2,$$

так как $BB_1 = DD_1$, $AB = DC$.

2. б) Эта теорема непосредственно следует из предыдущей.

В заключение остановимся на свойствах куба.

Очевидно, что куб обладает всеми свойствами параллелепипеда, прямого параллелепипеда и прямоугольного параллелепипеда.

Поэтому в кубе диагонали пересекаются в одной точке и делятся ею пополам; противолежащие грани равны и параллельны; квадрат диагонали куба равен сумме квадратов трех его измерений; в кубе все диагонали равны между собой.

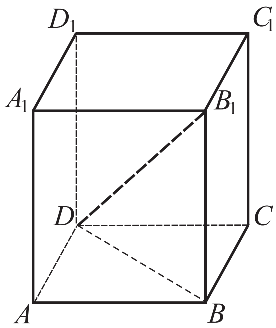


Рис. 55

Куб обладает также рядом свойств, которыми он отличается от других параллелепипедов. Например, в кубе и прямоугольном параллелепипеде имеется различное число плоскостей симметрии (выясните это).

Примечание. В школьном курсе из круговых цилиндров рассматриваются только прямые круговые цилиндры. По этой причине в дальнейшем к ним будет применяться более краткое название — «цилиндры». В тех же случаях, когда используются некруговые цилиндры (их совсем немного), применяются полные названия (произвольный цилиндр; цилиндр, в основании которого лежит многоугольник, и т. п.).

2.2. Примеры решения задач

Задача 1 (41, г, рис. 56).

Построение сечения. Так как точка O и прямая X_1X_2 принадлежат плоскости сечения, то прямая X_3X_4, проходящая через точку O и параллельная X_1X_2, принадлежит плоскости сечения. Тогда точки X_3 и X_4 — две вершины искомого сечения.

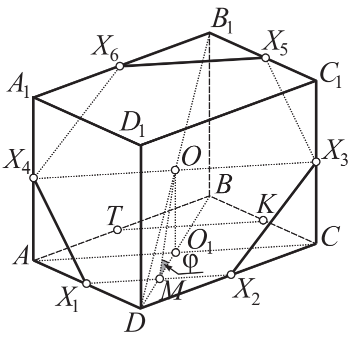


Рис. 56

Еще две вершины сечения X_5 и X_6 построим как точки, симметричные соответственно точкам X_1 и X_2 относительно центра O (X_5 — середина ребра B_1C_1, X_6 — середина ребра A_1B_1).

Таким образом, шестиугольник $X_1X_2X_3X_5X_6X_4$ — искомое сечение.

Вычисление площади сечения. Воспользуемся формулой, связывающей площади данной фигуры и ее ортогональной проекции.

1) При ортогональном проектировании многоугольника сечения на плоскость нижнего основания призмы он проектируется в многоугольник X_1X_2CKTA. Площадь проекции $Q = a^2 - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2} = \frac{3a^2}{4}$;

2) найдем теперь угол между плоскостью сечения и плоскостью основания. Из прямоугольного треугольника OMO_1 имеем:

$$OO_1 = a,\ O_1M = \frac{1}{4}BD = \frac{a\sqrt{2}}{4}, \quad \text{tg}\,\alpha = \frac{OO_1}{O_1M} = \frac{a \cdot 4}{a\sqrt{2}} = 2\sqrt{2};$$

3) тогда $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+\text{tg}^2\,\alpha}} = \frac{1}{\sqrt{1+8}} = \frac{1}{3}$;

4) имеем: $Q = S_{\text{сеч}} \cdot \cos\alpha \Rightarrow S_{\text{сеч}} = \frac{Q}{\cos\alpha} = \frac{3a^2 \cdot 3}{4} = \frac{9a^2}{4}$.

Задача 2 (41, е, рис. 57).

Замысел решения. Так как параллелепипед — прямоугольный, то боковое ребро AA_1 является искомой высотой. Для решения задачи удобно рассмотреть ΔAA_1D. Предварительно в нем необходимо найти какую-либо сторону.

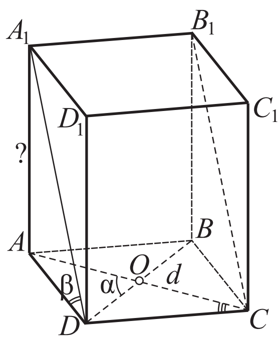


Рис. 57

Решение.

1) Пусть DC и A_1B_1 — большие стороны нижнего и верхнего оснований. Тогда плоскость DCB_1A_1 — плоскость, проведенная через эти стороны;

2) в прямоугольном параллелепипеде $DC \perp AA_1D_1D$. Поэтому $DC \perp AD$ и $DC \perp A_1D$. Значит, $\angle A_1DA$ — угол между плоскостью нижнего основания и плоскостью DCB_1A_1. По условию $\angle A_1DA = \beta$;

3) искомую высоту AA_1 можно найти из прямоугольного ΔAA_1D, предварительно найдя катет AD. Этот отрезок будем находить, используя данные, указанные для основания параллелепипеда;

4) так как в ΔACD $\angle ACD = \frac{\alpha}{2}$, то $AD = AC \cdot \cos\frac{\alpha}{2} = d\cos\frac{\alpha}{2}$;

5) тогда $AA_1 = AD \cdot \text{tg}\,\beta = d\cos\frac{\alpha}{2}\,\text{tg}\,\beta$.

Ответ: $AA_1 = d\cos\frac{\alpha}{2}\,\text{tg}\,\beta$.

Задача 3 (42, б, рис. 58).

Построения. 1) Так как точка M равноудалена от вершин ΔABC, то она ортогонально проектируется в центр описанной около ΔABC окружности (в данном случае в центр O правильного ΔABC). Тогда MO — высота призмы;

2) так как $A_1B_1 \parallel ABC$, то прямая A_1B_1 ортогонально проектируется на плоскость ABC в прямую PQ, проходящую через точку O и параллельную A_1B_1 (параллельную AB);

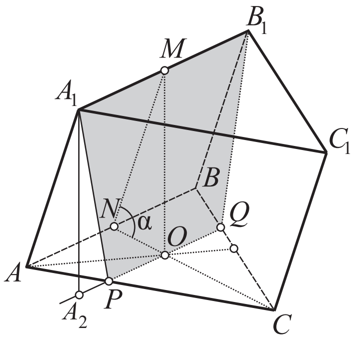


Рис. 58

3) если теперь из точки A_1 провести $A_1A_2 \parallel MO$ ($A_2 \in PQ$), то отрезок A_1A_2 — искомая высота призмы, проведенная из точки A_1;

4) так как плоскость A_1B_1QP проходит через перпендикуляр MO к плоскости ABC, то $A_1B_1QP \perp ABC$ и четырехугольник A_1B_1QP — искомое сечение призмы;

5) требуется построить еще угол наклона грани AA_1B_1B к плоскости основания ABC. Для этого проведем медиану CN ΔABC, получим, что $ON \perp AB$;

6) так как $MO \perp ABC$, то NO — ортогональная проекция MN на плоскость ABC. По теореме о трех перпендикулярах, если $AB \perp ON$, то $AB \perp MN$. Поэтому $\angle MNO = \alpha$ — угол наклона грани AA_1B_1B к плоскости основания ABC.

Вычисления.

7) $ON = \dfrac{1}{3}CN = \dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{a\sqrt{3}}{2} = \dfrac{a\sqrt{3}}{6}$, $A_1A_2 = MO = ON\,\mathrm{tg}\,\alpha = \dfrac{a\sqrt{3}}{6}\,\mathrm{tg}\,\alpha$;

8) сечением является трапеция A_1B_1QP ($A_1B_1 \parallel PQ$), MO — высота этой трапеции. Имеем: $PQ = \dfrac{2}{3}AB = \dfrac{2}{3}a$, $A_1B_1 = a$, $MO = \dfrac{a\sqrt{3}}{6}\,\mathrm{tg}\,\alpha$;

9) $S_{PA_1B_1Q} = \dfrac{1}{2}(PQ + A_1B_1)MO = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{2}{3}a + a\right)\dfrac{a\sqrt{3}}{6}\,\mathrm{tg}\,\alpha = \dfrac{5\sqrt{3}a^2}{36}\,\mathrm{tg}\,\alpha.$

Ответ: $A_1A_2 = \dfrac{a\sqrt{3}}{6}\,\mathrm{tg}\,\alpha$, $S_{PA_1B_1Q} = \dfrac{5\sqrt{3}a^2}{36}\,\mathrm{tg}\,\alpha.$

Задача 4. Площади трех граней прямоугольного параллелепипеда, имеющие общую вершину, равны соответственно 10, 5 и 1. Найдите ребра параллелепипеда и постройте его развертку. (Решите самостоятельно.)

§ 3. ПИРАМИДА

3.1. Теория

Пусть $ABCDE...$ — выпуклый многоугольник, лежащий в плоскости α (рис. 59), и P — точка, не принадлежащая этой плоскости. Каждую точку X многоугольника $ABCDE...$ соединим с точкой P отрезком XP. Множество всех таких отрезков заполняет некоторый многогранник. Этот многогранник называется **пирамидой**.

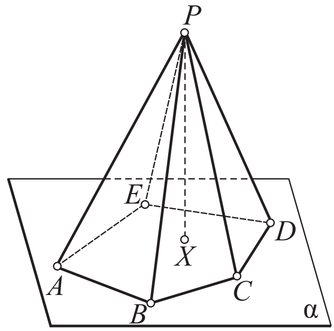


Рис. 59

Многоугольник $ABCDE...$ называется *основанием* пирамиды, точка P — *вершиной* пирамиды. Треугольники APB, BPC, CPD, ... называются *боковыми гранями* пирамиды, а отрезки PA, PB, PC, ... — *боковыми ребрами* пирамиды.

Пирамида называется *n-угольной*, если в основании ее лежит n-угольник. (Обратим внимание на то, что приведенное ранее определение n-угольной пирамиды получило здесь свое уточнение.)

Высотой пирамиды называется перпендикуляр, опущенный из ее вершины на плоскость основания.

В зависимости от формы пирамиды основание высоты может находиться внутри основания пирамиды (рис. 60, *а*), на его границе (рис. 60, *б*), вне основания (рис. 60, *в*). Если какое-либо боковое ребро пирамиды окажется перпендикулярным к основанию, то высота совпадет с этим боковым ребром (рис. 60, *г*).

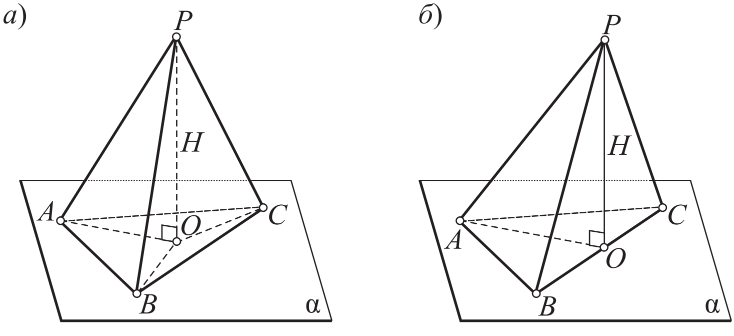


Рис. 60

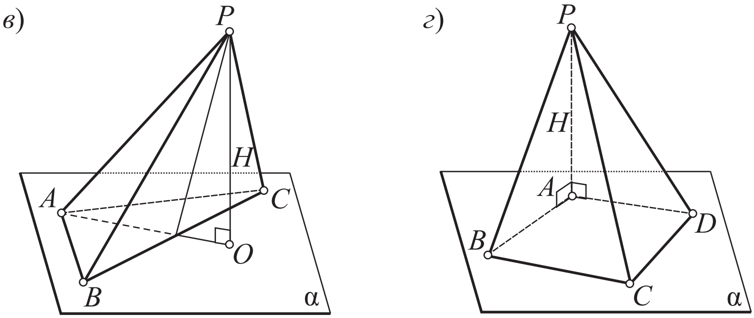


Рис. 60

Правильной пирамидой называется пирамида, основанием которой служит правильный многоугольник, а основание высоты совпадает с центром этого многоугольника.

На рисунках 61, *а*, *б* изображены соответственно правильные треугольная и четырехугольная пирамиды.

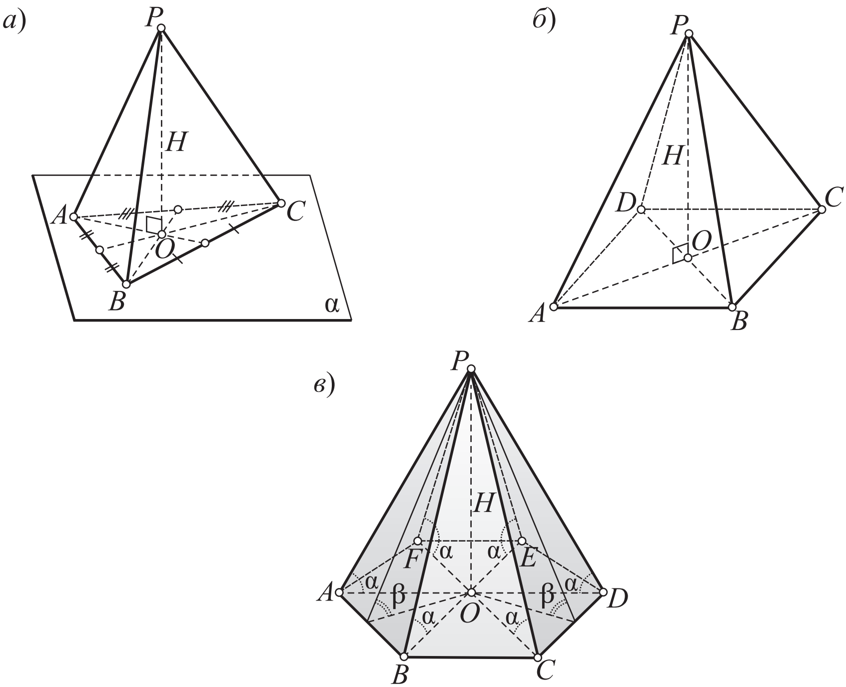


Рис. 61

Очевидно, что у правильной пирамиды (рис. 61, *в*) все боковые ребра равны между собой и наклонены к плоскости основания под одним и тем же углом α; боковые грани также наклонены к плоскости основания под одним и тем же углом β.

Высота боковой грани $h_{\text{бок}}$ правильной пирамиды, проведенная из вершины пирамиды, называется *апофемой* (см. рис. 61, *в*).

Тетраэдром называется любая треугольная пирамида.

Правильным тетраэдром называется тетраэдр, все ребра которого равны между собой.

Сечение пирамиды плоскостью, проходящей через два боковых ребра (рис. 62, *а*), не принадлежащих одной грани, называется *диагональным сечением пирамиды*, а сама секущая плоскость — *диагональной плоскостью*.

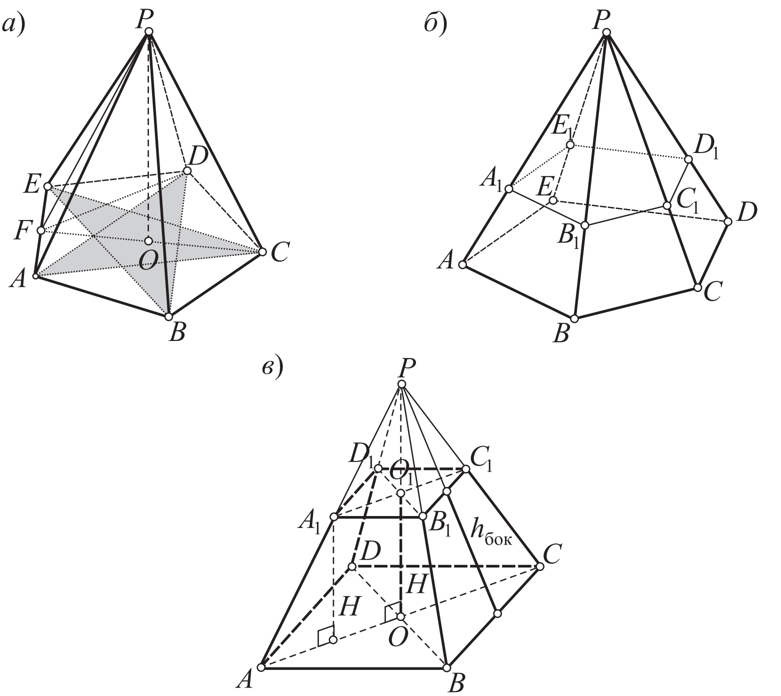


Рис. 62

Сечение пирамиды плоскостью, параллельной основанию (рис. 62, *б*), называется *параллельным сечением* пирамиды.

Параллельное сечение пирамиды отсекает от нее подобную пирамиду. Другая часть пирамиды, представляющая собой также многогранник, называется **усеченной пирамидой** (см. рис. 62, *б*). Грани усеченной пирамиды, лежащие в параллельных плоскостях, называются *основаниями* пирамиды, остальные грани — *боковыми*.

Правильной усеченной пирамидой называется усеченная пирамида, которая получается из правильной пирамиды (рис. 62, *в*).

Боковыми гранями усеченной пирамиды являются трапеции. Если усеченная пирамида правильная, то боковые грани — равнобедренные трапеции. Высоты $h_{\text{бок}}$ этих равнобедренных трапеций называются *апофемами* правильной усеченной пирамиды.

Теорема 5

Если в пирамиде проведено параллельное сечение (рис. 63)**, то:**

1) **оно отсекает пирамиду, подобную данной пирамиде;**

2) **сечение есть многоугольник, подобный основанию;**

3) **боковые ребра и высота пирамиды делятся на пропорциональные отрезки;**

4) **площади сечения и основания относятся как квадраты их расстояний от вершины пирамиды.**

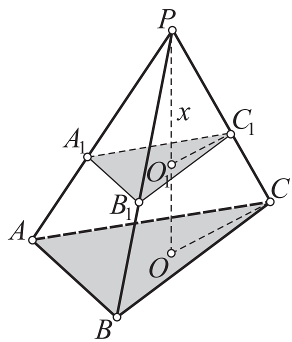


Рис. 63

Доказательство.

Пусть многоугольник $A_1B_1C_1...$ является параллельным сечением данной пирамиды (на рисунке ограничимся рассмотрением треугольной пирамиды). Рассмотрим гомотетию с центром P и коэффициентом $k = \frac{PA_1}{PA}$. Нетрудно убедиться, что в этой гомотетии данная пирамида $PABC...$ переходит в пирамиду $PA_1B_1C_1...$, а следовательно, эти пирамиды — подобные и сечение есть многоугольник, подобный основанию:

$$\frac{A_1B_1}{AB} = \frac{B_1C_1}{BC} = \frac{C_1D_1}{CD} = ... = k.$$

Тогда числу k будет равно отношение боковых ребер:

$$\frac{PA_1}{PA} = \frac{PB_1}{PB} = \frac{PC_1}{PC} = \ldots = k,$$

а также отношение высот: $\frac{PO_1}{PO} = k.$

Так как отношение площадей подобных многоугольников равно квадрату коэффициента подобия, то $\frac{S_{A_1B_1C_1D_1\ldots}}{S_{ABCD}} = k^2 = \left(\frac{PO_1}{PO}\right)^2 = \frac{PO_1^2}{PO^2}.$

Следствие. *Площадь параллельного сечения пирамиды есть квадратичная функция расстояния от вершины пирамиды до плоскости сечения:*

$$S_{\text{сеч}} = ax^2, \qquad (*)$$

где a — постоянное число, x — расстояние от вершины пирамиды до плоскости сечения (рис. 63).

Доказательство.

На основании предыдущей теоремы $\frac{S_{\text{сеч}}}{S_{\text{осн}}} = \frac{x^2}{H^2}$ (H — высота пирамиды), откуда $S_{\text{сеч}} = \frac{S_{\text{осн}}}{H^2}x^2$. Для данной пирамиды отношение $\frac{S_{\text{осн}}}{H^2}$ — постоянная величина. Обозначив это отношение через a, получим равенство (*).

3.2. Примеры решения задач

Задача 1. (*Найдите ошибку!*) Дана задача и ее решение. При этом допущена ошибка. Найдите ее.

Краткая запись задачи.

PABC — правильная треугольная пирамида (рис. 64), $AC = a$ — сторона основания, PK — биссектриса $\angle APC$, $\angle APK = 60°$. Найдите боковое ребро пирамиды.

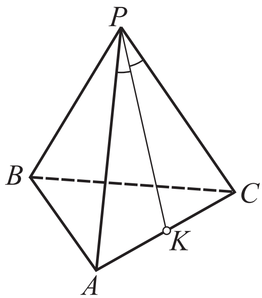


Рис. 64

Решение.

1) В равнобедренном ΔAPC биссектриса PK является высотой. Поэтому ΔAPK — прямоугольный и $\angle PAK = 30°$;

2) катет, лежащий против угла в 30°, равен половине гипотенузы: $PA = 2x$, $PK = x$;

3) учитывая, что $AK = \frac{a}{2}$, на основании теоремы Пифагора запишем уравнение: $4x^2 - x^2 = \frac{a^2}{4}$;

4) отсюда $x = \frac{a}{2\sqrt{3}}$, $PA = 2x = \frac{a}{\sqrt{3}}$.

Ответ: $PA = PB = PC = \frac{a}{\sqrt{3}}$.

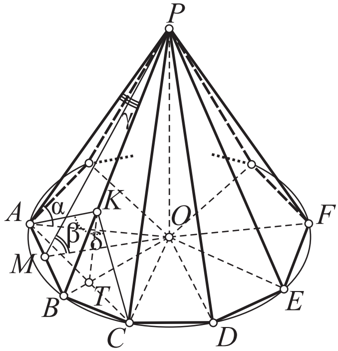


Рис. 65

Задача 2 (49, рис. 65).

Решение.

Имеем:

1) $\left.\begin{aligned} \operatorname{tg}\alpha &= \frac{PO}{AO}, \\ \operatorname{tg}\beta &= \frac{PO}{OM} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\beta} = \frac{PO}{AO}\cdot\frac{OM}{PO} =$

$= \frac{OM}{AO} = \cos\frac{\pi}{n};$

2) $\left.\begin{aligned} \cos\alpha &= \frac{AO}{PA}, \\ \sin\frac{\gamma}{2} &= \frac{AM}{PA}, \\ \sin\frac{\pi}{n} &= \frac{AM}{AO} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{\sin\frac{\gamma}{2}}{\sin\frac{\pi}{n}} = \frac{AM}{PA}\cdot\frac{AO}{AM} = \frac{AO}{PA} = \cos\alpha;$

3) $\left.\begin{aligned} \sin\alpha &= \frac{KT}{TB}, \\ \operatorname{tg}\frac{\delta}{2} &= \frac{TA}{TK} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \operatorname{tg}\frac{\delta}{2}\cdot\sin\alpha = \frac{TA}{TB} = \operatorname{tg}\angle TAB = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{n}\right) = \operatorname{ctg}\frac{\pi}{n};$

4) $\left.\begin{aligned} \cos\beta &= \frac{OM}{PM}, \\ \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} &= \frac{AM}{PM} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{\cos\beta}{\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}} = \frac{OM}{PM}\cdot\frac{PM}{AM} = \frac{OM}{AM} = \operatorname{ctg}\frac{\pi}{n};$

5) $\left.\begin{aligned} \sin\beta &= \frac{PO}{PM}, \\ \cos\frac{\delta}{2} &= \frac{KT}{AK} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{\sin\beta}{\cos\frac{\delta}{2}} = \frac{PO}{PM}\cdot\frac{AK}{KT} = \frac{PO}{KT}\cdot\frac{AK}{PM} = \frac{PB}{BT}\cdot\frac{AK}{PM} =$

$= \frac{PB}{BT}\cdot\left(\frac{1}{PB} : \frac{1}{AB}\right) = \frac{PB}{BT}\cdot\frac{AB}{PB} = \frac{AB}{BT} = \frac{1}{\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{n}\right)} = \frac{1}{\sin\frac{\pi}{n}};$

$$6)\ \left.\begin{array}{l}\cos\dfrac{\gamma}{2}=\dfrac{PM}{PB},\\ \sin\dfrac{\delta}{2}=\dfrac{AT}{AK}\end{array}\right\}\Rightarrow \cos\frac{\delta}{2}\cdot\sin\beta=\frac{PM}{PB}\cdot\frac{AT}{AK}=\frac{PM}{AK}\cdot\frac{AT}{PB}=$$

$$=\left(\frac{1}{AB}:\frac{1}{PB}\right)\cdot\frac{AT}{PB}=\frac{PB}{AB}\cdot\frac{AT}{PB}=\frac{AT}{AB}=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{n}\right)=\cos\frac{\pi}{n}.$$

Задача 3 (50, б, рис. 66).

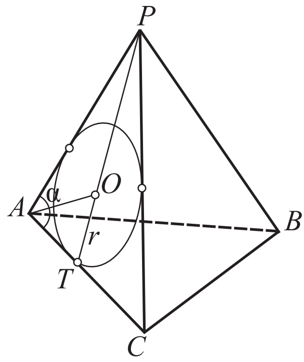


Рис. 66

Решение.

1) Пусть O — центр окружности, вписанной в ΔPAC. Тогда

$$\angle OAT=\frac{\alpha}{2} \text{ и } \frac{OT}{AT}=\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow AT=\frac{OT}{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}=\frac{r}{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}};$$

2) введем обозначение: $PT = h$. Тогда из прямоугольного ΔPAT

$$\frac{PT}{AT}=\operatorname{tg}\alpha\Rightarrow PT=h=\frac{r\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}};$$

$$3)\ S_{\text{бок}}=3S_{PAC}=3\cdot\frac{1}{2}AC\cdot PT=3AT\cdot PT=3\cdot\frac{r}{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{r\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}=\frac{3r^2\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}};$$

$$4)\ S_{\text{осн}}=\frac{AC^2\sqrt{3}}{4}=\left(\frac{2r}{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}\right)^2\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}=\frac{r^2\sqrt{3}}{\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}};$$

$$5)\ S_{\text{полн}}=S_{\text{осн}}+S_{\text{бок}}=\frac{r^2\sqrt{3}}{\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}+\frac{3r^2\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}=\frac{r^2(\sqrt{3}+3\operatorname{tg}\alpha)}{\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}.$$

Ответ: $S_{\text{полн}}=\dfrac{r^2(\sqrt{3}+3\operatorname{tg}\alpha)}{\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}.$

Задача 4. Площади основания и боковой грани правильной четырехугольной пирамиды соответственно равны 4 и $2\sqrt{6}$. Найдите ребра пирамиды и постройте ее развертку. (Решите самостоятельно.)

§ 4. СФЕРА И ШАР. СЕЧЕНИЕ СФЕРЫ ПЛОСКОСТЬЮ

4.1. Сфера и шар

Напомним определение сферы и приведем определение шара. **Сферой с центром** O **и радиусом** R называется геометрическое место точек пространства, удаленных от точки O на расстояние R.

Шаром называется множество всех точек пространства, расстояние которых от некоторой точки — центра шара — не превосходит данного числа.

Центром, радиусом, хордой, диаметром шара называется центр, радиус, хорда, диаметр граничной сферы.

Сферу и шар изображают в ортогональной проекции — в виде круга. Для наглядности обычно изображают также экватор и полюсы (рис. 67, *а*). Малую ось эллипса, изображающего экватор, можно выбирать произ-

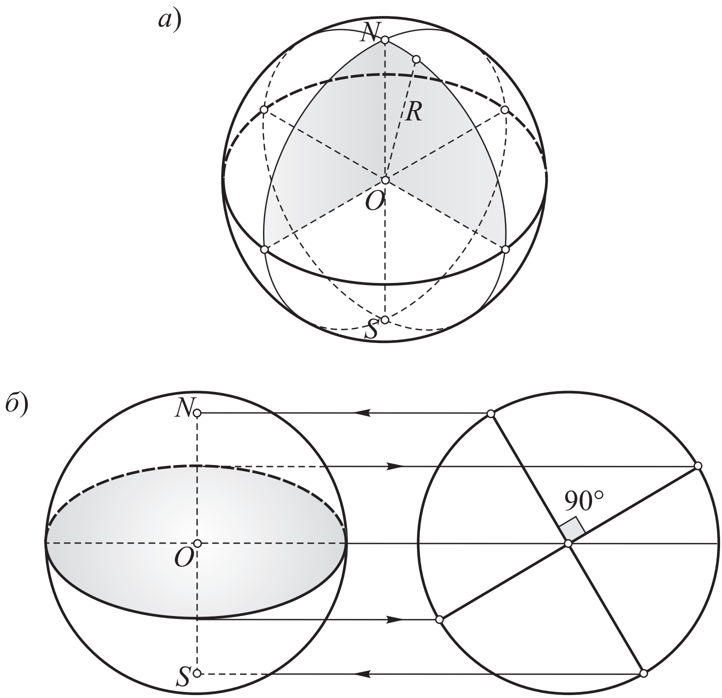


Рис. 67

вольно, но после этого положение полюсов определяется однозначно (рис. 67, *б*).

Предупреждение. Иногда встречается ошибочное изображение сферы и шара (рис. 68, *а*). В чем здесь ошибка? Полюсы выбраны на окружности, а экватор изображен в виде эллипса. Этого быть не может. Полюсы могут оказаться на окружности лишь в том случае, когда экватор изобразится отрезком (рис. 68, *б*), но такой рисунок не является наглядным.

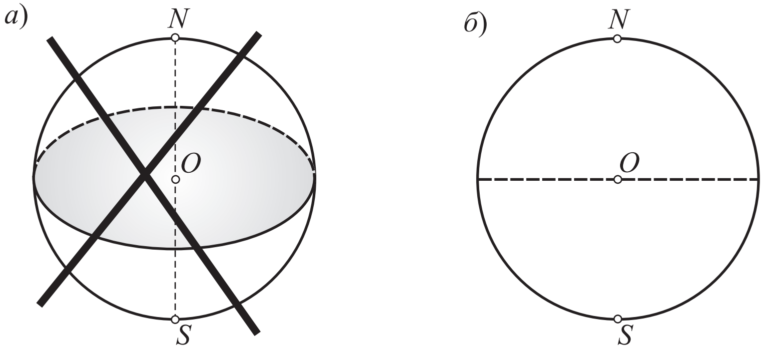


Рис. 68

4.2. Сечение сферы и шара плоскостью. Касательная плоскость к сфере

Плоскостью (прямой), касательной к сфере, называется плоскость (прямая), имеющая со сферой единственную общую точку. Общая точка называется *точкой касания*.

Теоремы 6

1. **Сечение сферы плоскостью, перпендикулярной к диаметру и пересекающей его, есть окружность, радиус которой $r = \sqrt{R^2 - d^2}$, где R — радиус сферы, d — расстояние от центра сферы до секущей плоскости** (рис. 69, *а*)**.**

2. **Плоскость, проходящая через конец диаметра сферы и перпендикулярная ему, является касательной к сфере.**

3. (*Обратная теореме* 2.) **Касательная плоскость к сфере перпендикулярна диаметру (радиусу), проведенному в точку касания.**

Доказательства.

1. 1) Рассмотрим сечение сферы плоскостью α, перпендикулярной ее диаметру (см. рис. 69, *а*). Пусть диаметр пересекает плоскость α в точке O_1. Тогда OO_1 — расстояние от центра сферы O до плоскости α: $OO_1 = d$;

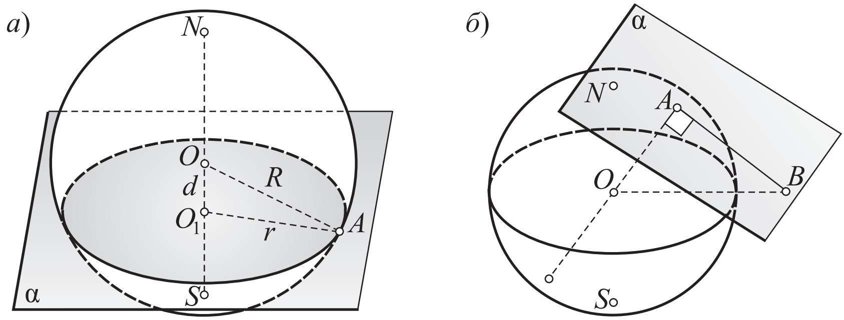


Рис. 69

2) возьмем произвольную точку A, принадлежащую сечению. Из прямоугольного ΔOO_1A имеем: $O_1A = \sqrt{OA^2 - OO_1^2} = \sqrt{R^2 - d^2}$;

3) итак, при произвольном выборе точки A сечения она оказывается каждый раз удаленной от точки O_1 на одно и то же расстояние $\sqrt{R^2 - d^2}$. Кроме того, любая точка плоскости α, удаленная от точки O_1 на расстояние $\sqrt{R^2 - d^2}$, принадлежит сфере;

4) следовательно, сечение представляет собой окружность с центром O_1 и радиусом $r = \sqrt{R^2 - d^2}$.

2. 1) Пусть плоскость α (рис. 69, *б*) проходит через точку A сферы и перпендикулярна радиусу OA. Тогда отрезок OB, соединяющий центр O с любой другой точкой B плоскости α, будет наклонным, значит, $OB > OA$, т. е. любая точка $B \in \alpha$, кроме A, лежит вне сферы;

2) следовательно, плоскость α касается сферы в точке A.

3. 1) Пусть плоскость α касается сферы в точке A (см. рис. 69, *б*). Тогда любая другая точка B плоскости α не лежит на сфере;

2) точка B не может быть внутренней точкой шара, так как в противном случае $d < R$ и плоскость α пересекала бы сферу по окружности (см. теорему 6.1);

3) значит, B — внешняя точка, поэтому $OB > R$;

4) из неравенства $OB > R$ и равенства $OA = R$ следует, что OA является расстоянием от точки O до плоскости α;

5) следовательно, отрезок OA перпендикулярен плоскости α: $OA \perp \alpha$.

Следствия.

1. *Сфера является поверхностью вращения.*

2. *Чем ближе секущая плоскость к центру сферы, тем больше радиус сечения. Наибольший радиус, равный R, имеет сечение сферы плоскостью, проходящей через ее центр.*

3. *Если прямая касается сферы, то она перпендикулярна к ее радиусу, проведенному в точку касания.*

4. *Если прямая, проходящая через точку сферы, перпендикулярна к радиусу, проведенному в эту точку, то она является касательной к сфере.*

5. *Если из одной точки проведены к данной сфере несколько касательных прямых, то расстояния от этой точки до точек касания равны между собой.*

4.3. Примеры решения задач

Задача 1 («подзадача» к задаче 54, а).

Краткая запись задачи.

$KLMN$ — прямоугольник (рис. 70), $PQ \parallel KLMN$, $KL = 1$, $PQ = 3$, стороны прямоугольника $KLMN$ и отрезки KL, LP, NQ, MQ, PQ касаются некоторого шара.

Установите вид четырехугольников $KLMN$, $KPQN$ и $LPQM$ и найдите их стороны.

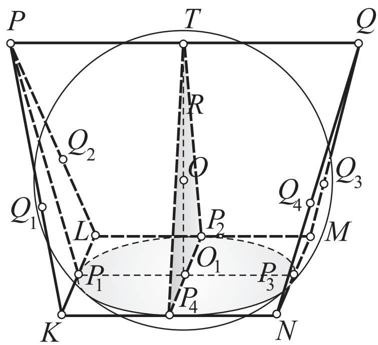


Рис. 70

Выполнение чертежа. Замысел решения. По условию шар касается сторон прямоугольника $KLMN$. Это возможно, если прямоугольник $KLMN$ является квадратом. Итак, шар касается сторон квадрата $KLMN$. Часть шара «проседает» и расположена под плоскостью $KLMN$, часть — над этой плоскостью.

Учитывая, что $PQ > KN$, приходим к выводу о том, что над плоскостью $KLMN$ располагается большая часть шара. Тогда точки K, L, M, N находятся ниже плоскости экватора шара. Касательные KP и NQ, пересекающие эту плоскость, будут «расходиться» и составлять со стороной KN квадрата тупые углы. Аналогичное наблюдение возможно и в отношении касательных LP и MQ.

Создается впечатление также, что $PQ \parallel KN$ и отрезок PQ касается шара в его полюсе, причем этот полюс делит отрезок PQ пополам. В итоге приходим к рисунку 70. Разумеется, высказанные предположения должны быть доказаны или опровергнуты логическим путем.

Пространственная фигура, образованная отрезками, не похожа на призму или пирамиду. Поэтому воспользоваться общими свойствами какого-либо многогранника, по-видимому, не удастся. Естественно, надо постараться извлечь максимум возможного из того, что данные отрезки касаются шара.

Как воспользоваться свойствами касательных к шару?

1) Так как шар касается сторон прямоугольника $KLMN$, то плоскость этого прямоугольника пересекает шар по кругу, вписанному в прямоугольник $KLMN$. Поэтому прямоугольник $KLMN$ является квадратом, а также $KN = KL = 1$;

2) пусть P_1—P_4 — точки касания шара со сторонами квадрата $KLMN$, Q_1—Q_4 — точки касания шара соответственно с отрезками PK, PL, QM, QN. Так как отрезки касательных к шару, проведенные из одной точки, равны, то

$$PQ_1 = PQ_2 = PT = 1{,}5, \quad KQ_1 = KP_1 = KP_4 = 0{,}5, \quad LQ_2 = LP_1 = LP_2 = 0{,}5,$$

$$QQ_4 = QQ_3 = QT = 1{,}5, \quad NQ_4 = NP_3 = NP_4 = 0{,}5, \quad MQ_3 = MP_2 = MP_3 = 0{,}5;$$

3) поэтому

$$PK = PL = 1{,}5 + 0{,}5 = 2,\ QN = QM = 1{,}5 + 0{,}5 = 2$$

и треугольники PKL и QNM — равные равнобедренные треугольники;

4) тогда PP_1 и QP_3 — высоты этих треугольников. Так как $KL \perp PP_1$ и $KL \perp P_1P_3$, то $KL \perp PP_1P_3$. Аналогично $MN \perp QP_3P_1$;

5) плоскости PP_1P_3 и QP_3P_1, проходя через точку P_1 перпендикулярно к KL, совпадут. Поэтому $PQ \subset PP_1P_3$;

6) тогда плоскость PP_1P_3, проходя через прямую PQ, параллельную плоскости $KLMN$, пересечет плоскость $KLMN$ по прямой $P_1P_3 \parallel PQ$;

7) поэтому $PQ \parallel KN$ и четырехугольник $KPQN$ (аналогично четырехугольник $LPQM$) — равнобедренная трапеция;

8) основания этих трапеций равны 1 и 3, боковые стороны равны 2.

Ответ: четырехугольник $KLMN$ является квадратом, четырехугольники $KPQN$ и $LPQM$ — равными равнобедренными трапециями;

$KN = KL = 1$, $PK = PL = QN = QM = 2$.

Задача 2 (54, а, см. рис. 70).

Решение.

1) Выясним, как располагается центр шара. Центр шара располагается на прямой, проходящей через центр O_1 окружности, вписанной в квадрат $KLMN$ и перпендикулярной плоскости этого квадрата. Так как плоскости $KLMN$ и PP_1P_3Q перпендикулярны, то эта прямая и, следовательно, центр O шара принадлежат плоскости PP_1P_3Q. Таким образом, центр шара — точка O — принадлежит отрезку O_1T;

2) искомый радиус шара можно найти как радиус окружности, описанной около ΔTP_2P_4, предварительно найдя площадь этого треугольника, например по формуле Герона. Имеем: $TP_4 = \sqrt{3}$ (рассмотрите равнобедренную трапецию $KPQN$),

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{\frac{2\sqrt{3}+1}{2} \cdot \frac{2\sqrt{3}+1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{11}}{4},$$

$$R = \frac{abc}{4S} = \frac{1 \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{3}}{4 \cdot \frac{\sqrt{11}}{4}} = \frac{3}{\sqrt{11}}.$$

Ответ: $R = \dfrac{3}{\sqrt{11}}$.

Задача 3 (55, а, рис. 71).

Замысел решения. Воспользуемся формулой, связывающей углы α и γ в правильной пирамиде.

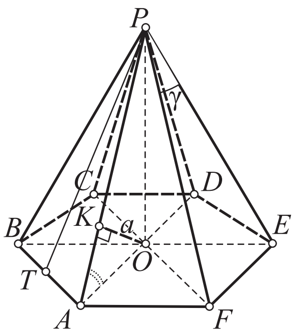


Рис. 71

Решение.

1) На основании указанной формулы имеем:

$$\cos\alpha = \frac{\sin\frac{\gamma}{2}}{\sin\frac{180^\circ}{6}} = 2\sin\frac{\gamma}{2};$$

2) из прямоугольного ΔPOK:

$$\frac{OK}{PO} = \sin\angle OPK = \cos\alpha = 2\sin\frac{\gamma}{2} \Rightarrow \frac{a}{PO} =$$

$$= 2\sin\frac{\gamma}{2} \Rightarrow PO = \frac{a}{2\sin\frac{\gamma}{2}}.$$

Ответ: $PO = \dfrac{a}{2\sin\frac{\gamma}{2}}$.

§ 5. КОНУС

5.1. Теория

Пусть PO (рис. 72, *а*) — перпендикуляр, проведенный из точки P на плоскость α; рассмотрим круг с центром O, лежащий в плоскости α. Соединим произвольную точку X круга отрезком XP с точкой P. Множество отрезков XP образует тело, которое называется **круговым конусом**. Круг называется *основанием* конуса, точка P — *вершиной* конуса, отрезок PO — *высотой* конуса.

Поскольку мы изучаем только круговые конусы, то будем называть их просто «конусы».

Отрезки XP, соединяющие точки окружности основания с вершиной P, называются *образующими* конуса. Если точка X описывает окружность основания конуса, то отрезок XP опишет поверхность, которая называется *боковой поверхностью* конуса. Прямая PO называется *осью* конуса. Сечение конуса плоскостью, проходящей через его ось (рис. 72, *б*), называется *осевым сечением*. Если плоскость проходит через образующую конуса (рис. 72, *в*) и других общих точек с конусом не имеет, то она называется *касательной плоскостью* конуса.

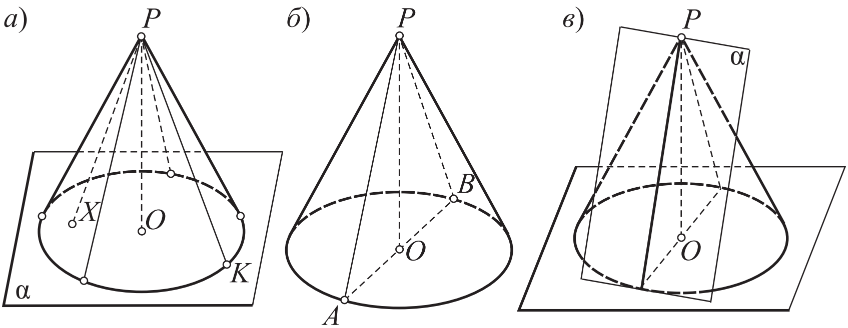


Рис. 72

Равносторонним конусом называется конус, у которого осевое сечение — равносторонний треугольник.

Для изображения конуса строим изображение основания — эллипс, затем выбираем точку P — изображение вершины, а затем из точки P проводим отрезки касательных к эллипсу — отрезки PA и PB (рис. 73). Точки касания A и B не лежат на одной прямой с центром O эллипса.

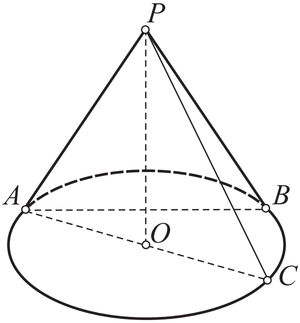


Рис. 73

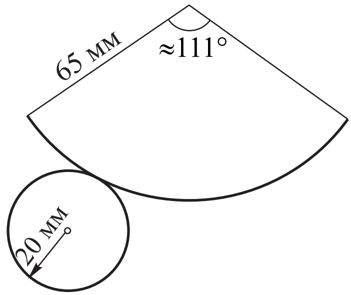


Рис. 74

Это означает, что треугольник APB не является изображением осевого сечения конуса. Осевым сечением является треугольник APC.

Развертка боковой поверхности конуса есть сектор. Вместе с кругом основания она дает развертку полной поверхности (рис. 74).

Теоремы 7

> 1. **Плоскость, перпендикулярная к оси конуса, пересекает его боковую поверхность по окружности с центром на оси конуса.**
>
> 2. **Если касательная плоскость к конусу и осевое сечение проходят через одну и ту же образующую, то они перпендикулярны друг к другу.**

Доказательства.

1. Пусть β (рис. 75) — плоскость, перпендикулярная оси PO конуса. Докажем, что эта плоскость пересекает боковую поверхность конуса по окружности с центром на оси конуса.

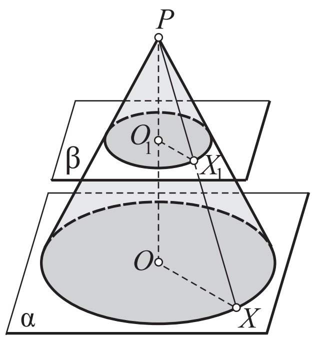


Рис. 75

Проведем образующую конуса PX. Пусть $\beta \cap PX = X_1$. Рассмотрим гомотетию, которая задается центром P и парой соответственных точек X и X_1. Эта гомотетия плоскость α — плоскость основания конуса — переведет в параллельную плоскость, проходящую через X_1. Но плоскость β как раз такой и является. Она параллельна α (так как $\beta \perp PO$ и $\alpha \perp PO$) и проходит через точку X_1. Следовательно, данная гомотетия плоскость α переводит в плоскость β. Кроме того, гомотетия окружность основания переведет в окружность, принадлежащую и боковой поверхности конуса, и плоскости β. Это означает, что сечение поверхности конуса плоскостью β есть окружность. Центр O_1 этой окружности опять же в силу гомотетии лежит на оси конуса PO.

2. Рассмотрим прямую $a = \alpha \cap \beta$ (рис. 76), где α — плоскость основания конуса, β — плоскость, касающаяся конуса по образующей PA. Прямая a с окружностью основания имеет единственную общую точку A (в противном случае общими точками плоскости β и поверхности конуса были бы не только точки образующей PA, но еще и другие точки). Поэтому прямая a является касательной к окружности. Отсюда $OA \perp a$. Нетрудно видеть, что $a \perp PO$. Если $a \perp OA$ и $a \perp PO$, то $a \perp PAB$ — осевому сечению, проведенному через образующую PA. Тогда на основании признака перпендикулярности двух плоскостей $\beta \perp PAB$.

Рассмотрим следующие следствия.

Следствия.

1. *Конус является телом вращения. Ось конуса является осью вращения.*

2. *Площадь сечения конуса плоскостью, параллельной основанию, есть квадратичная функция расстояния от вершины конуса до плоскости сечения: $S = ax^2$, где a — постоянное число, x — расстояние от вершины конуса до плоскости сечения* (рис. 77).

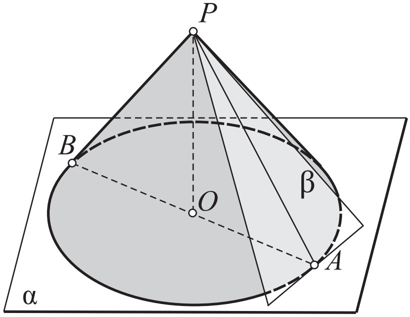


Рис. 76

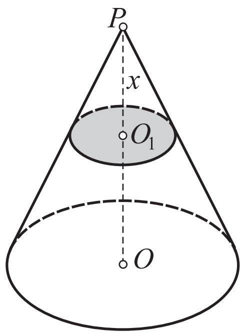


Рис. 77

Усеченным конусом называется часть конуса, заключенная между основанием и секущей плоскостью, параллельной основанию (рис. 78, *а*). Круги K и K_1 называются *основаниями* усеченного конуса.

Высотой усеченного конуса называется отрезок перпендикуляра, проведенного из какой-либо точки одного основания на плоскость другого (например, OO_1, A_1K; рис. 78, *б*).

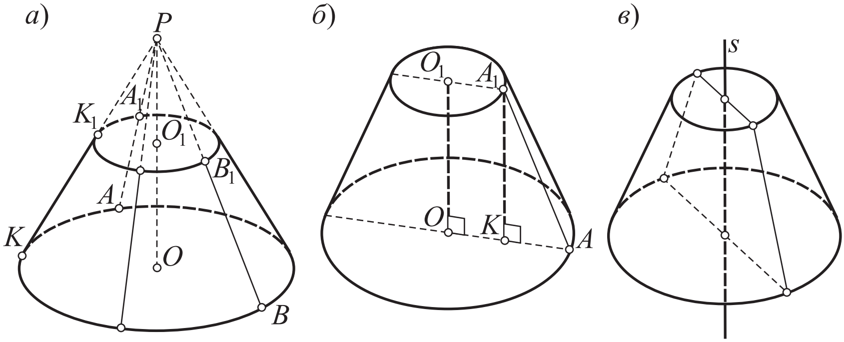


Рис. 78

Отрезок AA_1 называется *образующей* усеченного конуса.

Нетрудно видеть, что усеченный конус является телом вращения. Осью вращения усеченного конуса является прямая, проходящая через центры оснований. Эта прямая называется *осью* усеченного конуса.

Сечение усеченного конуса плоскостью, проходящей через его ось (рис. 78, *в*), называется *осевым сечением*.

Для усеченного конуса, как и для полного, может быть введено понятие «касательная плоскость».

5.2. Примеры решения задач

Задача 1 (62, рис. 79).

Решение.

1) Наибольшим углом между образующими конуса является $\angle APB$ между образующими в его осевом сечении. Если этот угол меньше 90°, то любой угол между образующими не может быть равен 90°;

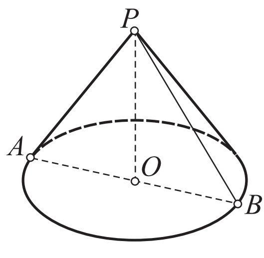


Рис. 79

2) в виду произвольности выбора одной из образующих, если существует одна пара перпендикулярных образующих, то таких пар существует сколько угодно;

3) первое требование задачи означает, что для двух перпендикулярных образующих не должно существовать третьей, которая была бы перпендикулярна хотя бы одной из них;

4) это требование можно удовлетворить только при условии, если взять конус, у которого угол в осевом сечении прямой: $\angle APB = 90°$;

5) в этом случае угол между осью и образующей равен 45° (получили ответ на первое требование задачи);

6) второе требование не может быть удовлетворено, если $\angle APB$ — острый или прямой угол;

7) если три попарно перпендикулярные образующие существуют, то три прямых угла, образуемые ими, ортогонально проектируются на плоскость основания конуса в три равных угла. Поэтому проекция таких углов равна $360° : 3 = 120°$;

8) по обобщенной формуле Эйлера:

$$\cos 120° = \frac{\cos 90° - \cos^2\alpha}{\sin^2\alpha} \Rightarrow \operatorname{ctg}^2\alpha = \frac{1}{2} \Rightarrow \operatorname{ctg}\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \alpha = \operatorname{arcctg}\frac{1}{\sqrt{2}};$$

9) пришли к выводу о том, что три попарно образующие существуют, если взять конус, у которого угол между образующими в осевом сечении равен $2\operatorname{arcctg}\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Ответ: 1) 45°; 2) $2\operatorname{arcctg}\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Задача 2 (63, в, рис. 80).

Решение.

1) Пусть плоскость α проходит через образующую PA конуса и перпендикулярна конической поверхности. Тогда $\alpha \perp POA$;

2) если две плоскости перпендикулярны и через точку одной из них (POA) проведен перпендикуляр к другой (α), то он лежит в первой плоскости. Поэтому искомый перпендикуляр OM к плоскости α лежит в плоскости POA;

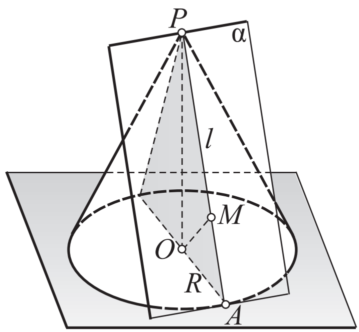


Рис. 80

3) $(OM \perp \alpha$ и $PA \subset \alpha) \Rightarrow OM \perp PA$;

4) поэтому OM — высота прямоугольного ΔPOA, проведенная к гипотенузе;

5) искомое расстояние OM найдем по формуле высоты прямоугольного треугольника, предварительно найдя по теореме катет PO из прямоугольного ΔPOA:

$$PO = \sqrt{PA^2 - OA^2} = \sqrt{l^2 - R^2}, \quad OM = \frac{PO \cdot OA}{PA} = \frac{R\sqrt{l^2 - R^2}}{l}.$$

Ответ: $\dfrac{R\sqrt{l^2 - R^2}}{l}$.

Задача 3 (64, в, рис. 81, *а*).

Замыслы решения. 1-й способ. Так как ΔAPB — прямоугольный, то $S_{\Delta PAB} = \frac{1}{2}PA \cdot PB = \frac{1}{2}PA^2$. Поэтому для решения задачи достаточно найти образующую конуса. Нельзя ли при этом воспользоваться правильной треугольной пирамидой, помещенной в конус? Нельзя ли непосредственно сравнить длину образующей PC (рис. 81, *б*) и данное расстояние h?

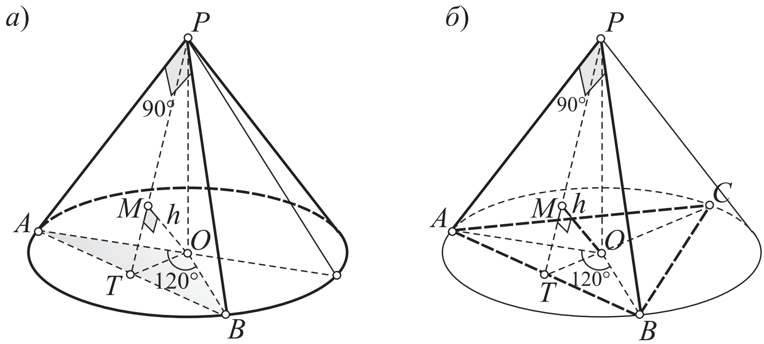


Рис. 81

2-й способ. Нельзя ли вначале найти площадь ΔAOB, а для нахождения площади ΔAPB воспользоваться формулой, связывающей площади данной фигуры и ее ортогональной проекции?

3-й способ. Ввести обозначение: $OA = x$. Выразить через x стороны ΔPOT, затем воспользоваться формулой высоты прямоугольного треугольника, проведенной к гипотенузе.

Приведем решение задачи первым способом.

Решение.

1) Проведем перпендикуляр из точки O к плоскости APB (см. рис. 81, *б*). Так как луч PO образует равные углы с лучами PA и PB, то луч PO

ортогонально проектируется в биссектрису PT угла APB. Так как ΔAPB — равнобедренный, то биссектриса PT является его медианой (T — середина хорды AB). Поэтому точка O ортогонально проектируется в точку M, принадлежащую медиане PT ΔAPB, и $OM = h$ — данное расстояние от точки O до плоскости PAB;

2) так как $\angle AOB = 120°$, то на хорде AB можно построить правильный ΔABC, вписанный в окружность основания конуса. Тогда четырехгранник $PABC$ — правильная треугольная пирамида;

3) ($PC \perp PA$ и $PC \perp PB$) $\Rightarrow PC \perp PAB$;

4) ($PC \perp PAB$ и $OM \perp PAB$) $\Rightarrow PC \parallel OM$;

5) поэтому $\Delta TPC \sim \Delta TMO$ и на основании подобия треугольников

$$\frac{PC}{MO} = \frac{TC}{TO} = 3 \Rightarrow PC = PA = 3MO = 3h;$$

6) приходим к искомому ответу.

Ответ: $S_{\Delta PAB} = \dfrac{9h^2}{2}$.

Задача 4. На рисунке 74 указаны некоторые размеры развертки конуса. Найдите радиус основания конуса. (Решите самостоятельно.)

§ 6. КОМБИНАЦИИ МНОГОГРАННИКОВ И ТЕЛ ВРАЩЕНИЯ

6.1. Теория

Многогранник называется *вписанным в сферу* (сфера — *описанной около многогранника*), если его вершины принадлежат сфере (рис. 82, *а*, *б*).

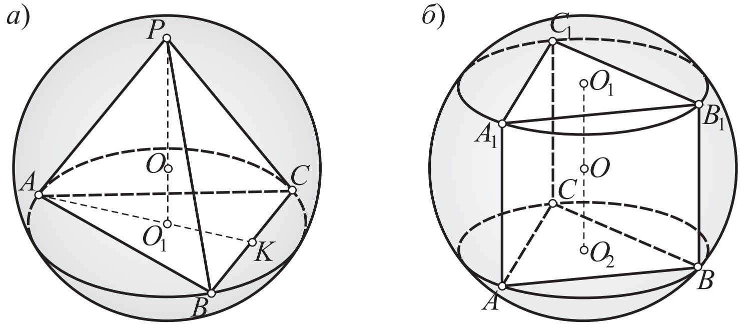


Рис. 82

Многогранник называется *описанным около сферы* (сфера — *вписанной в многогранник*), если все его грани касаются сферы (рис. 83, *а*, *б*).

Цилиндр называется *вписанным в сферу* (сфера — *описанной около цилиндра*), если окружности его оснований принадлежат сфере (рис. 84, *а*).

Цилиндр называется *описанным около сферы* (сфера — *вписанной в цилиндр*), если его основания касаются сферы, а боковая поверхность имеет со сферой только одну общую окружность (рис. 84, *б*).

Конус называется *вписанным в сферу* (сфера — *описанной около конуса*), если его вершина и окружность основания принадлежат сфере (рис. 85, *а*).

Конус называется *описанным около сферы* (сфера — *вписанной в конус*), если основание конуса касается сферы, а боковая поверхность имеет со сферой только одну общую окружность (рис. 85, *б*).

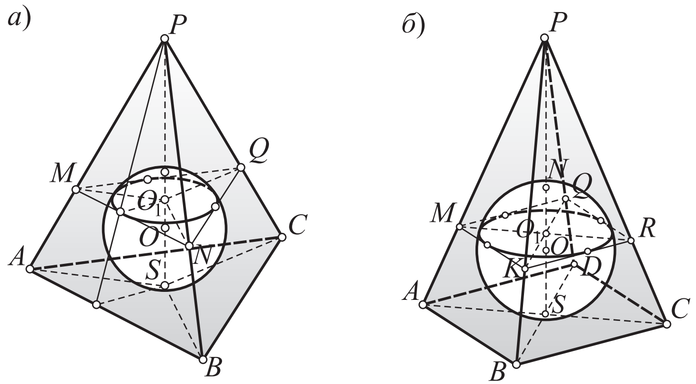


Рис. 83

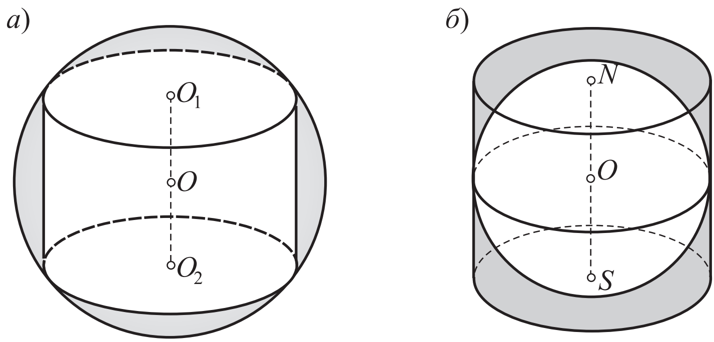


Рис. 84

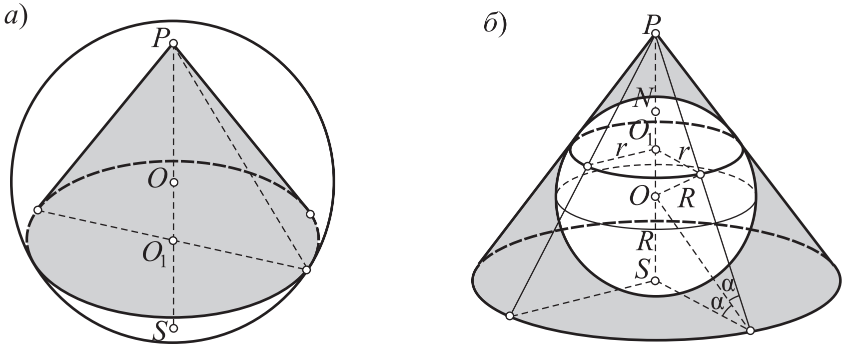


Рис. 85

Призма называется *вписанной в цилиндр* (цилиндр — *описанным около призмы*), если основания призмы вписаны в основания цилиндра (рис. 86, *а*).

Призма называется *описанной около цилиндра* (цилиндр — *вписанным в призму*), если основания призмы описаны около оснований цилиндра (рис. 86, *б*).

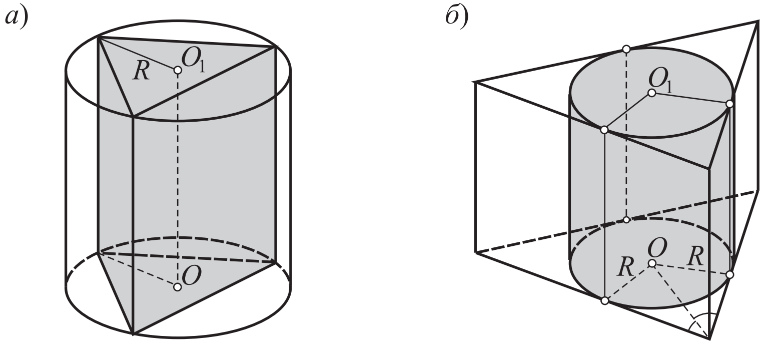


Рис. 86

Усеченная пирамида называется *вписанной в усеченный конус* (усеченный конус — *описанным около усеченной пирамиды*), если ее основания вписаны в основания усеченного конуса (рис. 87, *а*).

Усеченная пирамида называется *описанной около усеченного конуса* (усеченный конус — *вписанным в усеченную пирамиду*), если основания пирамиды описаны около оснований конуса (рис 87, *б*).

Для дальнейшего изложения необходимы новые понятия. Введем их.

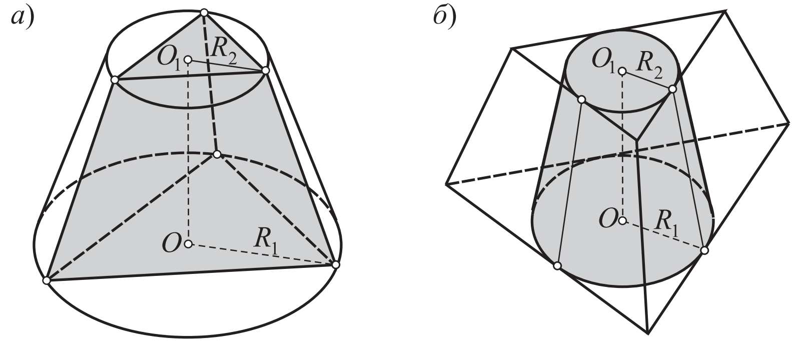


Рис. 87

Пусть дан двугранный угол $\beta a \gamma$, ребро которого a (рис. 88, *а*). Проведем полуплоскость α (с этим же ребром a), разбивающую этот двугранный угол на два равных двугранных угла. Полуплоскость α называется (по аналогии с планиметрией) **биссектором двугранного угла**.

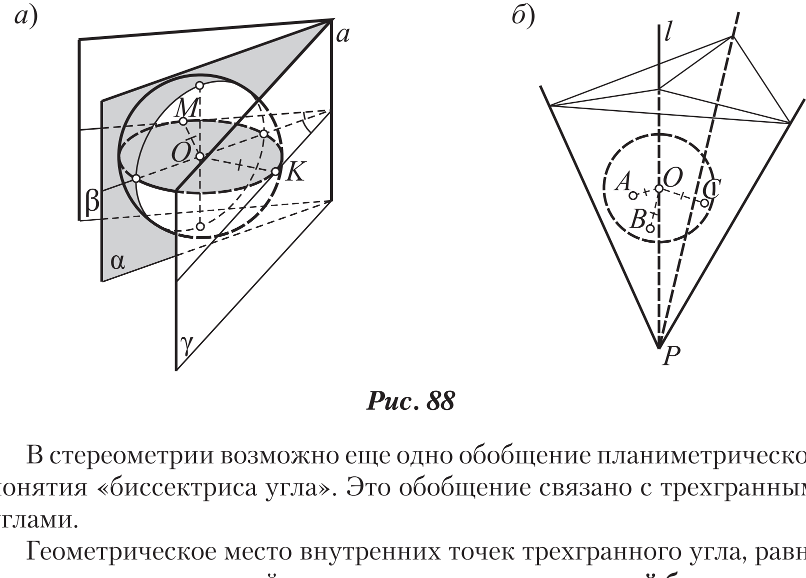


Рис. 88

В стереометрии возможно еще одно обобщение планиметрического понятия «биссектриса угла». Это обобщение связано с трехгранными углами.

Геометрическое место внутренних точек трехгранного угла, равноудаленных от его граней, называется **пространственной биссектрисой угла** (рис. 88, *б*).

Рассмотрим теоремы, связанные с комбинациями пространственных фигур.

Теоремы 8

1. **Около треугольной пирамиды можно описать сферу, и причем единственную.**

2. **В любую треугольную пирамиду можно вписать сферу, и причем единственную.**

3. **В конус можно вписать сферу, и причем единственную.**

4. **Для того чтобы в пирамиду можно было вписать прямой круговой конус, необходимо и достаточно, чтобы ее основанием был описанный многоугольник, а ее высота проходила бы через центр вписанной окружности.**

5. **В правильную четырехугольную пирамиду можно вписать сферу, и причем только одну.**

6. **Около цилиндра можно описать сферу, и причем только одну.**

Доказательство.

1. 1) Рассмотрим треугольную пирамиду $PABC$ (рис. 89). Выясним, что представляет собой геометрическое место точек, равноудаленных от всех четырех вершин данной пирамиды;

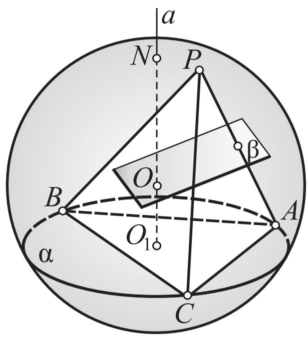


Рис. 89

2) вначале найдем геометрическое место точек пространства, равноудаленных от трех точек — точек A, B и C. Проведем через точки A, B и C плоскость α. В плоскости α точкой, равноудаленной от точек A, B и C, является центр описанной окружности — точка O_1;

3) через точку O_1 к плоскости α проведем перпендикулярную прямую a. Нетрудно видеть, что каждая точка этой прямой равноудалена от точек A, B и C;

4) обратимся теперь к четвертой вершине пирамиды — вершине P. Геометрическое место точек, равноудаленных от двух точек P и A, есть плоскость симметрии этих точек — плоскость β;

5) плоскость β и прямая a не могут быть параллельными (почему?). Поэтому они пересекаются в некоторой точке O, равноудаленной от всех четырех вершин данной пирамиды;

6) если теперь мысленно построить сферу с центром O и радиусом OA, то она пройдет через все вершины пирамиды $PABC$. Тем самым мы нашли центр и радиус искомой сферы;

7) единственность докажите самостоятельно.

На основании теоремы 1 можно сформулировать ряд интересных следствий.

Следствия. *В треугольной пирамиде (тетраэдре) пересекаются в одной точке (O): а) 6 плоскостей, перпендикулярных ребрам и проходящих через их середины; б) 4 прямые, перпендикулярные граням и проходящие через центры описанных около них кругов.*

2. 1) Прежде всего, нетрудно установить, что пространственная биссектриса трехгранного угла есть луч, принадлежащий трем биссекторным плоскостям двугранных углов данного трехгранного угла (докажите это самостоятельно, рис. 90);

2) пусть $PABC$ (рис. 91) — данная треугольная пирамида. Требуется найти точку O, равноудаленную от всех четырех граней этой пирамиды. Рассмотрим вначале трехгранный угол с вершиной P. Внутренние точки этого трехгранного угла, равноудаленные от его граней, лежат на пространственной биссектрисе a, выходящей из вершины P;

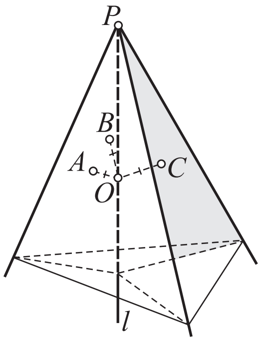


Рис. 90

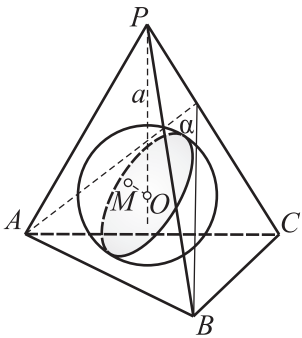


Рис. 91

3) обратимся теперь к четвертой грани — грани ABC. Точки, равноудаленные от граней ABC и PAB, лежат на биссекторе двугранного угла с ребром AB — полуплоскости α;

4) полуплоскость α и луч a пересекаются (почему?). Пусть O — точка пересечения полуплоскости α и луча a. Точка O равноудалена от всех четырех граней данной пирамиды;

5) если из точки O опустить перпендикуляр OM на некоторую грань и построить сферу с центром O и радиусом OM, то эта сфера будет касаться всех граней данной пирамиды. Тем самым мы нашли центр и радиус искомой сферы;

6) единственность докажите самостоятельно.

Следствия. *В треугольной пирамиде пересекаются в одной точке (O): а) 4 луча — пространственные биссектрисы трехгранных углов тетраэдра; б) 6 полуплоскостей — биссекторы двугранных углов при всех ребрах.*

3. 1) Пусть R (рис. 92) — радиус основания конуса, H — его высота и PA — образующая. Рассмотрим ΔPAO_1. Проведем AO — биссектрису угла PAO_1. Точку O примем за центр, а $OO_1 = r$ — за радиус шара. Докажем, что такой шар — искомый;

2) для этого в ΔPAO_1 проведем $OM \perp PA$: очевидно, что $OM = OO_1 = r$;

3) итак, любая образующая конуса касается шара;

4) очевидно, что шар касается плоскости основания;

5) в результате построили сферу, вписанную в данный конус. Центр сферы лежит на оси конуса и делит ее в отношении $PA : R$ считая от вершины (проверьте это самостоятельно);

6) единственность докажите самостоятельно.

4. 1) Пусть $PABC...$ — данная пирамида (рис. 93). По условию в ее основание можно вписать окружность. Пусть O — центр этой окружности. По условию высота пирамиды проходит через точку O;

2) построим (мысленно) конус с вершиной P и основанием — кругом, вписанным в основание пирамиды. Этот конус искомый (проверьте, касаются ли боковые грани пирамиды боковой поверхности конуса);

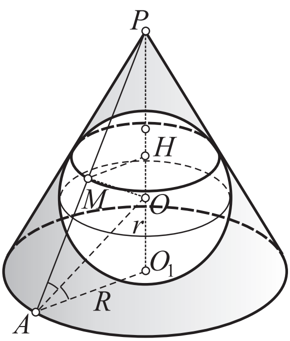


Рис. 92

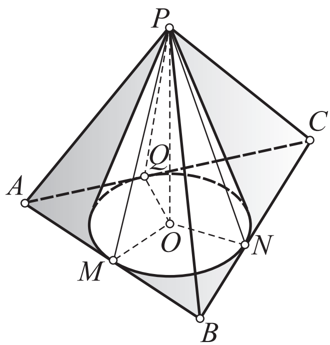


Рис. 93

3) нетрудно убедиться, что данные в задаче условия являются не только достаточными, но и необходимыми;

4) единственность докажите самостоятельно.

5. 1) Пусть $PABCD$ (рис. 94) — правильная четырехугольная пирамида. Построим (мысленно) вписанный в данную пирамиду конус (см. теорему 8.4);

2) в конус впишем сферу (см. теорему 8.3). Докажем, что эта сфера будет вписана и в пирамиду;

3) в самом деле, сфера касается основания конуса, а значит, и основания данной пирамиды;

4) убедимся теперь, что сфера касается каждой боковой грани. С образующей конуса PL сфера имеет единственную общую точку K. В боковой грани лежит только одна образующая конуса. Следовательно, сфера и боковая грань имеют единственную общую точку. Это означает, что сфера касается боковой грани;

5) итак, построенная сфера является искомой;

6) единственность докажите самостоятельно.

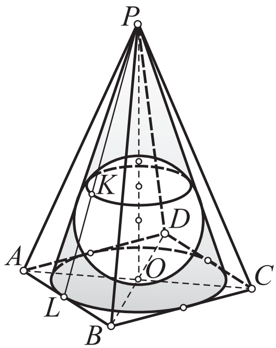


Рис. 94

6. Пусть R и H (рис. 95) — радиус основания и высота данного цилиндра. Проведем шар с центром O в середине оси цилиндра и радиусом, равным расстоянию от этой точки до некоторой точки окружности основания цилиндра. Этот шар искомый. (Докажите самостоятельно.)

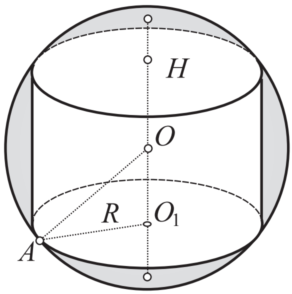


Рис. 95

6.2. Задачи на комбинацию многогранников и шара

Задача 1. (*Найдите ошибку!*) Рассмотрите задачу и ее решение. Найдите ошибку.

Краткая запись задачи.

$PABCD$ — правильная четырехугольная пирамида (рис. 96), $PA = 3$ — боковое ребро пирамиды, $AB = \sqrt{2}$ — сторона основания пирамиды.

Найдите радиус описанного шара.

Решение.

1) Воспользуемся формулой $R_ш = \dfrac{r^2 + H^2}{2H}$, где $R_ш$ — радиус шара, описанного около правильной пирамиды, r — радиус окружности, вписанной в основание пирамиды, H — высота пирамиды. Для нахождения $R_ш$ достаточно найти r и H;

2) так как в основании пирамиды лежит квадрат, то его диагональ

$$AC = AB\sqrt{2} = \sqrt{2}\sqrt{2} = 2;$$

3) тогда $AO = 1$ и из прямоугольного ΔPAO находим высоту пирамиды:

$H = PO = \sqrt{PA^2 - OA^2} = \sqrt{9-1} = 2\sqrt{2};$

4) учтем, что $r = \dfrac{1}{2}AB = \dfrac{\sqrt{2}}{2};$

5) искомый радиус шара

$$R_ш = \frac{r^2 + H^2}{2H} = \frac{\frac{1}{2} + 8}{4\sqrt{2}} = \frac{17}{8\sqrt{2}}.$$

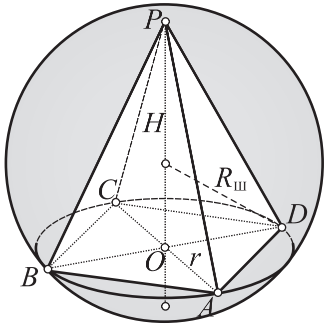


Рис. 96

Ответ: $R_ш = \dfrac{17}{8\sqrt{2}}.$

Задача 2 (73, а, рис. 97).

Замысел решения. Воспользуемся формулой $R_ш = \dfrac{r^2 + H^2}{2H}$, где $R_ш$ — радиус шара, описанного около правильной пирамиды, r — радиус окружности, описанной около основания пирамиды, H — высота пирамиды. Для нахождения $R_ш$ достаточно найти высоту пирамиды H.

Решение.

1) Пусть α — угол наклона бокового ребра к плоскости основания пирамиды. Из прямоугольного ΔAPO имеем: $\dfrac{AO}{PA} = \cos\alpha;$

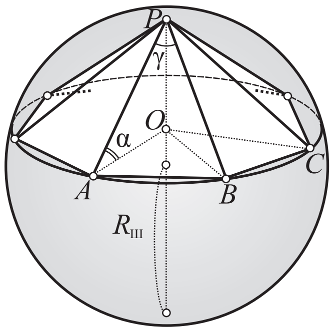


Рис. 97

2) воспользуемся формулой, связывающей углы α и γ в правильной пирамиде (см. задачу 49): $\cos\alpha = \dfrac{\sin\frac{\gamma}{2}}{\sin\frac{\pi}{n}};$

3) тогда

$$PA = \frac{AO}{\cos\alpha} = \frac{r}{\cos\alpha} = \frac{r\cdot\sin\frac{\pi}{n}}{\sin\frac{\gamma}{2}};$$

4) из прямоугольного ΔAPO по теореме Пифагора

$$H^2 = PO^2 = PA^2 - OA^2 = \frac{r^2\cdot\sin^2\frac{\pi}{n}}{\sin^2\frac{\gamma}{2}} - r^2 = \frac{r^2\left(\sin^2\frac{\pi}{n} - \sin^2\frac{\gamma}{2}\right)}{\sin^2\frac{\gamma}{2}};$$

5) приходим к искомому ответу:

$$R_{\text{ш}} = \frac{r^2 + H^2}{2H} = \frac{r^2 + \dfrac{r^2\left(\sin^2\frac{\pi}{n} - \sin^2\frac{\gamma}{2}\right)}{\sin^2\frac{\gamma}{2}}}{\dfrac{2r\sqrt{\sin^2\frac{\pi}{n} - \sin^2\frac{\gamma}{2}}}{\sin\frac{\gamma}{2}}} = \frac{r\sin^2\frac{\pi}{n}}{2\sin\frac{\gamma}{2}\sqrt{\sin^2\frac{\pi}{n} - \sin^2\frac{\gamma}{2}}}.$$

Задача 3 (73, г, рис. 98).

Замысел решения. 1-й способ. Учтем, что правильная четырехугольная призма, как и всякий параллелепипед, является центрально симметричной фигурой. Центром симметрии является точка O, в которой пересекаются диагонали параллелепипеда.

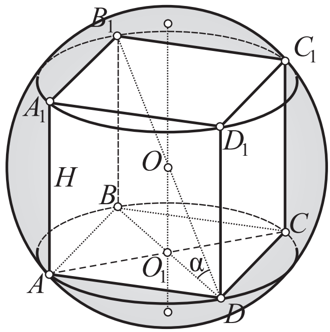


Рис. 98

2-й способ. Воспользуемся формулой из задачи 65, ж:

$$R_{\text{ш}} = \frac{1}{2}\sqrt{H^2 + 4r^2},$$

где $R_{\text{ш}}$ — радиус шара, описанного около правильной призмы, r — радиус окружности, описанной около основания призмы, H — высота призмы. Для нахождения $R_{\text{ш}}$ достаточно найти радиус r окружности, описанной около основания призмы. Решите самостоятельно.

Решение.

1-й способ. 1) Так как в правильной четырехугольной призме диагонали равны, то точка O — точка их пересечения — равноудалена от всех вершин данной призмы. Поэтому точка O является центром описанного шара, а диагональ B_1D — диаметром этого шара;

2) из прямоугольного ΔB_1DB

$$\frac{B_1B}{B_1D} = \sin\alpha \Rightarrow B_1D = 2R_{\text{ш}} = \frac{B_1B}{\sin\alpha} \Rightarrow R_{\text{ш}} = \frac{H}{2\sin\alpha}.$$

Ответ: $R_{\text{ш}} = \dfrac{H}{2\sin\alpha}$.

При решении задач на комбинацию тел часто удобно пользоваться осевым сечением комбинации, изображая его без искажения, во фронтальной плоскости. Для правильного построения осевого сечения, разумеется, необходимо уметь изображать саму комбинацию. Поэтому на первых порах обычно строят изображение комбинации и рядом — изображение осевого сечения. По мере выработки навыка возможно пользоваться только осевым сечением.

Задача 4. Постройте осевые сечения комбинаций некоторых тел шаром. Изобразите на осевом сечении центр шара и его радиус. Учтите, что центром шара: а) описанного около цилиндра или вписанного в цилиндр, является середина отрезка, соединяющего центры оснований цилиндра; б) в который вписана прямая призма, является середина отрезка, соединяющего центры окружностей, описанных около оснований призмы; в) около которого описана прямая призма, является середина отрезка, соединяющего центры окружностей, вписанных в основания призмы; г) в который вписан конус, является центр окружности, описанной около осевого сечения конуса; д) вписанного в конус, является центр окружности, вписанной в осевое сечение конуса; е) описанного около правильной пирамиды, является точка пересечения прямой, на которой лежит высота пирамиды, и серединного перпендикуляра к боковому ребру пирамиды; ж) вписанного в правильную пирамиду, является точка пересечения высоты пирамиды и биссектрисы линейного угла двугранного угла при основании, расположенного в плоскости, проходящей через высоту пирамиды.

Выполните построения самостоятельно.

§ 7. ЧАСТИ СФЕРЫ И ШАРА

7.1. Теория

Многие геометрические задачи связаны не только со сферой и шаром, но и с их частями. Ознакомимся с ними.

Секущая плоскость α (рис. 99, *а*) делит сферу (а также ограниченный ею шар) на две части. Каждая из этих частей сферы (шара) называется **сферическим** (шаровым) **сегментом**. Сечение называется *основанием* сегмента. *Высотой* сегмента естественно назвать наибольший отрезок, содержащийся в шаровом сегменте и перпендикулярный плоскости основания сегмента.

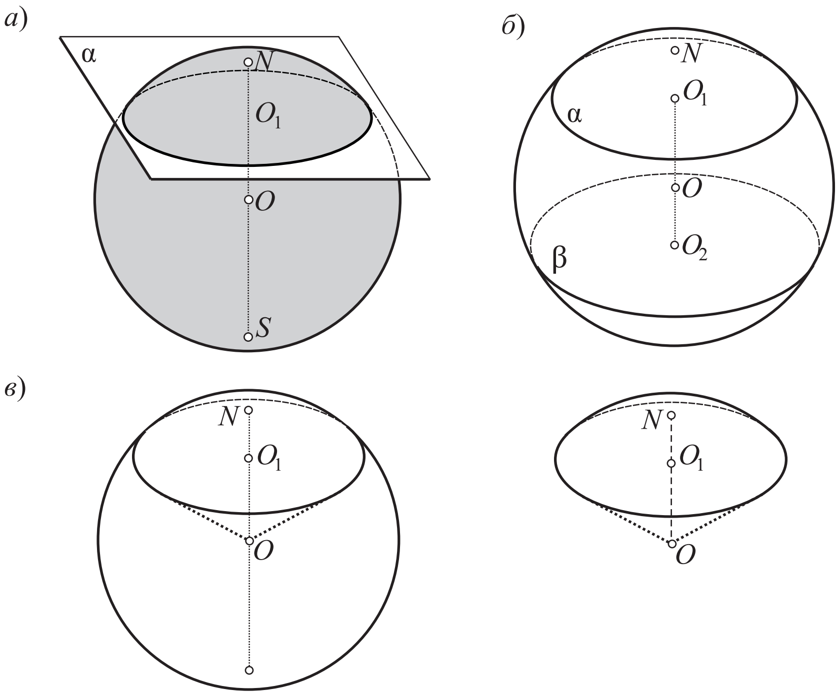


Рис. 99

Легко показать, что таким отрезком является отрезок диаметра, перпендикулярного плоскости основания сегмента (на рисунке NO_1 — высота верхнего сегмента).

Часть сферы (шара), заключенная между двумя параллельными секущими плоскостями α и β (рис. 99, *б*), называется **сферическим поясом** (шаровым слоем). Окружности (круги) сечения называются *основаниями*. Отрезок перпендикуляра, заключенный между основаниями, называется *высотой*. Обычно за высоту удобно брать отрезок O_1O_2.

Шаровым сектором называется тело, ограниченное сферой и боковой поверхностью какого-либо конуса с вершиной в центре сферы (рис. 99, *в*). За *высоту* шарового сектора принимают высоту его сферического сегмента (NO_1 на рис. 99, *в*).

Указанные части шара являются телами вращения.

7.2. Примеры решения задач

Задача 1 (рис. 100). Точка A принадлежит сфере, через точку A проведены две прямые a и b, касательные к сфере. Докажите, что плоскость, проходящая через прямые a и b, является касательной к данной сфере.

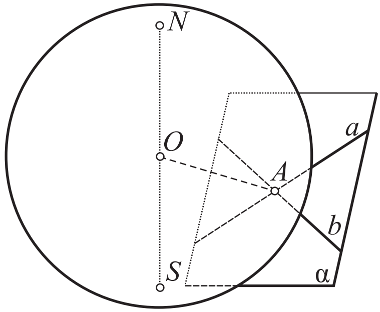


Рис. 100

Доказательство.

1) Проведем радиус OA сферы. Так как прямые a и b — касательные к сфере, то радиус OA перпендикулярен прямым a и b;

2) если радиус OA перпендикулярен двум пересекающимся прямым a и b, то он перпендикулярен и плоскости, проходящей через эти прямые: $OA \perp \alpha = (a, b)$;

3) если плоскость α перпендикулярна к радиусу сферы в конце его, лежащем на сфере, то плоскость α касается данной сферы. Точка A является точкой касания.

Задача 2 (рис. 101). Точка O — центр данного шара, точка A — точка, не принадлежащая шару. Через точку A проведены прямые, касательные к шару. Докажите, что геометрическое место точек касания является окружностью.

Доказательство.

1) Пусть $K_1, K_2, K_3, \ldots$ — точки касания данных прямых и шара. Так как отрезки касательных, проведенных к шару из одной точки, равны между собой, то $AK_1 = AK_2 = AK_3 = \ldots$;

2) поэтому точки K_1, K_2, K_3, ... лежат на сфере с центром A;

3) кроме того, эти точки лежат на данной сфере с центром O;

4) искомое геометрическое место точек касания является пересечением указанных двух сфер. Линией пересечения двух сфер является окружность;

5) значит, искомое геометрическое место точек касания является окружностью.

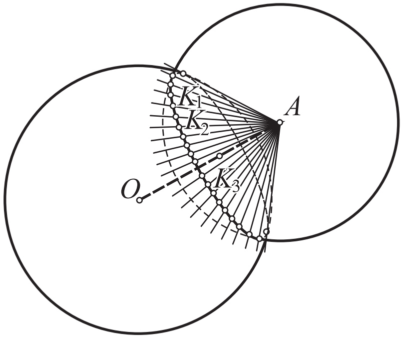


Рис. 101

Задача 3 (рис. 102, *а*, *б*). $ON = R$ — радиус сферы, $OO_1 = d$ — расстояние от центра сферы O до плоскости основания сферического сегмента. Найдите высоту сферического сегмента и радиус его основания.

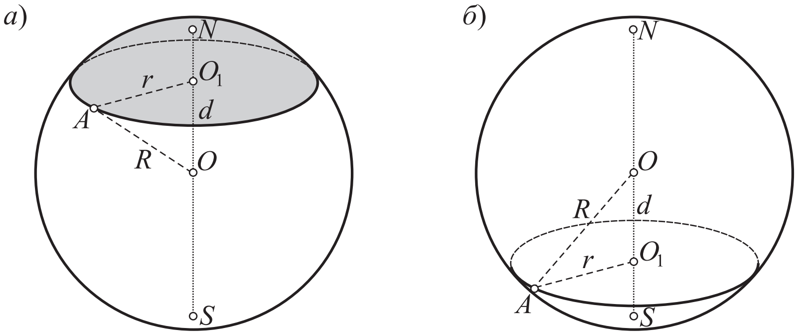


Рис. 102

Решение.

1) Обозначение: H — высота сегмента. Для нахождения высоты сегмента необходимо рассмотреть два случая: $H < R$ и $H > R$. В этих случаях соответственно имеем:

$$H = O_1N = R - d, \quad H = O_1N = R + d;$$

2) обозначение: r — радиус основания сегмента. В обоих случаях из прямоугольного ΔAOO_1 по теореме Пифагора находим, что

$$r = \sqrt{OA^2 - OO_1^2} = \sqrt{R^2 - d^2}.$$

Ответ: $H = R \pm d$, $r = \sqrt{R^2 - d^2}$.

§ 8. ПРАВИЛЬНЫЕ МНОГОГРАННИКИ

8.1. Теория

Аналогом правильных многоугольников, изученных в курсе планиметрии, являются правильные многогранники. Ознакомимся с ними.

Правильным многогранником называется выпуклый многогранник, у которого все грани — равные правильные многоугольники и все многогранные углы равны.

Примером правильного многогранника является куб. Из определения следует, что в правильном многограннике равны все плоские углы, все двугранные углы и все ребра.

Убедимся, что правильных многогранников может существовать не более пяти видов. Для этого учтем, что в многогранном угле наименьшее число граней три и что сумма плоских углов многогранного угла меньше 360°.

1. Сколько может быть правильных многогранников, гранями которых являются правильные треугольники? Каждый угол правильного треугольника равен 60°. Если повторим слагаемым 60° 3 раза, 4 раза и 5 раз, то получим суммы, меньшие 360°, а если повторим слагаемым 60° 6 раз или более, то получим суммы, равные 360° и более. Поэтому из плоских углов правильного треугольника можно образовать выпуклые многогранные углы только трех видов: трехгранные, четырехгранные и пятигранные.

2. Выясним, сколько же может быть правильных многогранников, гранями которых являются квадраты (правильные пятиугольники). Угол квадрата равен 90°, а угол правильного пятиугольника — 108°. Повторяя эти углы слагаемым 3 раза, получаем суммы, меньшие 360°, а повторяя 4 раза и более, получаем 360° или более. Поэтому из плоских углов, равных углам квадрата или правильного пятиугольника, можно образовать только трехгранные углы.

3. Угол правильного шестиугольника равен 120°. Поэтому из таких углов нельзя образовать даже трехгранный угол.

4. Если правильный многоугольник имеет большее число сторон, то из его углов тем более нельзя образовать трехгранный угол.

5. Проведенные рассуждения свидетельствуют о том, что правильных многогранников может существовать не более чем пять видов.

Однако из этих рассуждений не следует, что правильных многогранников действительно существует пять видов. Прояснить этот вопрос помогут только построения.

6. Начнем с многогранника, гранями которого могут служить квадраты. Правильный многогранник с такими гранями действительно существует — это *куб*. С помощью куба можно построить остальные правильные многогранники.

7. Если в кубе провести диагонали граней так, как показано на рисунке 103, *а*, то получим правильный многогранник, называемый *правильным тетраэдром*.

8. Если в кубе построить центры всех его граней, то шесть полученных точек будут вершинами правильного многогранника, называемого *правильным октаэдром*. Такой правильный многогранник изображен на рисунке 103, *б*.

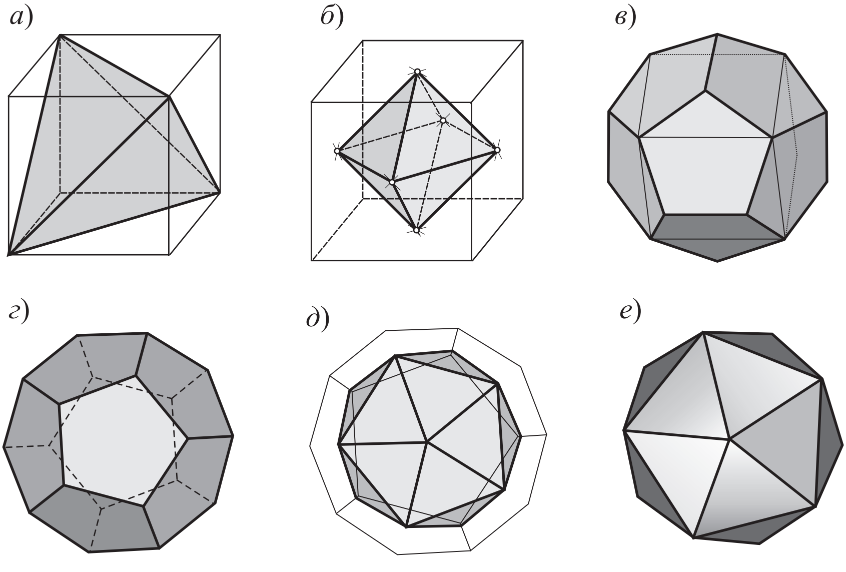


Рис. 103

9. Если теперь через каждое ребро куба (рис. 103, *в*, *г*) проведем плоскость, не имеющую с поверхностью куба других общих точек, кроме точек этого ребра, то получим некоторый двенадцатигранник. Можно подобрать наклон этих плоскостей к граням куба так, чтобы гранями этого двенадцатигранника были правильные пятиугольники. Этот правильный многогранник называется *правильным додекаэдром*.

10. Центры граней правильного додекаэдра (рис. 103, *д*, *е*) будут вершинами правильного многогранника, называемого *правильным икосаэдром*.

В следующей таблице указано число граней (Г), вершин (В) и ребер (Р) у каждого правильного многогранника.

Вид правильного многогранника	Г	В	Р
Правильный тетраэдр	4	4	6
Куб	6	8	12
Правильный октаэдр	8	6	12
Правильный додекаэдр	12	20	30
Правильный икосаэдр	20	12	30

8.2. Примеры решения задач

Задача 1 (72, б, рис. 104, *а*).

Доказательство.

1) Введем обозначения: a — ребро данного тетраэдра, $\angle AMC = \alpha$. Рассмотрим ΔAMC. Вначале найдем стороны этого треугольника, затем по теореме косинусов — угол α;

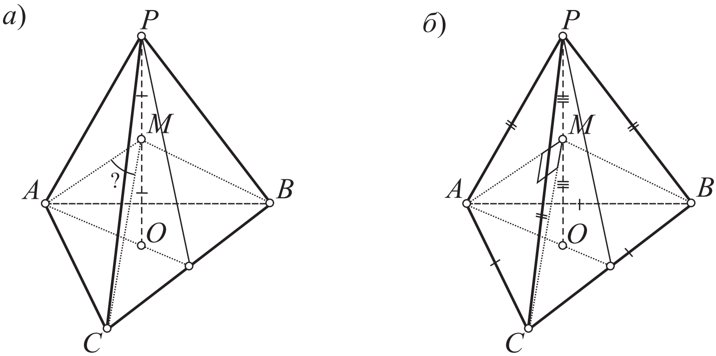


Рис. 104

2) имеем:

$$AO = \frac{a\sqrt{3}}{3},\ PO = \frac{a\sqrt{6}}{3},\ OM = \frac{a\sqrt{6}}{6},$$

$$MC^2 = MA^2 = AO^2 + OM^2 = \frac{a^2}{3} + \frac{a^2}{6} = \frac{a^2}{2},$$

$$AC^2 = 2MA^2 - 2MA^2\cos\alpha \Rightarrow a^2 = a^2 - a^2\cos\alpha \Rightarrow \cos\alpha = 0° \Rightarrow \alpha = 90°;$$

3) так как $\angle AMC = \angle AMB = \angle BMC$, то все эти углы прямые. Отсюда следует справедливость доказываемого утверждения.

Задача 2 (обратная предыдущей, рис. 104, *б*). $PABC$ — правильная треугольная пирамида, PO — высота пирамиды, M — середина высоты PO, отрезки MA, MB и MC попарно перпендикулярны. Докажите, что $PABC$ — правильный тетраэдр.

Доказательство.

1) В основании пирамиды лежит правильный треугольник. Положим, что $AB = BC = CA = a$;

2) боковые ребра пирамиды равны между собой. Докажем, что $PA = a$;

3) выполним следующие вычисления:

а) $AO = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$ (из правильного ΔABC),

б) $AM = \dfrac{a}{\sqrt{2}}$ (из ΔAMC — этот треугольник прямоугольный и равнобедренный, гипотенуза в нем равна a),

в) $MO = \sqrt{AM^2 - AO^2} = \dfrac{a}{\sqrt{6}}$ (из прямоугольного ΔAMO),

г) $PO = 2MO = \dfrac{2a}{\sqrt{6}}$,

д) $PA = \sqrt{PO^2 + AO^2} = \sqrt{\dfrac{4a^2}{6} + \dfrac{3a^2}{9}} = a$ (из прямоугольного ΔAPO);

4) так как все ребра треугольной пирамиды равны между собой, то пирамида является правильным тетраэдром.

Задача 3 (рис. 105). $PABC$ — правильный тетраэдр, a — ребро тетраэдра, O — центр шара, касающегося всех ребер тетраэдра. Найдите радиус шара.

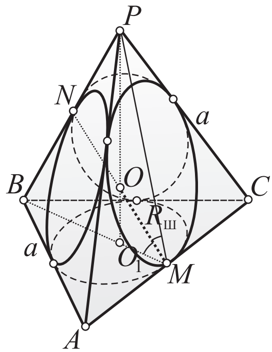


Рис. 105

Решение.

1) Выясним расположение центра данного шара — точки O. Для этого заметим, что плоскость каждой грани тетраэдра пересекает сферу по окружности, вписанной в грань. Пусть O_1 — центр окружности, вписанной в основание тетраэдра.

В правильном тетраэдре точка O_1 является центром равностороннего ΔABC, PO_1 — высотой тетраэдра. Поэтому $PO_1 \perp ABC$.

Если дана окружность, принадлежащая сфере, то центр сферы находится на прямой, проходящей через центр окружности и перпендикулярной плоскости этой окружности. Поэтому центр шара находится на прямой, проходящей через точку O_1 и перпендикулярной плоскости этой окружности, т. е. плоскости ABC.

Такой прямой является прямая PO_1. Значит, точка O является точкой пересечения высот тетраэдра (для правильного тетраэдра — и точкой пересечения его медиан — центроидом тетраэдра);

2) пусть M и N — точки касания шара соответственно с ребрами AC и PB.

Точки M и N — середины противоположных ребер AC и PB тетраэдра. Поэтому отрезок MN проходит через центроид тетраэдра (ранее решенная задача) и, значит, через центр шара.

Тогда точки M и N — две диаметрально противоположные точки шара, а отрезок MN — диаметр шара;

3) перейдем к вычислениям. Отрезок MN будем находить из прямоугольного ΔBMN. Имеем:

$$R = OM = \frac{1}{2}MN = \frac{1}{2}\sqrt{BM^2 - BN^2} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3a^2}{4} - \frac{a^2}{4}} = \frac{a}{2\sqrt{2}}.$$

Ответ: $R = \frac{a}{2\sqrt{2}}$.

Тема 3 ОБЪЕМЫ ТЕЛ И ПЛОЩАДИ ПОВЕРХНОСТЕЙ: НАЧАЛА МЕТОДОВ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

§ 1. ПОНЯТИЕ «ОБЪЕМ ТЕЛА»

1.1. Об измерении длины отрезка и площади плоской фигуры. Объем тела

Понятие «объем тела» рассмотрим в сравнении с понятиями «длина отрезка» и «площадь плоской фигуры». Как известно из планиметрии, длина отрезка и площадь плоской фигуры обладают рядом сходных свойств:

1. Длина любого отрезка есть положительное число.	1. Площадь любой фигуры есть положительное число.
2. Равные отрезки имеют равные длины.	2. Равные фигуры имеют равные площади.
3. Если отрезок состоит из нескольких непересекающихся частей, то длина отрезка равна сумме длин его частей.	3. Если фигура состоит из нескольких непересекающихся частей, то площадь фигуры равна сумме площадей ее частей.
4. Существует отрезок, длина которого равна 1.	4. Площадь квадрата со стороной, равной 1, равна 1.

С помощью свойств 4 фиксируется единица измерения. За счет этого обеспечивается единственность длины каждого отрезка и площади каждой фигуры.

Если в каком-либо рассуждении единица измерения временно не фиксируется, т. е. допускается применение различных единиц измерения, то в результате таких измерений будут получаться различные числа, которые отличаются друг от друга на постоянный множитель.

Например, если a и b — длины некоторого отрезка, получаемые с помощью различных единиц измерения, а c и d — длины другого отрезка, получаемые с помощью тех же единиц измерения, то $a = \alpha b$, $c = \alpha d$.

Аналогично для плоской фигуры: если S_1 и S_2, S_1' и S_2' — соответственно площади двух фигур, измеренных с помощью различных единичных квадратов, то $S_1 = \beta S_2$, $S_1' = \beta S_2'$.

Объем тела обладает аналогичными свойствами. Приведем их.

Аксиомы объема тела

1. Объем тела есть положительное число.

2. Объемы равных тел равны.

3. Если тело состоит из нескольких частей (точнее: если тело есть объединение нескольких тел, пересечение любых двух из которых не является телом), то объем тела равен сумме объемов всех частей.

4. Если длина ребра куба равна единице длины, то объем куба равен единице объема.

В заключение отметим, что основными свойствами объема заканчивается построение системы аксиом стереометрии.

1.2. Примеры решения задач

Задача 1 (рис. 106, *а*). $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб, $AB = 1$, O — точка пересечения его диагоналей. Найдите объем пирамиды $OABCD$.

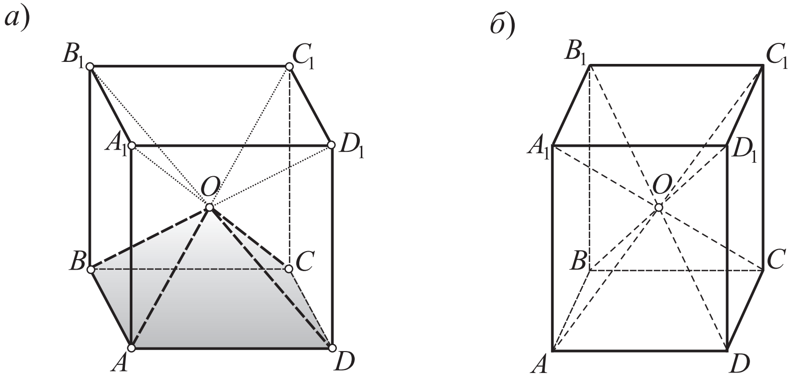


Рис. 106

Решение.

1) Из свойств симметрии куба следует, что данный куб разбивается на 6 равных пирамид:

$$OABCD,\ OA_1B_1C_1D_1,\ OABB_1A_1,\ ODD_1C_1,\ OAA_1D_1D,\ OBB_1C_1C;$$

2) на основании аксиомы 4 объем куба равен 1. Тогда на основании аксиом 2 и 3 объем одной пирамиды равен $\frac{1}{6}$ объема куба:

$$V_{\text{пир}} = \frac{1}{6} V_{\text{куба}} = \frac{1}{6} \cdot 1 = \frac{1}{6}.$$

Ответ: $V_{\text{пир}} = \frac{1}{6}$.

Задача 2 (рис. 106, *б*). $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — произвольный параллелепипед, V — объем параллелепипеда, O — точка пересечения его диагоналей, секущая плоскость проходит через точку O и делит параллелепипед на две части. Найдите объем одной из этих частей.

Решение.

1) Из свойств симметрии параллелепипеда следует, что параллелепипед разбивается на две равные части. Поэтому объемы этих частей равны (аксиома 2) и в сумме равны объему данного параллелепипеда (аксиома 3);

2) отсюда следует, что объем одной части равен $\frac{1}{2}$ объема параллелепипеда.

Ответ: $\frac{1}{2}V$.

Проблема. Попытаемся ответить на следующий вопрос: «*Можно ли на площадь прямоугольника посмотреть* (*хотя бы временно!*) *как на длину отрезка, например на длину его основания?*» Вопрос кажется необычным, и, возможно, возникает сомнение в его «правомочности». В чем тут суть? Попытаемся разобраться в нем, решив следующую задачу.

Задача 3 («подводящая» задача к теореме 9, рис. 107).

Рассмотрите всевозможные прямоугольники с одной и той же фиксированной высотой H. Выясните, справедливы ли следующие утверждения:

а) площади S_H таких прямоугольников можно представить как функцию их оснований b: $S_H = f(b)$;

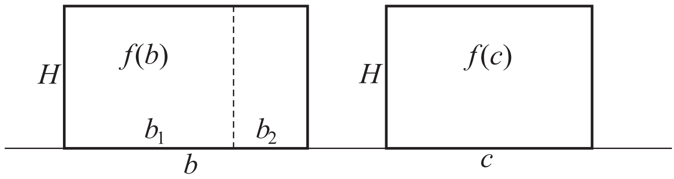
б) площади S_H удовлетворяют свойствам 1—3 длины отрезка;

в) площадь S_H можно рассматривать как длину отрезка b;

г) $S_H = f(b) = kb$.

Решение.

а) Площадь таких прямоугольников $S_H = Hb$. Так как H — постоянно, то S_H является функцией от b: $S_H = f(b)$;



а) $S_H = f(b)$

б) Свойства 1—3 для $f(b)$

в) $f(b)$ и b — два значения ...

г) $S_H = f(b) = kb$

Рис. 107

б) свойство 1 длины отрезка выполняется, так как $f(b) > 0$; свойство 2 длины также выполняется, так как если $b = c$, то $f(b) = f(c)$; выполнимость свойства 3 длины следует из того, что если основание b разбито на непересекающиеся части b_1 и b_2, то $f(b) = f(b_1) + f(b_2)$ (см. рис. 107);

в) так как для $f(b)$ выполняются свойства 1—3 длины (как и для b), то $f(b)$ и b можно рассматривать как два значения длины одного и того же основания (при различных единицах измерения);

г) так как $f(b)$ и b — два различных значения одного и того же основания, то они отличаются друг от друга на некоторый постоянный множитель k: $f(b) = kb$.

Вывод. Таким образом, поставленный вопрос является необычным только на первый взгляд. В следующем параграфе при выводе формулы объема прямого цилиндра мы воспользуемся аналогичным приемом: объемы прямых цилиндров с фиксированной высотой H рассмотрим как площади их оснований.

§ 2. ОБЪЕМ ПРОИЗВОЛЬНОГО ПРЯМОГО ЦИЛИНДРА — НОВОЕ ПРИМЕНЕНИЕ АКСИОМАТИЧЕСКОГО МЕТОДА

2.1. Теория

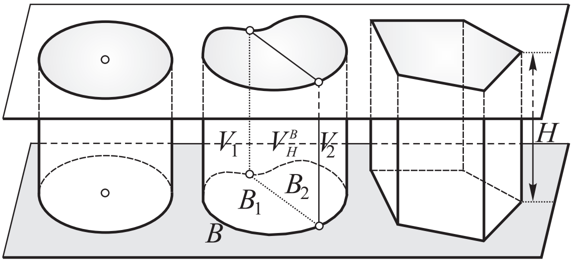
Объемы всех прямых цилиндров (прямого кругового цилиндра, прямой призмы, прямого параллелепипеда, прямоугольного параллелепипеда и куба) находятся по одной и той же формуле, даваемой следующей теоремой.

Теорема 9

Объем произвольного прямого цилиндра равен произведению площади основания цилиндра на его высоту: $V = Sh$**.**

Доказательство.

I. Рассмотрим различные прямые цилиндры (рис. 108) с одной и той же фиксированной высотой H.



I, 1—3 $\boxed{V_H^B = f(B) = kS}$

Рис. 108

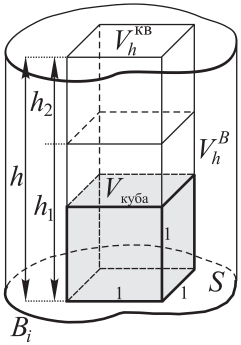
1) Объемы V_H^B таких цилиндров можно представить как функцию их оснований B. Докажем, что $V_H^B = f(B) = kS$, где S — площадь основания B;

2) установим, что функция $V_H^B = f(B)$ обладает свойствами 1—3 площади фигуры. В самом деле: а) как и площадь основания, $V_H^B > 0$; б) если основания цилиндров равны, то при фиксированной их высоте H сами цилиндры будут равными. По свойству 2 объемы этих цилиндров равны. Это означает, что объем таких цилиндров «ведет себя» как площадь их оснований; в) если теперь основание B разбить на части B_1 и B_2, то по свойству 3 $V_H^B = V_1 + V_2$, где V_1 и V_2 — объемы частей, на которые разбит цилиндр (см. рис. 108). Опять видно, что объем V_H^B «ведет себя» как площадь основания S;

3) следовательно, S и $f(B)$ можно рассматривать как два значения площади одного и того же основания, полученные при различных единицах измерения. Поэтому $V_H^B = f(B) = kS$.

Дальнейшие рассуждения связаны с определением значения коэффициента k.

II. Рассмотрим цилиндры с произвольной высотой h (рис. 109).



II, 4—5 $\boxed{V_h^B = \varphi(h) \cdot S}$

III, 6—8 $\boxed{V_h^{кв} = \varphi(h) \cdot 1 = \varphi(h) = ah}$

IV, 9—10 $$\boxed{\begin{array}{l} V_{ед.\ куба} = ah = a \cdot 1 = 1 \Rightarrow a = 1 \\ \left.\begin{array}{l} a = 1 \\ \varphi(h) = ah \end{array}\right\} \Rightarrow \varphi(h) = h \end{array}}$$

V $\boxed{V_h^B = \varphi(h) \cdot S = Sh}$

Рис. 109

4) Естественно допустить, что k зависит от значения h — высоты цилиндра, т. е. k является некоторой функцией φ от h: $k = \varphi(h)$;

5) тогда можно записать, что объемы произвольного прямого цилиндра (с произвольной высотой h)

$$V_h^B = kS = \varphi(h)S, \tag{1}$$

где S — площадь основания B.

III. Рассмотрим цилиндры, в основании которых — единичный квадрат (см. рис. 109).

6) Так как равенство (1) справедливо для произвольного прямого цилиндра, то оно будет справедливо и для цилиндра, в основании которого лежит единичный квадрат. В этом случае $S = 1$, и если через $V_h^{кв}$ обозначить объем такого цилиндра, то можно записать, что

$$V_h^{кв} = \varphi(h) \cdot 1 = \varphi(h);$$

7) заметим, что функция $\varphi(h)$ обладает свойствами 1—3 длины отрезка. В самом деле (см. рис. 109): а) $\varphi(h) = V_h^{кв} > 0$. Для сравнения: длина h также положительна. Это означает, что $\varphi(h)$ в отношении свойства 1 длины ведет себя, как и h; б) если высоты h' и h'' равны, то соответствующие цилиндры равны и по аксиоме объема 2: $\varphi(h') = \varphi(h'')$. Для сравнения: длины высот также обладают аналогичным свойством. Приходим к выводу, что функция $\varphi(h)$ в отношении свойства 2 длины

ведет себя, как длина h; в) если высота h разбита на две части h_1 и h_2, то объем цилиндра с высотой h равен сумме объемов цилиндров с высотами h_1 и h_2: $V_h^{\text{кв}} = \varphi(h) = \varphi(h_1) + \varphi(h_2)$. Для сравнения: таким же свойством обладает и длина высоты h;

8) если свойства 1—3 длины отрезка выполняются для $\varphi(h)$ и h, то их можно рассматривать как два значения одной и той же высоты, полученные при различных единицах измерения. Поэтому $\varphi(h)$ и h отличаются на некоторый постоянный множитель α:

$$V_h^{\text{кв}} = \varphi(h) = \alpha h. \qquad (2)$$

Попытаемся определить множитель α.

IV. Рассмотрим куб (см. рис. 109).

9) Так как равенство (2) справедливо для прямых цилиндров с единичным квадратом в основании и произвольной высотой h, то оно будет справедливо, если h положить равным 1. В этом случае цилиндр будет представлять собой единичный куб, объем которого $V_{\text{ед. куба}} = \alpha h = \alpha \cdot 1 = \alpha = 1$. Отсюда $\alpha = 1$;

10) так как $\alpha = 1$, то из равенства (2) получаем, что $\varphi(h) = h$.

V. Окончательный вывод. Объем прямого цилиндра с произвольным основанием B и высотой h $V_h^B = \varphi(h)\ S = Sh$.

Труд, затраченный на рассмотренное только что доказательство, оправдывается полностью. Об этом свидетельствуют следующие следствия, доказательства которых при другом способе изложения требуют значительных усилий.

Следствия.

1. *Объем прямого кругового цилиндра находится по формуле* $V = \pi R^2 H$, *где* R *— радиус основания цилиндра,* H *— высота цилиндра.*

2. *Объем произвольной прямой призмы, прямого и прямоугольного параллелепипедов, а также куба находится по одной и той же формуле* $V = SH$, *где* S *— площадь основания многогранника,* H *— его высота.*

2.2. Примеры решения задач

Задача 1 (78, б, рис. 110).

Решение.

1) Найдем площадь основания призмы — площадь трапеции $ABCD$. Для этого нарисуем основание трапеции отдельно. Проведем $BT \parallel CD$ и BM — искомую высоту трапеции (высоту равнобедренного ΔABT);

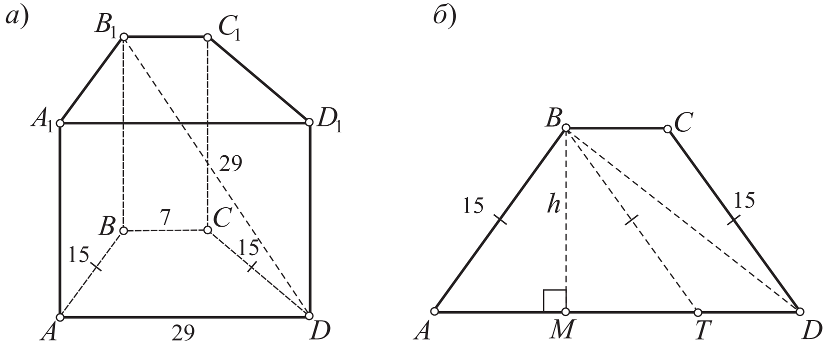


Рис. 110

2) так как $AT = AD - TD = AD - BC = 25 - 7 = 18$, то $AM = \frac{1}{2}AT = 9$;

3) из прямоугольного ΔABM по теореме Пифагора находим высоту h трапеции: $h = BM = \sqrt{AB^2 - AM^2} = \sqrt{15^2 - 9^2} = 12$;

4) тогда площадь основания призмы

$$S_{\text{осн}} = \frac{BC + AD}{2}h = \frac{7 + 25}{2} \cdot 12 = 192;$$

5) осталось найти высоту H призмы. Ее можно найти из прямоугольного ΔBB_1D ($BB_1 \perp ABCD$ и поэтому $BB_1 \perp BD$), предварительно найдя BD:

$$BD^2 = BM^2 + MD^2 = 144 + 256 = 20^2,$$
$$H = BB_1 = \sqrt{B_1D^2 - BD^2} = \sqrt{29^2 - 20^2} = \sqrt{9 \cdot 49} = 21;$$

6) поэтому искомый объем $V = S_{\text{осн}} \cdot H = 192 \cdot 21 = 4032$ (куб. ед.).

Ответ: $V = 4032$ (куб. ед.).

Задача 2 (80, в, рис. 111).

Решение.

1) Начнем с выполнения чертежа: вначале строим сферу и две ее параллели, равноотстоящие от центра сферы; центр шара находится на прямой, проходящей через центры этих окружностей-параллелей; в одну из окружностей-параллелей вписываем правильный ΔABC; боковые ребра приз-

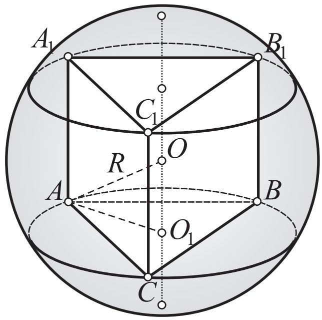


Рис. 111

мы проводим параллельно прямой, проходящей через центры окружностей-параллелей;

2) высота призмы $H = AA_1 = R$. Поэтому для нахождения объема призмы достаточно найти площадь основания. Рассмотрим ΔAOO_1 (O — центр шара, O_1 — центр окружности, описанной около ΔABC). Этот треугольник — прямоугольный, кроме того, в этом треугольнике

$$AO = R,\ OO_1 = \frac{1}{2}AA_1 = \frac{1}{2}R;$$

3) из ΔAOO_1 по теореме Пифагора

$$AO_1 = \sqrt{AO^2 - OO_1^2} = \sqrt{R^2 - \frac{R^2}{4}} = \frac{R\sqrt{3}}{2};$$

4) отрезок AO_1 является радиусом окружности, описанной около правильного треугольника. По формуле, выражающей площадь правильного треугольника через радиус описанной окружности, имеем:

$$S_{\text{осн}} = \frac{3}{4}AO_1^2\sqrt{3} = \frac{3}{4}\cdot\frac{3R^2}{4}\cdot\sqrt{3} = \frac{9\sqrt{3}R^2}{16};$$

5) искомый объем $V = S_{\text{осн}} \cdot H = \dfrac{9\sqrt{3}R^2}{16}\cdot R = \dfrac{9\sqrt{3}R^3}{16}$.

Ответ: $V = \dfrac{9\sqrt{3}R^3}{16}$.

Задача 3 (81, в, рис. 112).

Решение.

1) Введем обозначения: $AC = x$, $BD = y$, $AA_1 = z$. По условию $xz = 336$, $yz = 204$;

2) воспользуемся свойством диагоналей параллелограмма:

$$x^2 + y^2 = 2(25^2 + 39^2) = 4292;$$

3) из п. 1 (вычисления проведите с помощью микрокалькулятора) следует:

$$x^2 z^2 = 336^2, \quad y^2 z^2 = 204^2,$$

$$x^2 z^2 + y^2 z^2 = z^2(x^2 + y^2) = 336^2 + 204^2 = \\ = 154512;$$

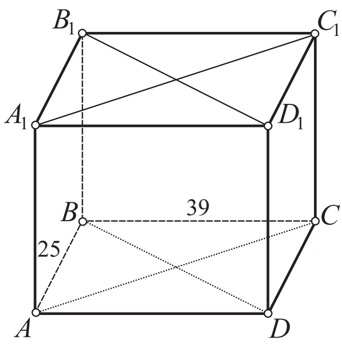


Рис. 112

4) из п. 3 и 2 следует:

$$z^2 = \frac{154512}{x^2 + y^2} = \frac{154512}{4292} = 36, \quad z = 6;$$

5) площадь основания параллелепипеда найдем, предварительно найдя площадь ΔABC по формуле Герона: $AC = x = \frac{336}{z} = \frac{336}{6} = 56$,

$p = \frac{25+39+56}{2} = 60,\ p - AB = 35,\ p - BC = 21,\ p - AC = 4,$

$S_{ABC} = \sqrt{60 \cdot 35 \cdot 21 \cdot 4} = 420,\ S_{ABCD} = 2S_{ABC} = 2 \cdot 420 = 840;$

6) искомый объем $V = S_{\text{осн}} \cdot H = 840 \cdot 6 = 5040$ (куб. ед.).

Ответ: $V = 5040$ (куб. ед.).

§ 3. ОБЪЕМ ТЕЛА, ДЛЯ КОТОРОГО ИЗВЕСТНЫ ПЛОЩАДИ ПОПЕРЕЧНЫХ СЕЧЕНИЙ: ОТ ПРОИЗВОДНОЙ ОБЪЕМА К САМОМУ ОБЪЕМУ

3.1. О методах математического анализа в геометрии

В курсе алгебры вы знакомились с производной функции и умеете для многих функций $y = f(x)$ находить их производные $f'(x)$. В данной теме будет выполняться обратная операция: известна будет производная $f'(x)$ и, зная производную, требуется отыскать саму функцию $f(x)$. В математическом анализе этой операции посвящен целый раздел, называемый *интегральным исчислением*. В данном факультативном курсе не ставится какой-либо цели детально ознакомиться с этим разделом. Постараемся также обойтись без введения специальной терминологии.

В данном разделе производные функций имеют, как правило, простой вид и совсем нетрудно подобрать для них соответствующие функции. Этим мы и будем впредь пользоваться.

Примеры.

Дана $f'(x)$	Найти $f(x)$	Проверка
1. $f'(x) = 5$	$f(x) = 5x$	$(5x)' = 5$
2. $f'(x) = x$	$f(x) = \frac{x^2}{2}$	$\left(\frac{x^2}{2}\right)' = \frac{1}{2} \cdot 2x = x$
3. $f'(x) = 2x - 3$	$f(x) = x^2 - 3x$	$(x^2 - 3x)' = 2x - 3$
4. $f'(x) = x^2 + 4x$	$f(x) = \frac{x^3}{3} + 2x^2$	$\left(\frac{x^3}{3} + 2x^2\right)' = \frac{1}{3} \cdot 3x^2 + 2 \cdot 2x = x^2 + 4x$

При выводе формул объемов тел часто объем рассматривается как функция некоторого аргумента, причем нередко легче вначале найти производную объема, а затем по известной производной объема найти сам объем. Иначе говоря, вначале найти $V'(x)$, а затем $V(x)$.

3.2. Теория

Рассмотрим основную теорему, с помощью которой можно вывести формулы объемов остальных тел, изучаемых в средней школе. Эта теорема позволяет найти $V'(x)$. Последнее является существенным, так как, зная $V'(x)$, нетрудно найти сам объем $V(x)$.

Теорема 10 *(основная теорема)*

Если для данного тела (рис. 113, *а*) **известны площади** $S = S(x)$ **всех его поперечных сечений плоскостями, перпендикулярными к некоторому направлению, принятому за ось** Ox**, при этом** $S(x)$ **является непрерывной функцией на отрезке** $[a; b]$**, то на этом отрезке** $V'(x) = S(x)$**.**

Доказательство.

1) Учтем, что каждому значению x соответствует некоторое тело с объемом $V(x)$;

2) придадим значению x приращение Δx. Значению $x + \Delta x$ будет соответствовать новое тело с объемом $V(x + \Delta x)$;

3) отрезку длиной Δx будет соответствовать часть тела с объемом

$$\Delta V = V(x + \Delta x) - V(x);$$

4) рассмотрим тело с объемом ΔV отдельно (рис. 113, *б*). Так как $S(x)$ является непрерывной функцией от x, то на отрезке $[x; x + \Delta x]$ найдется точка c такая, что тело с объемом ΔV можно заменить равным по объему прямым цилиндром с основанием $S(c)$ и высотой Δx. Объем этого цилиндра равен $S(c)\Delta x$. Значит, $\Delta V = S(c)\Delta x$;

5) тогда $\dfrac{\Delta V}{\Delta x} = \dfrac{S(c)\Delta x}{\Delta x} = S(c)$;

6) если $\Delta x \to 0$ (Δx стремится к нулю), то $(x + \Delta x) \to x$, а следовательно, и $c \to x$. Поэтому $S(c) \to S(x)$;

7) получаем, что при $\Delta x \to 0$ отношение $\dfrac{\Delta V}{\Delta x} = S(c) \to S(x)$, т. е.

$$V'(x) = S(x).$$

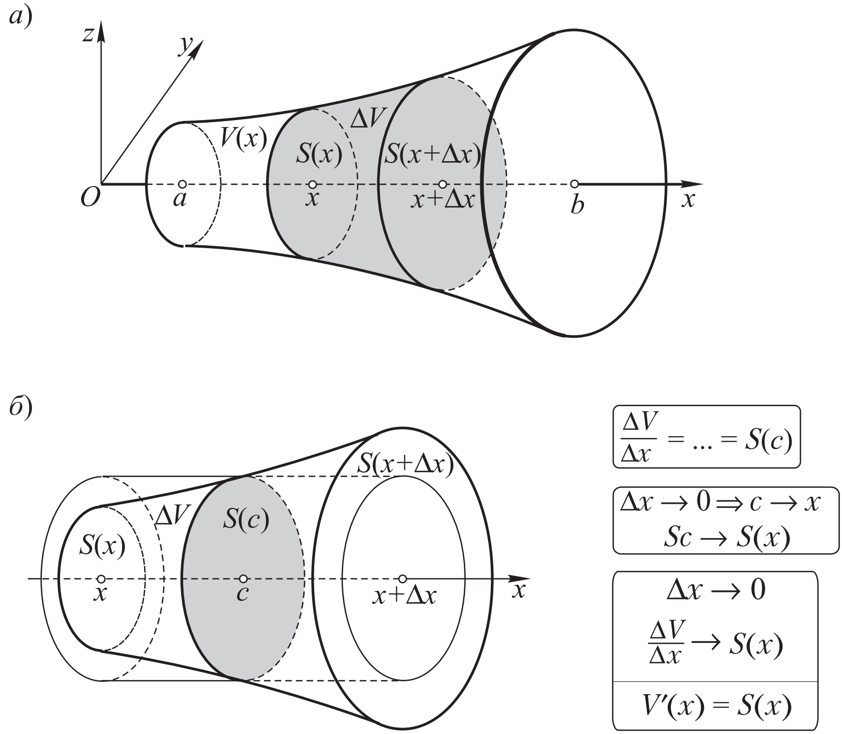


Рис. 113

Следствия.

1. *Если* $V'(x) = S(x) = ax^2 + bx + c$, *то*

$$V(x) = \frac{ax^3}{3} + \frac{bx^2}{2} + cx.$$

2. *Пусть* V — *объем тела, соответствующего отрезку* $[a; b]$, *тогда*

$$V = V(b) - V(a).$$

3. *Пусть* V — *объем тела, имеющего высоту* H *и* $S(x) = ax^2 + bx + c$, *тогда*

$$V = V(H) = \frac{aH^3}{3} + \frac{bH^2}{2} + cH.$$

Докажите самостоятельно.

Задача 1 (рис. 114). В плоскости xOy расположен равностронний ΔOPQ так, что ось x проходит через середину N стороны PQ, $OP = a$; квадрат $ABCD$, непрерывно изменяясь, перемещается так, что концы диагонали AC движутся соответственно по сторонам OP и OQ, причем диагональ AC остается параллельной PQ; плоскость квадрата перпендикулярна плоскости xOy. Какое тело образует перемещающийся квадрат, если считать, что перемещение начинается от начала координат и завершается, когда диагональ AC совпадет со стороной PQ данного треугольника? Найдите объем тела, образуемого этим перемещающимся квадратом.

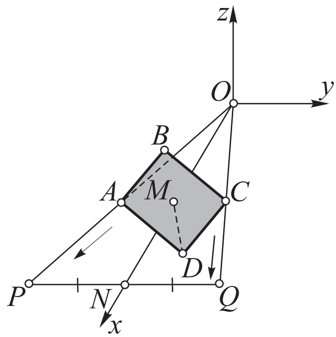


Рис. 114

Решение.

1) В гомотетиях с одним и тем же центром и различными коэффициентами гомотетии образы какой-либо точки лежат на одной прямой, проходящей через эту точку и центр гомотетии. Указанное перемещение квадрата можно описать с помощью гомотетий с общим центром O. Вершины B и D так же, как и вершины A и C, будут двигаться по прямым, проходящим через точку O. В результате квадрат образует при своем перемещении правильную четырехугольную пирамиду с вершиной O и основанием $ABCD$ (в его конечном положении);

2) пусть M — центр квадрата и $OM = x$. Каждое положение квадрата можно рассматривать как поперечное сечение пирамиды. Убедимся в том, что площадь поперечного сечения есть функция от x. В силу гомотетии

$$\frac{OM}{ON} = \frac{AC}{PQ} \Rightarrow AC = \frac{OM \cdot PQ}{ON} = \frac{xa}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{2x}{\sqrt{3}};$$

3) тогда $AB = \frac{AC}{\sqrt{2}} = \frac{2x}{\sqrt{6}}$, $S_{ABCD} = AB^2 = V'(x) = S(x)$;

4) итак, $V'(x) = S(x) = \frac{2x^2}{3}$;

5) тогда $V(x)=\frac{2}{3}\cdot\frac{x^3}{3}$;

4) так как $H=\frac{a\sqrt{3}}{2}$, то искомый объем $V=V(H)=\frac{2}{3}\cdot\frac{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^3}{3}=\frac{\sqrt{3}a^3}{12}$.

Ответ: $V=\frac{\sqrt{3}a^3}{12}$.

Задача 2 (рис. 115). Точка M — точка пересечения диагоналей квадрата $ABCD$; точка M перемещается по диаметру круга радиуса r; плоскость, в которой лежит квадрат, все время остается перпендикулярной плоскости круга; две противоположные вершины A и C квадрата перемещаются по окружности. Найдите объем тела, образуемого этим движущимся квадратом.

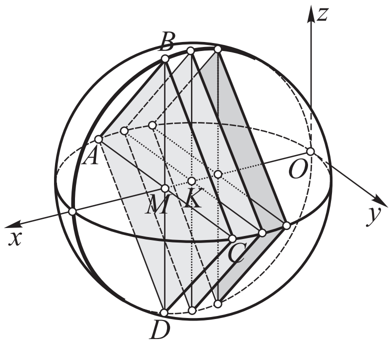


Рис. 115

Решение.

1) Выберем систему координат так, как показано на рисунке: окружность с центром K лежит в плоскости xOy, $K\in Ox$;

2) введем обозначение: $OM=x$. Тогда

$$CM=\sqrt{CK^2-MK^2}=\sqrt{r^2-(r-x)^2},\quad AC=2\sqrt{r^2-(r-x)^2},$$

$$AB=\frac{AC}{\sqrt{2}}=\frac{2\sqrt{r^2-(r-x)^2}}{\sqrt{2}}=\sqrt{2(r^2-(r-x)^2)},$$

$$S_{ABCD}=AB^2=2r^2-2(r-x)^2=-2x^2+4rx;$$

3) итак, $V'(x)=S(x)=-2x^2+4rx$;

4) зная производную объема, находим сам объем:

$$V(x)=\left(\frac{-2x^3}{3}\right)+\frac{4rx^2}{2};$$

5) так как $H=2r$, то искомый объем

$$V=V(H)=\frac{-2(2r)^3}{3}+\frac{4r(2r)^2}{2}=-2\cdot\frac{8r^3}{3}+\frac{4r\cdot 4r^2}{2}=\frac{8r^3}{3}.$$

Ответ: $V=\frac{8r^3}{3}$.

§ 4. ОБЪЕМ ПРОИЗВОЛЬНОЙ ПРИЗМЫ

4.1. Теория

Рассмотрим наклонные призмы.

Теорема 11

Объем произвольной призмы, в частности объем наклонного параллелепипеда, находится по формуле $V = SH$, где S — площадь основания, H — высота тела.

Доказательство.

1) Пусть $S(x)$ (рис. 116) — площадь сечения призмы (в частности, наклонного параллелепипеда) плоскостью, параллельной плоскости основания и отстоящей на расстоянии x от нее. При любом x площади таких сечений равны площади основания: $S(x) = S$;

2) итак, $V'(x) = S(x) = S$;

3) зная производную объема, находим сам объем: $V(x) = Sx$;

4) тогда для высоты тела H искомый объем $V = V(H) = SH$.

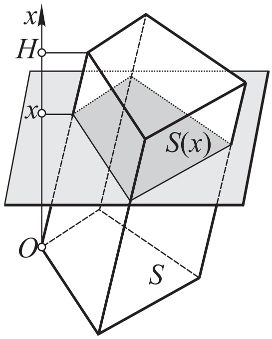


Рис. 116

4.2. Примеры решения задач

Задача 1 (рис. 117). $ABCA_1B_1C_1$ — наклонная треугольная призма, $AB = AC = a$, $\angle BAC = \alpha$, $AA_1 = l$, φ — угол, который образует боковое ребро AA_1 со сторонами AB и AC основания призмы. Найдите объем призмы.

Решение.

1) Сразу можно найти площадь основания призмы:

$$S_{\text{осн}} = \frac{1}{2}AB \cdot AC \sin\alpha = \frac{1}{2}a^2 \sin\alpha;$$

2) проведем высоту A_1A_2 призмы. Так как боковое ребро AA_1 наклонено к AB и AC под одним и тем же углом φ, то точка A_1 ортогонально проектируется в точку, лежащую на биссектрисе $\angle BAC$ (для данного равнобедренного ΔBAC — на его медиане). Поэтому точка A_2 принадле-

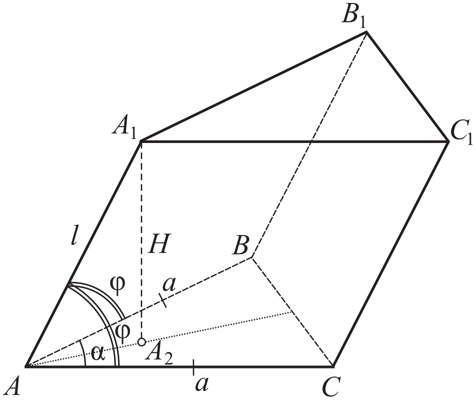


Рис. 117

жит указанной медиане или ее продолжению. Высоту A_1A_2 призмы будем находить из ΔA_1AA_2;

3) введем обозначение: $\angle A_1AA_2 = \beta$. Найдем $\cos\beta$. По известной формуле Эйлера $\cos\varphi = \cos\dfrac{\alpha}{2}\cdot\cos\beta \Rightarrow \cos\beta = \dfrac{\cos\varphi}{\cos\dfrac{\alpha}{2}}$;

4) тогда из ΔA_1AA_2 можно найти высоту призмы:

$$H = A_1A_2 = \sqrt{l^2 - \frac{l^2\cos^2\varphi}{\cos^2\dfrac{\alpha}{2}}} = \ldots = \frac{l}{\cos\dfrac{\alpha}{2}}\sqrt{\cos^2\frac{\alpha}{2} - \cos^2\varphi};$$

5) искомый объем

$$V = S_{\text{осн}}\cdot H = \frac{1}{2}a^2\sin\alpha\cdot\frac{l}{\cos\dfrac{\alpha}{2}}\sqrt{\cos^2\frac{\alpha}{2} - \cos^2\varphi} =$$

$$= a^2 l\sin\frac{\alpha}{2}\sqrt{\cos^2\frac{\alpha}{2} - \cos^2\varphi}.$$

Ответ: $V = a^2 l\sin\dfrac{\alpha}{2}\sqrt{\cos^2\dfrac{\alpha}{2} - \cos^2\varphi}$.

Задача 2 (рис. 118, *а*). $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — наклонная четырехугольная призма, $ABCD$ — прямоугольная трапеция: $\angle C = \angle D = 90°$, ΔABD — равносторонний, $AB = a$, $AA_1 = l$, вершина A_1 призмы равноудалена от вершин B, C и D. Найдите объем призмы.

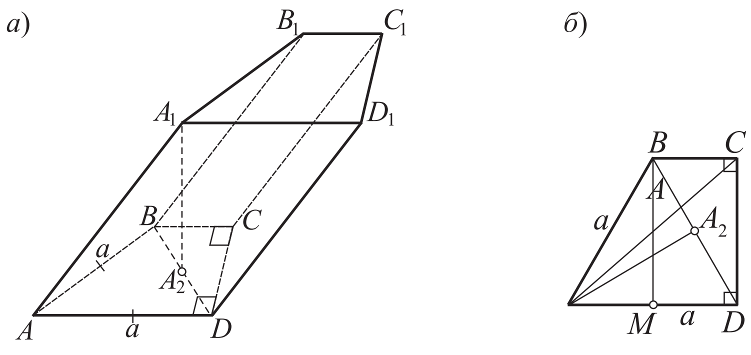


Рис. 118

Решение.

1) Чтобы найти площадь основания призмы (сделаем отдельный рисунок — рис. 118, *б*), необходимо знать высоту трапеции и основание BC;

2) так как ΔABD — равносторонний со стороной, равной a, то можно найти его высоту BM (она же является и высотой трапеции):

$$h_{\text{трап}} = BM = \frac{a\sqrt{3}}{2};$$

3) для прямоугольника $BCDM$: $BC = MD = \dfrac{a}{2}$;

4) тогда $S_{\text{осн}} = \dfrac{1}{2}(AD + BC)h_{\text{трап}} = \dfrac{1}{2}\left(a + \dfrac{a}{2}\right) \cdot \dfrac{a\sqrt{3}}{2} = \dfrac{3\sqrt{3}a^2}{8}$;

5) перейдем к отысканию высоты призмы. Для этого учтем, что вершина A_1 призмы равноудалена от вершин B, C и D. В этом случае вершина A_1 ортогонально проектируется на плоскость нижнего основания в центр окружности, описанной около ΔBCD. Так как этот треугольник прямоугольный, то центром описанной окружности является середина A_2 диагонали BD трапеции. Приходим к выводу о том, что высотой призмы является отрезок A_1A_2;

6) так как $AA_2 = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$, то из прямоугольного ΔAA_1A_2

$$H = A_1A_2 = \sqrt{AA_1^2 - AA_2^2} = \sqrt{l^2 - \frac{3a^2}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{4l^2 - 3a^2};$$

7) искомый объем

$$V = S_{\text{осн}} \cdot H = \frac{3\sqrt{3}a^2}{8} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{4l^2 - 3a^2} = \frac{3\sqrt{3}a^2\sqrt{4l^2 - 3a^2}}{16}.$$

Ответ: $V = \dfrac{3\sqrt{3}a^2\sqrt{4l^2 - 3a^2}}{16}$.

Задача 3 (рис. 119). $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ — наклонная шестиугольная призма, $ABCDEF$ — правильный шестиугольник, a — длина каждого ребра призмы, φ — угол, образуемый боковым ребром AA_1 со сторонами AB и AF основания. Найдите объем призмы.

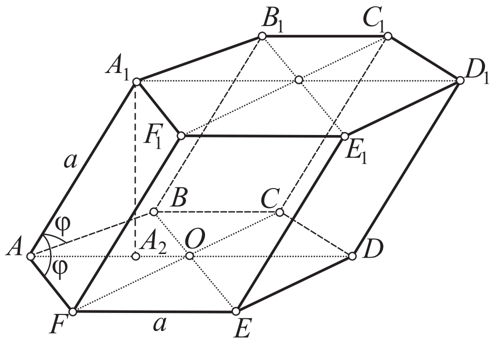


Рис. 119

Решение.

1) Сразу можно найти площадь основания призмы:

$$S_{осн} = 6S_{AOF} = 6 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3\sqrt{3}a^2}{2};$$

2) так как углы, образуемые боковым ребром AA_1 со сторонами AB и AF основания равны, то вершина A_1 ортогонально проектируется в точку A_2, принадлежащую биссектрисе AO угла BAF (O — центр правильного шестиугольника $ABCDEF$). Строим отрезок A_1A_2 — высоту призмы;

3) введем обозначение: $\angle A_1AO = \beta$. Для нахождения $\cos\beta$ применим формулу Эйлера:

$$\cos\varphi = \cos\angle OAF \cdot \cos\beta \Rightarrow \cos\varphi = \cos 60^\circ \cdot \cos\beta \Rightarrow \cos\beta = 2\cos\varphi;$$

4) из прямоугольного ΔAA_1A_2 находим AA_2, затем A_1A_2:

$$AA_2 = AA_1\cos\beta = 2a\cos\varphi,$$

$$H = A_1A_2 = \sqrt{AA_1^2 - AA_2^2} = \sqrt{a^2 - 4a^2\cos^2\varphi} = a\sqrt{1-4\cos^2\varphi};$$

5) искомый объем

$$V = S_{осн} \cdot H = \frac{3\sqrt{3}a^2}{2} \cdot a\sqrt{1-4\cos^2\varphi} = \frac{3\sqrt{3}a^3\sqrt{1-4\cos^2\varphi}}{2}.$$

Ответ: $V = \dfrac{3\sqrt{3}a^3\sqrt{1-4\cos^2\varphi}}{2}$.

§ 5. ОБЪЕМ ТЕЛА ВРАЩЕНИЯ

5.1. Теория

Наиболее простым телом, для которого известны «все поперечные сечения», является тело вращения. Поэтому с помощью предыдущей теоремы можно доказать следующую.

Теорема 12

Если криволинейная трапеция (рис. 120)**, ограниченная кривой** $y = f(x)$**, двумя прямыми** $x = a$, $x = b$ **и отрезком оси** Ox**, вращается вокруг оси** Ox**, то** $V'(x) = S(x) = \pi f^2(x)$**.**

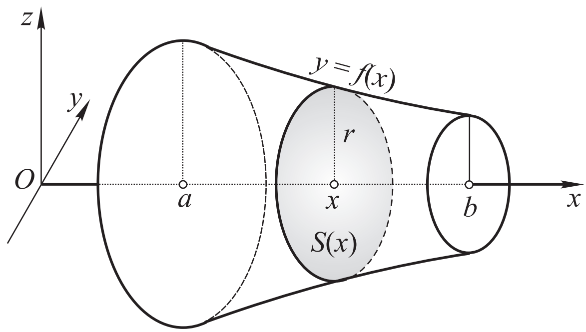


Рис. 120

Доказательство.

Площадь $S(x)$ можно выразить следующим образом: $S(x) = \pi r^2$, где r — радиус вращения, соответствующий координате x. Очевидно, что $r = f(x)$. Тогда $S(x) = \pi f^2(x)$. Поэтому $V'(x) = S(x) = \pi f^2(x)$.

5.2. Примеры решения задач

Задача 1 (рис. 121, *а*). Часть плоскости ограничена линиями: $y = x^2$, $y = 0$ и $x = 1$. Найдите объем тела, получаемого при вращении этой части плоскости вокруг оси x.

Решение.

1) В данном случае $V'(x) = S(x) = \pi f^2(x) = \pi(x^2)^2 = \pi x^4$;

2) тогда $V(x) = \pi\left(\frac{x^5}{5}\right)$;

3) так как высота тела равна 1, то $V = V(1) = \pi\left(\frac{1^5}{5}\right) = \frac{\pi}{5}$.

Ответ: $V = \frac{\pi}{5}$.

Задача 2 (рис. 121, *б*). Найдите новое доказательство формулы объема цилиндра.

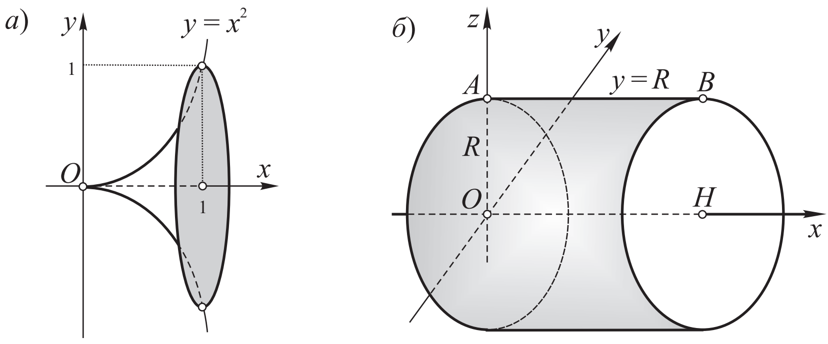


Рис. 121

Решение.

1) Пусть R — радиус основания цилиндра, H — высота цилиндра. Запишем уравнение прямой AB. Оно имеет вид $y = R$;

2) тогда $V'(x) = S(x) = \pi f^2(x) = \pi(R^2) = \pi R^2$;

3) так как πR^2 — константа, то $V(x) = \pi R^2 x$;

4) если высота тела равна H, то $V_ц = V(H) = \pi R^2 H$.

Ответ: $V_ц = \pi R^2 H$.

§ 6. ОБЪЕМ КОНУСА И ПИРАМИДЫ. МЕТОД ОБЪЕМОВ

6.1. Теория

Теорема 13

Объем конуса (пирамиды) равен одной трети произведения площади основания и высоты: $V_к = \frac{1}{3}SH$.

Доказательство.

1) Пусть OH — высота конуса (пирамиды) (рис. 122, *а*, *б*). Начало оси Ox поместим в вершину конуса (пирамиды). На расстоянии x от O проведем сечение, перпендикулярное оси Ox. Полученное сечение будет подобно основанию; коэффициент подобия равен $\frac{x}{H}$. Поэтому площадь сечения $S(x) = \left(\frac{x}{H}\right)^2 S$, где S — площадь основания;

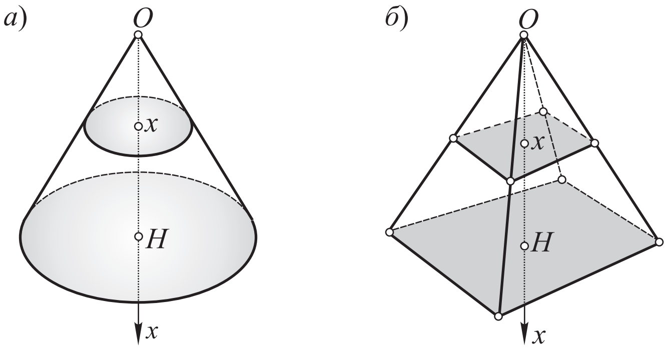


Рис. 122

2) имеем: $V'(x) = S(x) = \left(\frac{x}{H}\right)^2 S = \frac{S}{H^2}x^2$;

3) так как $\frac{S}{H^2}$ — константа, то $V(x) = \frac{S}{H^2} \cdot \frac{x^3}{3}$;

4) так как высота тела равна H, то

$$V_{к} = V(H) = \frac{S}{H^2} \cdot \frac{H^3}{3} = \frac{1}{3}SH.$$

6.2. Примеры решения задач

Задача 1 (90, г, рис. 123).

Решение.

1) Пусть $\angle APB = \alpha$, $AP + PO = m$. Выразим PO через AP:

$$PO = AP\cos\frac{\alpha}{2};$$

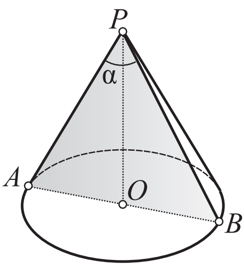


Рис. 123

2) тогда $AP + PO = m \Rightarrow AP + AP\cos\frac{\alpha}{2} = m \Rightarrow AP\left(1+\cos\frac{\alpha}{2}\right) = m \Rightarrow$

$$\Rightarrow AP = \frac{m}{1+\cos\frac{\alpha}{2}};$$

3) находим высоту H и радиус R основания конуса:

$$H = PO = m - AP = m - \frac{m}{1+\cos\frac{\alpha}{2}} = \frac{m\cos\frac{\alpha}{2}}{1+\cos\frac{\alpha}{2}},$$

$$R = AO = AP\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{m\sin\frac{\alpha}{2}}{1+\cos\frac{\alpha}{2}};$$

4) искомый объем

$$V = \frac{1}{3}\pi R^2 H = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{m\sin\frac{\alpha}{2}}{1+\cos\frac{\alpha}{2}}\right)^2 \cdot \frac{m\cos\frac{\alpha}{2}}{1+\cos\frac{\alpha}{2}} = \frac{\pi m^3 \sin\alpha\sin\frac{\alpha}{2}}{48\cos^6\frac{\alpha}{4}}.$$

Ответ: $V = \dfrac{\pi m^3 \sin\alpha\sin\frac{\alpha}{2}}{48\cos^6\frac{\alpha}{4}}$.

Задача 2 (рис. 124). Даны два подобных конуса (две подобные пирамиды) с коэффициентом подобия k. Докажите, что отношение объемов этих конусов (пирамид) равно кубу коэффициента подобия: $\frac{V_1}{V} = k^3$.

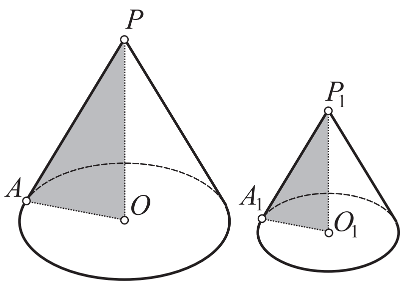


Рис. 124

Решение.

1) Так как конусы подобны, то их соответственные линейные элементы пропорциональны:

$$\frac{A_1P_1}{AP} = \frac{P_1O_1}{PO} = \frac{A_1O_1}{AO} = k;$$

2) запишем объемы этих конусов:

$$\frac{V_1}{V} = \frac{\frac{1}{3}\pi A_1 O_1^2 \cdot P_1 O_1}{\frac{1}{3}\pi AO^2 \cdot PO} = \frac{k^2 AO^2 \cdot kPO}{AO^2 \cdot PO} = k^3;$$

3) доказательство для пирамид проведите самостоятельно.

Задача 3 (90, е, рис. 125, *а*).

Решение.

1) Пусть O_1 — центр основания конуса, O — центр вписанного шара, OT — радиус круга, получаемого в сечении конуса данной плоскостью. Введем обозначения: $\angle PAO_1 = \alpha$, $OO_1 = OK = R$ — радиус шара, V — объем данного конуса, V_1 — объем конуса, основание которого проходит через точку O;

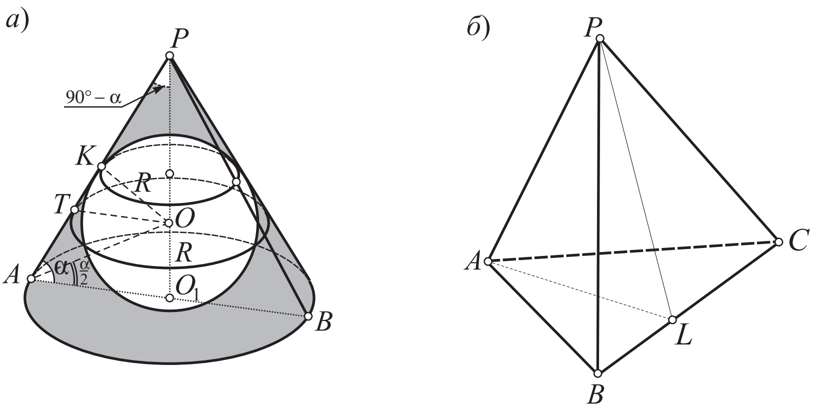


Рис. 125

2) рассмотрим данный конус и конус, радиус основания которого равен OT. Эти конусы гомотетичны в гомотетии с центром P и поэтому они подобны. Воспользуемся результатом предыдущей задачи, найдя предварительно коэффициент подобия k: $k = \frac{OT}{AO_1}$;

3) в прямоугольном ΔOKT: $\angle KOT = \angle APO_1 = 90° - \alpha$,

$$\frac{OK}{OT} = \cos(90° - \alpha) = \sin\alpha \Rightarrow OT = \frac{OK}{\sin\alpha} = \frac{R}{\sin\alpha};$$

4) в прямоугольном ΔAOO_1: $\frac{AO_1}{OO_1} = \operatorname{ctg}\alpha \Rightarrow AO_1 = OO_1 \operatorname{ctg}\alpha = R\operatorname{ctg}\alpha$;

5) тогда $k = \frac{OT}{AO_1} = \frac{R}{\sin\alpha} : R\operatorname{ctg}\alpha = ... = \frac{1}{2\cos^2\frac{\alpha}{2}}$;

6) по условию объем V_1 в 2 раза меньше объема V. Поэтому

$$\frac{V_1}{V} = k^3 = \frac{1}{2} \Rightarrow \left(\frac{1}{2\cos^2\frac{\alpha}{2}}\right)^3 = \frac{1}{2} \Rightarrow 4\cos^6\frac{\alpha}{2} = 1 \Rightarrow \alpha = 2\arccos\frac{1}{\sqrt[6]{4}}.$$

Ответ: $\alpha = 2\arccos\frac{1}{\sqrt[6]{4}}$.

Метод объемов аналогичен методу площадей, знакомому из планиметрии. Следуя этому методу, вначале находят объем тела, а затем с его помощью — некоторые другие элементы данного тела. Полезным оказывается также использование отношения объемов двух тел, имеющих либо равные высоты, либо равные площади оснований. Покажем применение этого метода на примере следующих двух задач.

Задача 4. Боковые ребра правильной треугольной пирамиды равны $\sqrt{2}$. Плоские углы при вершине пирамиды прямые. Найдите высоту пирамиды.

Замысел решения. Нетрудно найти объем прирамиды, приняв за основание боковую грань. Найдя объем пирамиды и площадь основания, к которому проведена искомая высота, нетрудно найти эту высоту. Завершите решение задачи.

Задача 5 (46, рис. 125, *б*). Решите данную задачу с помощью метода объемов.

Краткая запись задачи:

$PABC$ — тетраэдр,

PAL — биссекторная плоскость двугранного угла при ребре PA,

L — точка пересечения биссекторной плоскости с ребром BC.

Доказать: $\frac{BL}{LC} = \frac{S_{BAP}}{S_{CAP}}$.

Решение.

Имеем: $\frac{BL}{LC} = \frac{S_{BAL}}{S_{CAL}} = \frac{V_{PBAL}}{V_{PCAL}} = \frac{S_{BAP}}{S_{CAP}}$. Первое равенство записано на основании того, что отношение площадей двух треугольников с равными высотами равно отношению сторон, к которым проведены эти высоты (такое равенство использовалось в планиметрии при решении задачи методом площадей). Второе равенство записано на основании того, что отношение объемов двух пирамид с равными высотами равно отношению площадей оснований. Далее в этих двух пирамидах, составляющих данную пирамиду, за основания примем соответственно треугольники BAP и CAP. Высоты пирамид, проведенные к этим основаниям из точки L, равны, так как точка L принадлежит биссекторной плоскости двугранного угла данной пирамиды при ребре PA. Так как отношение объемов пирамид с равными высотами равно отношению площадей оснований, то последнее равенство также справедливо. В итоге требуемое равенство доказано.

§ 7. ОБЪЕМ УСЕЧЕННОГО КОНУСА И УСЕЧЕННОЙ ПИРАМИДЫ

7.1. Теория

Выведем формулы объема усеченного конуса и усеченной пирамиды.

Теорема 14

Объемы усеченной пирамиды и усеченного конуса находятся по одной и той же формуле $V=\frac{R_2-R_1}{H}H(S_1+\sqrt{S_1S_2}+S_2)$**, где** H **— высота тела,** S_1 **и** S_2 **— площади оснований.**

Доказательство.

Пусть $AB=H$ — высота усеченного тела (рис. 126). Дополним усеченное тело до полного. Пусть $OA=x$ — высота достроенного тела.

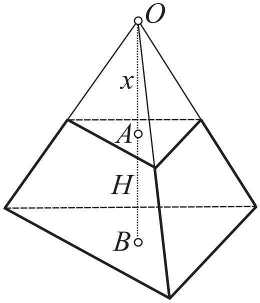
Тогда по теореме об отношении параллельных сечений имеем:

$$\frac{S_1}{S_2}=\frac{x^2}{(x+H)^2}\Rightarrow\frac{x}{x+H}=\frac{\sqrt{S_1}}{\sqrt{S_2}}\Rightarrow x=\frac{H\sqrt{S_1}}{\sqrt{S_2}-\sqrt{S_1}}.$$

Объем усеченного тела найдем как разность объемов двух полных тел с основаниями S_2 и S_1 и соответственно высотами $x+H$ и x:

$$V=\frac{1}{3}(H+x)S_2-\frac{1}{3}xS_1=\frac{1}{3}\big(HS_2+x(S_2-S_1)\big)=$$

$$=\frac{1}{3}\left(HS_2+\frac{H\sqrt{S_1}}{\sqrt{S_2}-\sqrt{S_1}}(S_2-S_1)\right)=\frac{1}{3}H\big(S_2+\sqrt{S_1S_2}+S_1\big).$$



$$\frac{S_1}{S_2}=\ldots$$

$$x=\frac{H\sqrt{S_1}}{\sqrt{S_2}-\sqrt{S_1}}$$

$$V=\tfrac{1}{3}(H+x)S_2-\tfrac{1}{3}xS_1=\ldots$$

Рис. 126

Следствие. *Объем усеченного конуса* $V=\dfrac{1}{3}\pi H\left(R_1^2+R_1R_2+R_2^2\right)$, *где* H *— высота усеченного конуса,* R_1 *и* R_2 *— радиусы его оснований.*

7.2. Примеры решения задач

Задача 1 (рис. 127). $l=6$ — образующая усеченного конуса, $\alpha = 60°$ — угол наклона образующей к плоскости нижнего основания конуса, $R_2 = 1$ — радиус верхнего основания конуса. Найдите объем усеченного конуса.

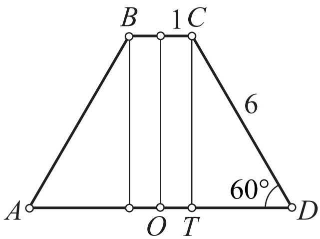


Рис. 127

Решение.

1) Рассмотрим осевое сечение данного конуса, представляющее собой равнобедренную трапецию. Проведем высоту CT трапеции, получим прямоугольный ΔCTD. В этом треугольнике

$$TD=\frac{1}{2}CD=3;$$

2) тогда радиус нижнего основания конуса

$$R_1=OD=OT+TD=1+3=4;$$

3) из прямоугольного ΔCTD по теореме Пифагора находим высоту усеченного конуса $H=CT=\sqrt{CD^2-TD^2}=\sqrt{36-9}=3\sqrt{3};$

4) искомый объем

$$V=\frac{1}{3}\pi H\left(R_1^2+R_1R_2+R_2^2\right)=\frac{1}{3}\pi\cdot 3\sqrt{3}\cdot(16+4+1)=21\sqrt{3}\pi.$$

Ответ: $V=21\sqrt{3}\pi.$

Задача 2 (рис. 128). Дано осевое сечение усеченного конуса — равнобедренная трапеция с основаниями a и b и площадью Q. Найдите объем усеченного конуса.

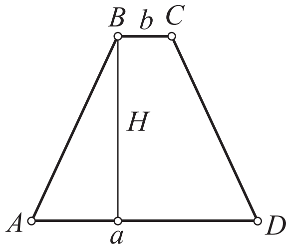


Рис. 128

Решение.

1) Воспользуемся формулой площади трапеции:

$$Q = \frac{1}{2}(a+b)H \Rightarrow H = \frac{2Q}{a+b};$$

2) тогда

$$V = \frac{1}{3}\pi H(R_1^2 + R_1R_2 + R_2^2) = \frac{1}{3}\pi \cdot \frac{2Q}{a+b} \cdot \left(\frac{a^2}{4} + \frac{ab}{4} + \frac{b^2}{4}\right) = \frac{\pi Q(a^2+ab+b^2)}{6(a+b)}.$$

Ответ: $V = \dfrac{\pi Q(a^2+ab+b^2)}{6(a+b)}$.

Задача 3 (рис. 129). V — объем конуса, высота конуса разделена на три равные части, через точки деления проведены плоскости, параллельные основанию конуса, в результате конус разбит на три части. Найдите объем средней части.

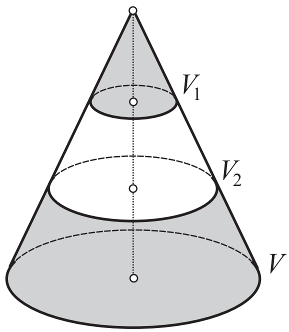


Рис. 129

Решение.

1) Введем обозначения:

V_1 — объем конуса, основанием которого является первое от вершины сечение,

V_2 — объем конуса, основанием которого является второе от вершины сечение,

V_3 — объем искомой средней части.

Имеем: $V_3 = V_2 - V_1$;

2) воспользуемся подобием конусов: $\dfrac{V_1}{V} = k_1^3 = \left(\dfrac{1}{3}\right)^3 = \dfrac{1}{27} \Rightarrow V_1 = \dfrac{V}{27}$;

3) аналогично $\dfrac{V_2}{V} = k_2^3 = \left(\dfrac{2}{3}\right)^3 = \dfrac{8}{27} \Rightarrow V_2 = \dfrac{8V}{27}$;

4) тогда $V_3 = V_2 - V_1 = \dfrac{8V}{27} - \dfrac{V}{27} = \dfrac{7V}{27}$.

Ответ: $V_3 = \dfrac{7V}{27}$.

§ 8. ОБЪЕМ ШАРА И ЕГО ЧАСТЕЙ

8.1. Теория

Выведем формулы объема шара и его частей.

Теоремы 15

Пусть R — радиус шара (рис. 130, a)**.**

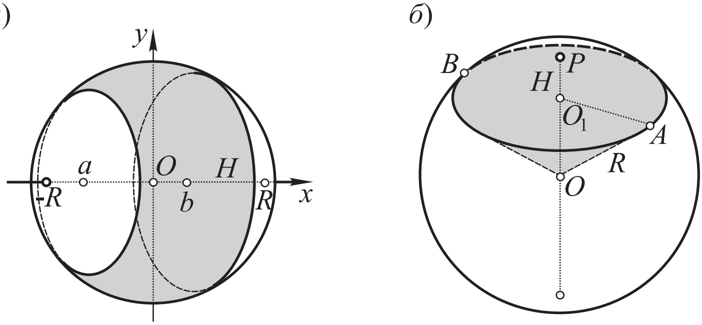


Рис. 130

1. **Объем шарового пояса (слоя), заключенного между плоскостями** $x = a$ и $x = b$**,** $V = \pi R^2(b - a) - \frac{\pi}{3}(b^3 - a^3)$**.**

2. **Объем шара** $V = \frac{4}{3}\pi R^3$**.**

3. **Объем шарового сегмента** $V = \pi H^2\left(R - \frac{H}{3}\right)$**, где** H **— высота сегмента.**

4. **Объем шарового сектора** $V = \frac{2}{3}\pi R^2 H$**.**

Доказательства.

1. 1) В данном случае $S(x) = \pi(R^2 - x^2) = \pi R^2 - \pi x^2$;

2) тогда $V'(x) = S(x) = \pi R^2 - \pi x^2$;

3) находим, что $V(x) = \pi R^2 x - \pi\left(\frac{x^3}{3}\right)$;

4) получаем искомый объем: $V = V(b) - V(a) = \left(\pi R^2 b - \frac{\pi b^3}{3}\right) - \left(\pi R^2 a - \frac{\pi a^3}{3}\right) = \pi R^2(b - a) - \frac{\pi}{3}(b^3 - a^3)$.

2. Для нахождения объема всего шара надо взять $a = -R$, $b = R$. Тогда объем шара

$$V = \pi R^2(R - (-R)) - \frac{\pi}{3}(R^3 + R^3) = \pi R^2 \cdot 2R - \frac{\pi}{3} \cdot 2R^3 =$$
$$= 2\pi R^3 - \frac{2}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

3. Для вычисления объема шарового сегмента с высотой H надо взять $a = R - H$, $b = R$. Тогда

$$V = \pi R^2(R - R + H) - \frac{\pi}{3}\left(R^3 - (R-H)^3\right) = \pi R^2 H - \frac{\pi}{3}R^3 +$$
$$+ \frac{\pi}{3}R^3 - \frac{\pi}{3} \cdot 3R^2 H + \frac{\pi}{3} \cdot 3RH^2 - \frac{\pi}{3}H^3 = \pi RH^2 - \frac{\pi}{3}H^3 = \pi H^2\left(R - \frac{H}{3}\right).$$

4. Рассмотрим шаровой сектор $OAPB$ (рис. 130, *б*), который составляет часть полушара. В нем $OA = R$, $PO_1 = H$. Он является объединением шарового сегмента высотой H и конуса, образующая и высота которого соответственно равны R и $R - H$. Поэтому объем шарового сектора равен сумме объемов шарового сегмента и конуса. Имеем:

$$V_{\text{сегм}} = \pi\left(RH^2 - \frac{H^3}{3}\right).$$

Учитывая, что $OO_1 = R - H$, запишем:

$$AO_1^2 = AO^2 - OO_1^2 = R^2 - (R-H)^2 = 2RH - H^2.$$

Тогда имеем:

$$V_{\text{кон}} = \frac{1}{3}\pi AO_1^2 OO_1 = \frac{1}{3}\pi\left(2RH - H^2\right)(R - H) =$$
$$= \frac{1}{3}\pi\left(2R^2H - 2RH^2 - H^2R + H^3\right) = \frac{1}{3}\pi\left(2R^2H - 3RH^2 + H^3\right) =$$
$$= \pi\left(\frac{2}{3}R^2H - RH^2 + \frac{H^3}{3}\right).$$

Поэтому

$$V_{\text{сект}} = V_{\text{сегм}} + V_{\text{кон}} = \pi\left(RH^2 - \frac{H^3}{3} + \frac{2}{3}R^2H - RH^2 + \frac{H^3}{3}\right) = \frac{2}{3}\pi R^2 H.$$

Примечание. Если взять шаровой сектор, содержащий в себе полушар, то рассуждения проводятся аналогично (надо рассмотреть разность объема шара и объема дополнительного шарового сектора $OAPB$) и приводят к той же формуле.

8.2. Примеры решения задач

Задача 1 (96, з, рис. 131, *а*).

Решение.

1) Для уточнения расположения шара относительно куба построим сечение данной комбинации тел диагональной плоскостью куба (рис. 131, *б*). Эта плоскость проходит через центр O шара. Часть шара, расположенная вне куба, представляет собой шаровой сегмент. Требуется найти объем этого шарового сегмента. Необходимо найти радиус шара и высоту сегмента. Сразу можно найти радиус шара:

$$R = OK = \frac{1}{2}AC = \frac{a\sqrt{2}}{2};$$

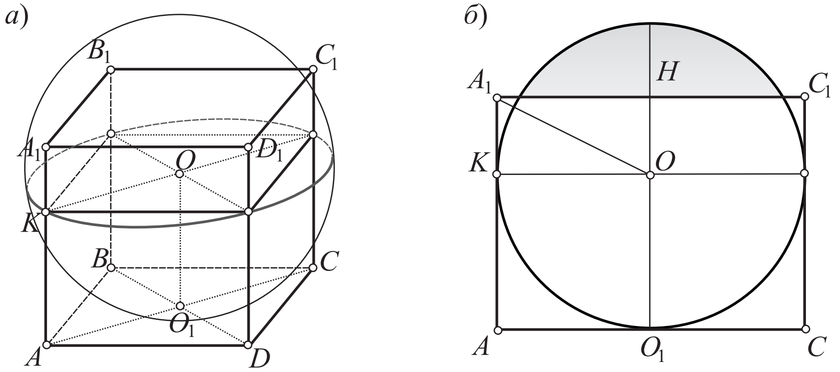


Рис. 131

2) находим высоту шарового сегмента: $H = 2R - AA_1 = 2R - a$; $\frac{1}{3}AO_1^2 \cdot PO_1$;

3) искомый объем шарового сегмента:

$$V = 2\pi RH = 2\pi \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot (2R - a) = \pi\sqrt{2}a(2R - a).$$

Ответ: $V = \pi\sqrt{2}a(2R - a)$.

Задача 2 (96, к, рис. 132).

Решение.

1) Центр O вписанного шара находится на высоте PO_1 конуса, AO — биссектриса угла PAO_1. По условию $\angle APB = \alpha$.

Тогда $\angle APO_1 = \frac{\alpha}{2}$, $\angle PAO_1 = 90° - \frac{\alpha}{2}$, $\angle OAO_1 = 45° - \frac{\alpha}{4}$;

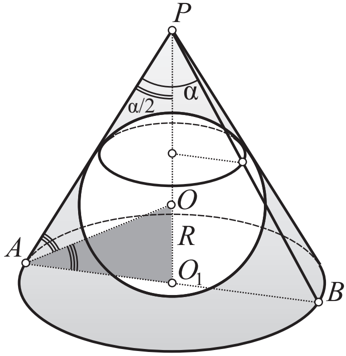


Рис. 132

2) выразим PO_1 через AO_1. Из прямоугольного ΔAPO_1:

$$\frac{AO_1}{PO_1} = \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} \Rightarrow PO_1 = AO_1 \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2};$$

3) воспользуемся формулой объема конуса и найдем радиус AO_1 основания конуса:

$$V = \frac{1}{3} AO_1^2 \cdot PO_1 \Rightarrow 3V =$$

$$= AO_1^2 \cdot AO_1 \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} \Rightarrow 3V = AO_1^3 \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} \Rightarrow AO_1 = \sqrt[3]{3V \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}};$$

4) из прямоугольного ΔAOO_1 находим радиус R шара:

$$\frac{OO_1}{AO_1} = \operatorname{tg}\left(45° - \frac{\alpha}{4}\right) \Rightarrow \frac{R}{\sqrt[3]{3V \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}} = \operatorname{tg}\left(45° - \frac{\alpha}{4}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow R = \sqrt[3]{3V \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}} \cdot \operatorname{tg}\left(45° - \frac{\alpha}{4}\right);$$

5) искомый объем шара

$$V_{\text{ш}} = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi \cdot 3V \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} \cdot \operatorname{tg}^3\left(45° - \frac{\alpha}{4}\right) = 4\pi V \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} \operatorname{tg}^3\left(45° - \frac{\alpha}{4}\right).$$

Ответ: $V_{\text{ш}} = 4\pi V \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} \operatorname{tg}^3\left(45° - \frac{\alpha}{4}\right)$.

Задача 3. Одно основание правильной шестиугольной призмы, все ребра которой равны 1, принадлежит основанию правильной шестиугольной пирамиды, а вершины другого основания лежат на боковых ребрах пирамиды (рис. 133). При какой высоте пирамиды объем вписанного в нее шара будет наибольшим?

Замысел решения. Объем шара будет наибольшим, если наибольшим окажется радиус шара.

Воспользуемся формулой объема шара, вписанного в правильную пирамиду:

$$R = \frac{Hr}{r + \sqrt{H^2 + r^2}},$$

где H — высота пирамиды, r — радиус окружности, вписанной в основание пирамиды. Радиус шара необходимо представить как функцию от H. Для этого потребуется выразить r через H.

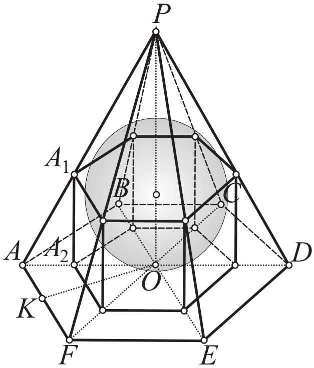


Рис. 133

Решение.

1) Введем обозначение: $AO = x$. Тогда на основании подобия треугольников APO и AA_1A_2:

$$\frac{PO}{A_1A_2} = \frac{AO}{AA_2} \Rightarrow \frac{H}{1} = \frac{1}{x-1} \Rightarrow x = \frac{H}{H-1};$$

2) зная радиус окружности, описанной около основания пирамиды, найдем радиус вписанной окружности: $r = \frac{AO\sqrt{3}}{2} = \frac{H\sqrt{3}}{2(H-1)}$;

3) приходим к искомой функции, выражающей радиус шара через высоту пирамиды:

$$R(H) = \frac{Hr}{r+\sqrt{H^2+r^2}} = \frac{H\cdot\frac{H\sqrt{3}}{2(H-1)}}{\frac{H\sqrt{3}}{2(H-1)}+\sqrt{H^2+\left(\frac{H\sqrt{3}}{2(H-1)}\right)^2}} = \ldots =$$

$$= \frac{H\sqrt{3}}{\sqrt{3}+\sqrt{4H^2-8H+7}};$$

4) найдем значения производной, при которых $R'(H) = 0$:

$$R'(H) = \left(\frac{H\sqrt{3}}{\sqrt{3}+\sqrt{4H^2-8H+7}}\right)' = \ldots = \frac{\sqrt{3(4H^2-8H+7)}-4H+7}{\sqrt{4H^2-8H+7}} = 0,$$

$$\sqrt{3(4H^2-8H+7)} = 4H-7,\quad H^2-8H+7=0,\quad H_1 = 7,\ H_2 = 1$$

(второе значение не подходит по смыслу задачи: высота пирамиды не может быть равной высоте данной призмы);

5) нетрудно убедиться в том, что при $H > \frac{7}{4}$ знак производной совпадает со знаком функции $-4H^2 - 8H - 7$, которая при $H_1 = 7$ изменяет свой знак с «+» на «–»;

6) значит, при $H_1 = 7$ радиус шара и его объем оказываются наибольшими.

Ответ: $H = 7$.

§ 9. ПЛОЩАДЬ ПОВЕРХНОСТИ ПРИЗМЫ И ПИРАМИДЫ

9.1. Теория

Под **площадью поверхности многогранника** понимается сумма площадей всех его граней. Под *перпендикулярным сечением призмы* понимается многоугольник, получаемый при пересечении плоскости, перпендикулярной боковому ребру, с боковыми гранями. (Плоскость пересекает каждую боковую грань!)

Теоремы 16

1. **Площадь боковой поверхности наклонной призмы равна произведению бокового ребра на периметр перпендикулярного сечения.**
2. **Площадь боковой поверхности прямой призмы равна произведению бокового ребра на периметр ее основания.**
3. **Площадь боковой поверхности правильной пирамиды равна произведению полупериметра основания на апофему боковой грани.**
4. **Площадь боковой поверхности правильной усеченной пирамиды равна произведению полусуммы периметров оснований на апофему боковой грани.**

9.2. Примеры решения задач

Задача 1 (рис. 134). В прямую треугольную призму вписан шар, основанием призмы является египетский треугольник (прямоугольный треугольник со сторонами 3, 4 и 5). Найдите площадь боковой поверхности призмы.

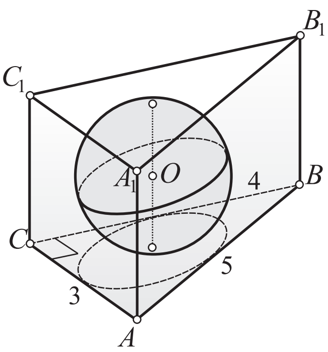


Рис. 134

Решение.

1) Боковая поверхность прямой призмы равна произведению периметра основания на высоту призмы: $S = PH$. Находим сразу периметр основания:

$$P = 3 + 4 + 5 = 12;$$

2) высота призмы равна диаметру шара. Диаметр шара равен диаметру окружности, вписанной в основание призмы. Радиус окружности, вписанной в основание (прямоугольный треугольник), найдем, пользуясь известной из планиметрии формулой:

$$r=\frac{1}{2}(a+b-c)=\frac{1}{2}(3+4-5)=1;$$

3) находим диаметр шара и высоту призмы:

$$2R=H=2r=2;$$

4) искомая площадь боковой поверхности призмы

$$S=PH=12\cdot 2=24.$$

Ответ: 24.

Задача 2 (110, а, рис. 135).

Решение.

1) Введем обозначение: Q — площадь основания. Для решения задачи достаточно найти Q. Воспользуемся формулой связывающей площади данной фигуры и ее ортогональной проекции: *площадь ортогональной проекции плоской фигуры равна площади данной фигуры, умноженной на косинус угла между плоскостью фигуры и плоскостью проекций*;

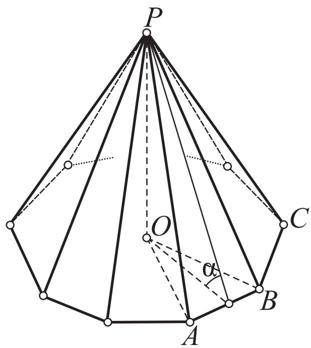


Рис. 135

2) найдем площадь одной боковой грани правильной n-угольной пирамиды: $S_{PAB}=\frac{S}{n}$;

3) на основании указанной формулы найдем площадь ортогональной проекции этой грани на плоскость основания — площадь ΔOAB:

$$S_{OAB}=S_{PAB}\cos\alpha=\frac{S}{n}\cos\alpha=\frac{S\cos\alpha}{n};$$

4) тогда площадь основания

$$Q=S_{OAB}\cdot n=\frac{S\cos\alpha}{n}\cdot n=S\cos\alpha;$$

5) отсюда площадь полной поверхности пирамиды

$$S_{\text{полн}}=S+S\cos\alpha=S(1+\cos\alpha)=2S\cos^2\frac{\alpha}{2}.$$

Ответ: $S_{\text{полн}}=2S\cos^2\frac{\alpha}{2}$.

Задача 3 (116, в, рис. 136).

Доказательство.

1) Введем обозначения: a — сторона основания призмы, H — высота призмы. Так как призма прямая, то четырехугольник BB_1E_1E — прямоугольник;

2) основанием призмы является правильный шестиугольник. Поэтому $AE = 2a$ и $3S_{BB_1E_1E} = 3 \cdot 2a \cdot H = 6aH$;

3) выразим площадь боковой поверхности призмы через a и H: $S_{\text{бок}} = 6S_{ABB_1A_1} = 6aH$;

4) из п. 2 и 3 следует, что $S_{\text{бок}} = 3S_{BB_1E_1E}$.

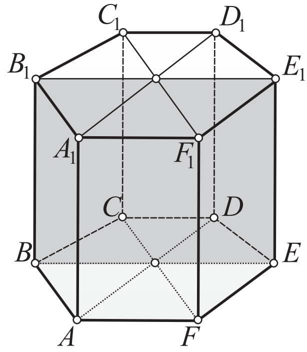


Рис. 136

§ 10. О ПОНЯТИИ «ПЛОЩАДЬ КРИВОЙ ПОВЕРХНОСТИ». ПЛОЩАДЬ ПОВЕРХНОСТИ ЦИЛИНДРА — НОВОЕ ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ПРОИЗВОДНОЙ

10.1. Что такое площадь кривой поверхности?

Идея одного из возможных определений площади кривой поверхности подсказывается формулой объема цилиндра и призмы $V = SH$, которая позволяет по известному объему и высоте найти площадь основания: $S = \frac{V}{H}$. На практике такой способ может оказаться удобнее других. Если, например, требуется вычислить площадь дна кастрюли, то можно налить в кастрюлю 1 л воды и измерить толщину слоя воды. Пусть она оказалась равной 0,5 см. Тогда площадь дна

$$S = \frac{V}{H} = \frac{1000}{0{,}5} = 2000 \text{ (см}^2\text{)}.$$

Этой идеей (примененной для плоской поверхности) воспользуемся для определения площади поверхности тел вращения.

Пусть имеется некоторая поверхность (рис. 137). Покроем эту поверхность с одной стороны слоем толщиной h. Пусть $\Delta V(h)$ — объем такого

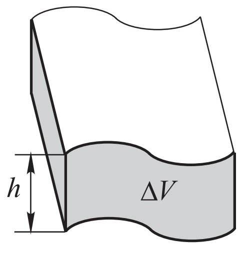


Рис. 137

слоя. **Площадью S кривой поверхности** будем называть число, к которому стремится отношение $\frac{\Delta V}{h}$ при $h \to 0$. В общем, это определение можно записатьтак: $S = V'(h)$. (Убедитесь, что это так.) Слой, о котором говорится в определении, называется *нормальным слоем* поверхности.

Использование производных объемов тел для нахождения площадей их поверхностей — второе направление использования методов математического анализа в геометрии.

10.2. Площадь поверхности цилиндра

Теорема 17

Площадь боковой поверхности прямого кругового цилиндра равна произведению длины окружности основания на высоту:

$$S = 2\pi RH.$$

Доказательство.

Пусть дан цилиндр с радиусом основания R и высотой H (рис. 138). Дадим радиусу R приращение ΔR, не изменяя высоты H. Нормальный слой боковой поверхности данного цилиндра можно рассматривать как тело, получаемое при вращении прямоугольника AA_1B_1B вокруг оси OO_1. Объем цилиндра получает приращение ΔV, равное объему нормального слоя. В данном случае $\frac{\Delta V}{h} = \frac{\Delta V}{\Delta R}$. Найдем число, к которому стремятся эти отношения при h и ΔR, стемящимся к нулю. При $\Delta R \to 0$ отношение $\frac{\Delta V}{\Delta R} \to V'(R)$. Значит,

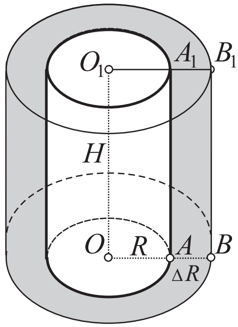


Рис. 138

$$S = V'(R) = (\pi R^2 H)' = 2\pi RH.$$

Следствие. *Площадь полной поверхности цилиндра*

$$S = 2\pi RH + 2\pi R^2 = 2\pi R(H + R).$$

10.3. Примеры решения задач

Задача 1 (120, а, рис. 139).

Замысел решения. Введем обозначение: $AD = A_1D_1 = x$. Дважды выразим диагональ BD_1 параллелепипеда: один раз при помощи угла β, другой раз — угла α. Приравняем эти выражения. Из полученного уравнения найдем x. Зная x, найдем $2R$ и H, и, значит, $S_{\text{бок. ц}} = 2\pi RH$. (Построение рисунка и его обоснование выполните самостоятельно.)

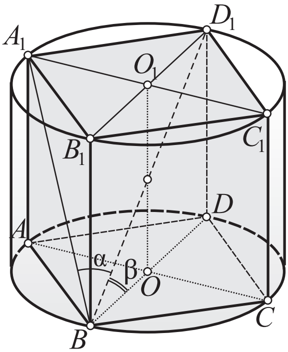


Рис. 139

Решение.

1) Из прямоугольного ΔBAD по теореме Пифагора $DB = 2R = \sqrt{a^2 + x^2}$;

2) из прямоугольного ΔD_1BD

$$\frac{DB}{D_1B} = \cos\beta \Rightarrow D_1B = \frac{\sqrt{a^2+x^2}}{\cos\beta};$$

3) из прямоугольного ΔD_1BA_1 $\dfrac{x}{D_1B} = \sin\alpha \Rightarrow D_1B = \dfrac{x}{\sin\alpha}$;

4) составляем и решаем уравнение:

$$\frac{\sqrt{a^2+x^2}}{\cos\beta} = \frac{x}{\sin\alpha} \Rightarrow x^2 = \frac{a^2\sin^2\alpha}{\cos^2\beta - \sin^2\alpha};$$

5) тогда $2R = \sqrt{a^2 + \dfrac{a^2\sin^2\alpha}{\cos^2\beta - \sin^2\alpha}} = \dfrac{a\cos\beta}{\sqrt{\cos^2\beta - \sin^2\alpha}}$;

6) из прямоугольного ΔD_1BD

$$\frac{H}{2R} = \operatorname{tg}\beta \Rightarrow H = \frac{a\cos\beta\operatorname{tg}\beta}{\sqrt{\cos^2\beta - \sin^2\alpha}} = \frac{a\sin\beta}{\sqrt{\cos^2\beta - \sin^2\alpha}};$$

7) искомая площадь боковой поверхности цилиндра

$$S_{\text{бок. ц}} = 2\pi RH = \pi\cdot\frac{a\cos\beta}{\sqrt{\cos^2\beta - \sin^2\alpha}}\cdot\frac{a\sin\beta}{\sqrt{\cos^2\beta - \sin^2\alpha}} =$$

$$= \frac{\pi a^2\sin 2\beta}{2(\cos^2\beta - \sin^2\alpha)}.$$

Ответ: $S_{\text{бок. ц}} = \dfrac{\pi a^2\sin 2\beta}{2(\cos^2\beta - \sin^2\alpha)}$.

Задача 2 (рис. 140). V — объем цилиндра, α — угол наклона диагонали осевого сечения к плоскости основания цилиндра. Найдите площадь боковой поверхности цилиндра.

Замысел решения. Площадь боковой поверхности цилиндра находится по формуле $S_{\text{бок. ц}} = 2\pi RH$, где R — радиус основания цилиндра,

H — высота цилиндра. Для решения задачи необходимо найти R и H. Выразим H через R, составим уравнение с неизвестным R.

Решение.

1) Воспользуемся углом α — углом наклона диагонали осевого сечения к плоскости основания цилиндра: $\frac{H}{2R} = \operatorname{tg}\alpha \Rightarrow H = 2R\operatorname{tg}\alpha$;

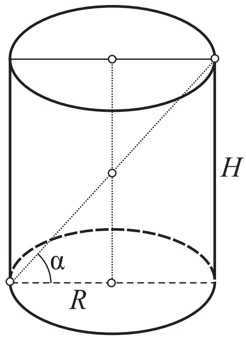


Рис. 140

2) тогда

$V = S_{\text{осн}}H = \pi R^2 H = \pi R^2 \cdot 2R\operatorname{tg}\alpha = 2\pi R^3 \operatorname{tg}\alpha,$

$$V = 2\pi R^3 \operatorname{tg}\alpha \Rightarrow R = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi\operatorname{tg}\alpha}};$$

3) отсюда

$$H = 2R\operatorname{tg}\alpha = 2\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi\operatorname{tg}\alpha}}\cdot\operatorname{tg}\alpha = 2\sqrt[3]{\frac{V\operatorname{tg}^2\alpha}{2\pi}};$$

4) искомая площадь боковой поверхности цилиндра

$$S_{\text{бок. ц}} = 2\pi RH = 2\pi\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi\operatorname{tg}\alpha}}\cdot 2\sqrt[3]{\frac{V\operatorname{tg}^2\alpha}{2\pi}} = 4\pi\sqrt[3]{\frac{V^2\operatorname{tg}\alpha}{4\pi^2}}.$$

Ответ: $S_{\text{бок. ц}} = 4\pi\sqrt[3]{\frac{V^2\operatorname{tg}\alpha}{4\pi^2}}$.

§ 11. ПЛОЩАДЬ ПОВЕРХНОСТИ КОНУСА

11.1. Теория

Теоремы 18

1. **Площадь боковой поверхности конуса равна половине произведения длины окружности его основания на образующую:**

$$S = \pi Rl.$$

2. **Площадь боковой поверхности усеченного конуса равна половине произведения суммы длин окружностей его оснований на образующую:**

$$S = \frac{C_1 + C_2}{2}l.$$

Доказательства.

1. 1) Пусть конус образован вращением прямоугольного ΔOAB вокруг катета OA (рис. 141). Рассмотрим прямоугольник ABB_1A_1 со сторонами $AA_1 = BB_1 = h$. При вращении этот прямоугольник покроет поверхность конуса нормальным слоем толщиной h. Площадь боковой поверхности конуса является числом, к которому стремится отношение $\dfrac{\Delta V}{h}$ при $h \to 0$;

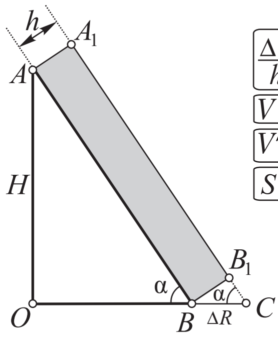
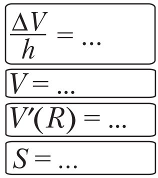


Рис. 141



2) обозначим BC через ΔR. Тогда из прямоугольного ΔBB_1C получаем, что $h = \Delta R \sin\alpha$. Из прямоугольного ΔOAB имеем: $H = R\,\mathrm{tg}\,\alpha$. Тогда

$$\frac{\Delta V}{h} = \frac{\Delta V}{\Delta R \sin\alpha};$$

3) учтем еще, что

а) $V = \dfrac{1}{3}\pi R^2 H = \dfrac{1}{3}\pi R^3\,\mathrm{tg}\,\alpha$; б) $V'(R) = \pi R^2 \mathrm{tg}\alpha$;

в) $\dfrac{R}{\cos\alpha} = AB = l$; г) если $\Delta R \to 0$, то $h \to 0$;

4) тогда площадь боковой поверхности конуса есть число S, к которому стремится отношение $\dfrac{\Delta V}{\Delta R \sin\alpha}$ при $\Delta R \to 0$. Так как α — константа, то достаточно установить, к чему стемится отношение $\dfrac{\Delta V}{\Delta R}$ при $\Delta R \to 0$. Но это отношение стремится к $V'(R)$.

Поэтому $S = \dfrac{1}{\sin\alpha}\,V'(R) = \dfrac{1}{\sin\alpha}\pi R^2 \mathrm{tg}\alpha = \dfrac{\pi R^2}{\cos\alpha} = \pi R l.$

2. Площадь боковой поверхности усеченного конуса (рис. 142) найдем как разность площадей боковых поверхностей двух полных конусов с высотами OC и O_1C. Пусть CA и CB — образующие полных конусов, а $BA = l$ — образующая усеченного конуса. Обозначим радиусы нижнего и верхнего оснований соответственно через R и r. Тогда

$$S = \pi R \cdot AC - \pi r \cdot BC = \pi R(l + BC) - \pi r \cdot BC =$$
$$= \pi R l + \pi(R - r)BC.$$

Так как $\Delta BAD \backsim \Delta CBO_1$, то $\dfrac{R-r}{r}=\dfrac{l}{BC}$. Отсюда $R-r=\dfrac{lr}{BC}$. С учетом этого площадь боковой поверхности усеченного конуса

$$S=\pi Rl+\frac{\pi lr}{BC}BC=$$

$$=\pi Rl+\pi rl=\pi(R+r)l=\frac{C_1+C_2}{2}l,$$

где C_1 и C_2 — длины окружностей оснований конуса.

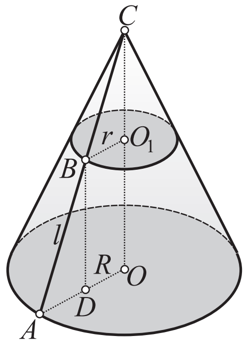


Рис. 142

11.2. Примеры решения задач

Задача 1 (124, а, рис. 143).

Замысел решения. Боковая поверхность конуса касается боковой грани правильной пирамиды по апофеме PT пирамиды. Основание перпендикуляра, проведенного из точки M к боковой грани, также лежит на этой апофеме. Поэтому рассмотрим ΔPOT. В этом треугольнике сосредоточено больше всего данных задачи.

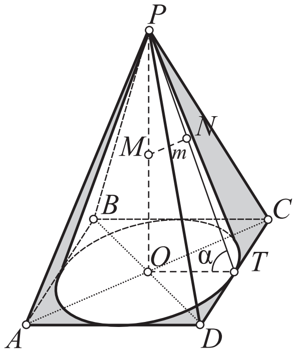


Рис. 143

Решение.

1) Начнем с рассмотрения ΔPMN. Этот треугольник — прямоугольный, в нем катет $MN=m$, $\angle MPN=90°-\alpha$. Тогда

$$\frac{MN}{PM}=\sin(90°-\alpha)=\cos\alpha \Rightarrow PM=\frac{MN}{\cos\alpha}=\frac{m}{\cos\alpha}\Rightarrow PO=\frac{2m}{\cos\alpha};$$

2) из прямоугольного ΔPOT

$$\frac{OT}{PO}=\operatorname{ctg}\alpha \Rightarrow R=OT=PO\operatorname{ctg}\alpha=\frac{2m\operatorname{ctg}\alpha}{\cos\alpha}=\frac{2m}{\sin\alpha};$$

3) из этого же треугольника находим образующую конуса:

$$\frac{OT}{PT}=\cos\alpha \Rightarrow l=PT=\frac{OT}{\cos\alpha}=\frac{2m}{\sin\alpha\cos\alpha}=\frac{4m}{\sin 2\alpha};$$

4) находим площадь боковой поверхности конуса:

$$S_{\text{бок. к}}=\pi Rl=\pi\cdot\frac{2m}{\sin\alpha}\frac{4m}{\sin 2\alpha}=\frac{8\pi m^2}{\sin\alpha\sin 2\alpha};$$

5) искомая площадь полной поверхности конуса

$$S_{\text{полн. к}} = \frac{4\pi m^2}{\sin^2\alpha} + \frac{8\pi m^2}{\sin\alpha\sin 2\alpha} = \ldots = \frac{8\pi m^2\cos^2\dfrac{\alpha}{2}}{\sin^2\alpha\cos\alpha}.$$

Ответ: $S_{\text{полн. к}} = \dfrac{8\pi m^2\cos^2\dfrac{\alpha}{2}}{\sin^2\alpha\cos\alpha}$.

Задача 2 (124, д, рис. 144).

Решение.

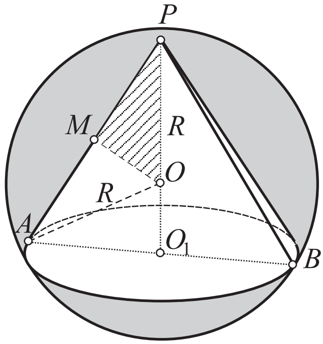


Рис. 144

1) Пусть ΔPAB — осевое сечение конуса. Центр O шара лежит на оси PO_1 конуса (на высоте конуса или на ее продолжении), $OA = OP = OB = R$, $\angle PAO_1 = \alpha$. Окружность, описанная около ΔPAB, является большой окружностью шара. Поэтому серединный перпендикуляр к стороне PA ΔPAB проходит через центр шара — точку O;

2) пусть M — середина стороны PA, тогда $MO \perp PA$. Найдем вначале PM (из прямоугольного ΔPMO), затем PA: $\dfrac{PM}{PO} = \cos\alpha \Rightarrow PM = PO\cos\alpha \Rightarrow PM = R\cos\alpha,\ PA = 2PM = 2R\cos\alpha$;

3) радиус AO_1 основания конуса нетрудно найти из прямоугольного ΔPAO_1: $\dfrac{AO_1}{AP} = \sin\alpha \Rightarrow AO_1 = 2R\cos\alpha\cdot\sin\alpha = R\sin 2\alpha$;

4) искомая площадь боковой поверхности конуса

$$S_{\text{бок. к}} = \pi\cdot AO_1\cdot PA = \pi\cdot R\sin 2\alpha\cdot 2R\cos\alpha = 2\pi R^2\sin 2\alpha\cos\alpha.$$

Ответ: $S_{\text{бок. к}} = 2\pi R^2\sin 2\alpha\cos\alpha$.

Задача 3 (рис. 145). Дан усеченный конус, диагонали осевого сечения усеченного конуса перпендикулярны, l — образующая конуса, α — угол наклона образующей к плоскости основания. Найдите площадь поверхности усеченного конуса.

Решение.

1) Если диагонали равнобедренной трапеции перпендикулярны, то полусумма оснований равна ее высоте (такая ситуация встречалась в планиметрии неоднократно). Находим сразу высоту и сумму радиу-

сов оснований конуса (полусумму оснований $R_1 + R_2$): $H = l\sin\alpha$, $R_1 + R_2 = l\sin\alpha$;

2) отсюда

$$S_{\text{бок. ус. к}} = \pi(R_1 + R_2)l = \pi\, l\sin\alpha \cdot l = \\ = \pi l^2 \sin\alpha;$$

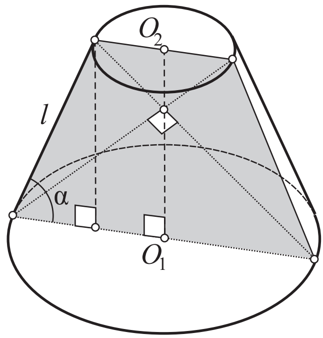


Рис. 145

3) осталось найти сумму площадей двух оснований конуса. Для этого необходимо найти сумму квадратов радиусов оснований конуса:

$$S_{\text{осн}} = \pi R_1^2 + \pi R_2^2 = \pi\left(R_1^2 + R_2^2\right);$$

4) имеем:

$$\left.\begin{aligned} R_1 + R_2 &= l\sin\alpha, \\ R_1 - R_2 &= l\cos\alpha \end{aligned}\right\} \Rightarrow 2(R_1^2 + R_2^2) = l^2;$$

5) тогда $S_{\text{осн}} = \pi(R_1^2 + R_2^2) = \dfrac{\pi l^2}{2}$;

6) искомая площадь поверхности усеченного конуса

$$S_{\text{полн. ус. к}} = S_{\text{бок. ус. к}} + S_{\text{осн}} = \pi l^2 \sin\alpha + \frac{\pi l^2}{2} = \frac{\pi l^2(1+2\sin\alpha)}{2}.$$

Ответ: $S_{\text{полн. ус. к}} = \dfrac{\pi l^2(1+2\sin\alpha)}{2}$.

§ 12. ПЛОЩАДЬ СФЕРЫ И ЕЕ ЧАСТЕЙ

12.1. Теория

Теоремы 19

1. **Площадь сферы** $S = 4\pi R^2$**, где** R **— радиус сферы.**

2. **Площадь сферического сегмента** $S = 2\pi RH$**, где** R **— радиус сферы,** H **— высота сегмента.**

3. **Площадь сферического пояса** $S = 2\pi RH$**, где** R **— радиус сферы,** H **— высота пояса.**

Доказательства.

1. Дадим радиусу R (рис. 146) приращение ΔR. Нормальным слоем будет тело, ограниченное двумя сферами с радиусами R и $R + \Delta R$. Тогда площадь сферы есть число, к которому стремится отношение $\frac{\Delta V}{\Delta R}$ при $\Delta R \to 0$. Но это отношение стремится к $V'(R)$. Поэтому $S = V'(R) = (\frac{4}{3}\pi R^3)' = 4\pi R^2$.

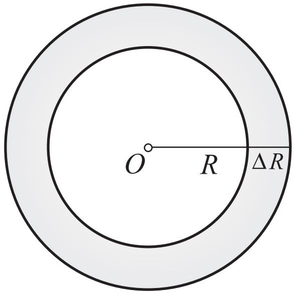
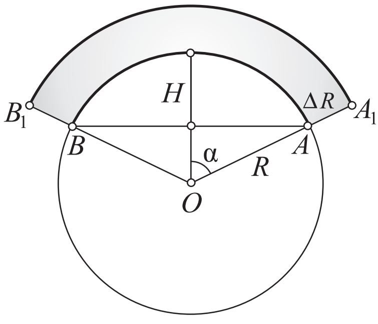


Рис. 146

2. Дадим радиусу R (рис. 147) приращение ΔR. Тогда сферический сегмент покроется нормальным слоем толщиной ΔR. Объем этого слоя обозначим через ΔV. Величину ΔV можно рассматривать как приращение объема шарового сектора AOB. Тогда отношение $\frac{\Delta V}{\Delta R}$ при $\Delta R \to 0$ стремится к производной от объема $V(R)$ этого шарового сектора. Имеем: $S = V'(R)$. Осталось найти $V'(R)$. Учтя, что $H = R - R\cos\alpha = R\,(1 - \cos\alpha)$, найдем объем сектора:

$$V = \frac{2}{3}\pi R^2 H = \frac{2}{3}\pi R^3 (1 - \cos\alpha).$$



$\boxed{S = \ldots = V'(R)}$

$\boxed{V = \ldots}$

$\boxed{V'(R) = \ldots}$

$\boxed{S = \ldots}$

Рис. 147

Тогда

$$V'(R) = \frac{2}{3}\pi(1 - \cos\alpha)(R^3)' = \frac{2}{3}\pi(1 - \cos\alpha)3R^2 = 2\pi R^2(1 - \cos\alpha).$$

Заменив $R(1 - \cos\alpha)$ на H, получим $S = V'(R) = 2\pi RH$.

3. Площадь сферического пояса получим как разность площадей двух сферических сегментов с высотами H_1 и H_2 (рис. 148):

$$S = 2\pi RH_1 - 2\pi RH_2 = 2\pi R(H_1 - H_2) = 2\pi RH.$$

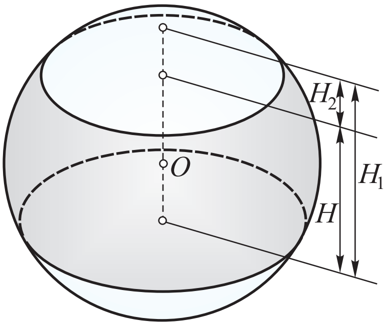


Рис. 148

12.2. Примеры решения задач

Задача 1 (128, а, рис. 149).

Замысел решения. Так как $S_{\text{сферы}} = 4\pi R^2$, то решение задачи сводится к нахождению радиуса R сферы.

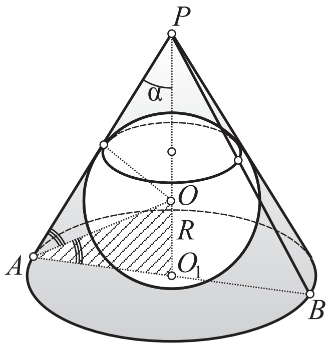


Рис. 149

Решение.

1) Пусть ΔAPB — осевое сечение конуса. Точка O — центр вписанной сферы — является центром окружности, вписанной в ΔAPB, и, значит, является точкой пересечения биссектрис ΔAPB, $OO_1 = R$ — радиус вписанной сферы, $\angle APO_1 = \alpha$, $\angle OAO_1 = 45° - \dfrac{\alpha}{2}$;

2) имеем:

$$\left.\begin{aligned} &\pi AO_1 \cdot AP = Q \text{ (по условию)},\\ &AO_1 = AP\sin\alpha \text{ (в } \Delta APO_1) \end{aligned}\right\} \Rightarrow AP = \sqrt{\frac{Q}{\pi\sin\alpha}};$$

3) поэтому

$$\left.\begin{aligned} &AO_1 = AP\sin\alpha \text{ (в } \Delta APO_1),\\ &AP = \sqrt{\frac{Q}{\pi\sin\alpha}} \end{aligned}\right\} \Rightarrow AO_1 = \sqrt{\frac{Q}{\pi\sin\alpha}} \cdot \sin\alpha = \sqrt{\frac{Q\sin\alpha}{\pi}};$$

4) тогда $R = OO_1 = AO_1 \operatorname{tg}\left(45° - \frac{\alpha}{2}\right) = \sqrt{\frac{Q\sin\alpha}{\pi}} \cdot \operatorname{tg}\left(45° - \frac{\alpha}{2}\right)$;

5) искомая площадь сферы $S_{\text{сферы}} = 4\pi R^2 = 4\pi \cdot \frac{Q\sin\alpha}{\pi} \cdot \operatorname{tg}^2\left(45° - \frac{\alpha}{2}\right) =$
$= 4Q\sin\alpha \operatorname{tg}^2\left(45° - \frac{\alpha}{2}\right)$.

Ответ: $S_{\text{сферы}} = 4Q\sin\alpha \operatorname{tg}^2\left(45° - \frac{\alpha}{2}\right)$.

Задача 2 (129, а, рис. 150).

Замысел решения. Часть земной поверхности, обозреваемой космонавтом, представляет собой сферический сегмент. Площадь сферического сегмента находится по формуле: $S_{\text{сег}} = 2\pi RH$. Радиус сферы дан ($R =$ $= 6370$ км), остается найти высоту H сферического сегмента (на рисунке высотой сферического сегмента является отрезок NP).

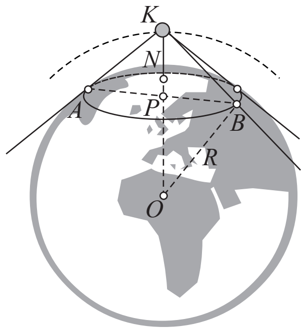


Рис. 150

План решения. 1) $OK = ON + KN = 6370 +$ $+ 1060 = 7430$ (км);

2) ΔOKB — прямоугольный;

3) $KB = \sqrt{OK^2 - OB^2} = \sqrt{7430^2 - 6370^2} = \ldots$;

4) по формуле высоты, проведенной к гипотенузе прямоугольного треугольника,

$$PB = \frac{OB \cdot KB}{OK} = \frac{6370\sqrt{7430^2 - 6370^2}}{7430} = \ldots;$$

5) $KP = \ldots$;

6) $H = NP = KP - KN = \ldots$;

7) $S_{\text{сег}} = 2\pi RH = 2\pi \cdot 6370 \cdot H = \ldots$.

(Завершите решение задачи.)

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

Тема 1. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

§ 1. Движение. Преобразование подобия. Их общие свойства

1. а) При преобразовании пространства каждая точка $A(x; y; z)$ переходит в точку $A_1(x; y; -z)$. Является ли это преобразование движением? Постройте точки A и A_1. Какую закономерность в их расположении вы заметили?

б) При преобразовании пространства каждая точка $A(x; y; z)$ переходит в точку $A_1(x; y; \frac{1}{2}z)$. Является ли это преобразование движением?

в) При преобразовании пространства каждая точка $A(x; y; z)$ переходит в точку $A_1(x+a; y+b; z+c)$. Является ли это преобразование движением?

г) При преобразовании пространства каждая точка $A(x; y; z)$ переходит в точку $A_1(x; y; z+2)$. Является ли это преобразование движением?

2. а) Являются ли преобразования, данные в задачах 1, а—г, преобразованиями подобия?

б) При преобразовании пространства каждая точка $A(x; y; z)$ переходит в точку $A_1(kx; ky; kz)$. Является ли это преобразование преобразованием подобия?

3. а) Пусть точки A, B и C принадлежат плоскости α и не лежат на одной прямой. При движении эти точки переходят соответственно в точки A_1, B_1 и C_1. Возьмите на плоскости α некоторую точку X и постройте ее образ в этом движении.

б) Составьте и решите задачу, аналогичную задаче 3, а, для преобразования подобия.

4. а) Из планиметрии известна симметрия относительно прямой (осевая симметрия). Нельзя ли определить аналогичное преобразование в пространстве?

б) Из планиметрии известна симметрия относительно точки (центральная симметрия). Нельзя ли определить аналогичное преобразование пространства?

5. а) В какие прямые переходят при движении две параллельные, две пересекающиеся, две скрещивающиеся прямые?

б) Составьте и решите задачу, аналогичную задаче 5, а, для преобразования подобия.

в) Сохраняет ли движение (преобразование подобия) перпендикулярность двух прямых, параллельность прямой и плоскости, перпендикулярность прямой и плоскости, параллельность двух плоскостей, перпендикулярность двух плоскостей?

г) Сохраняет ли движение (преобразование подобия) величину угла между: 1) пересекающимися прямыми; 2) скрещивающимися прямыми; 3) прямой и плоскостью; 4) двумя плоскостями?

д) Сохраняет ли движение (преобразование подобия) расстояние между: 1) двумя параллельными прямыми; 2) точкой и плоскостью; 3) параллельными прямой и плоскостью; 4) двумя скрещивающимися прямыми?

6. а) При преобразовании пространства каждая точка $A(x; y; z)$ переходит в точку $A_1(x; y; z+3)$. Является ли это преобразование движением? Будет ли оно переводить прямые в прямые? Постройте образ прямой BC, задаваемой точками $B(1; 2; 3)$ и $C(-1; -2; -3)$.

б) Если при преобразовании некоторая точка переходит сама в себя, то она называется *неподвижной точкой* этого преобразования. В условиях предыдущей задачи выясните, имеются ли в данном преобразовании неподвижные точки. В какую прямую переходит в этом преобразовании ось аппликат?

в) В условиях задачи 6, а выясните, будет ли данное преобразование переводить плоскость в плоскость. Постройте образ плоскости MNP, задаваемой точками $M(4; 0; 0)$, $N(0; 3; 0)$, $P(0; 0; 2)$. Запишите уравнения плоскости MNP и ее образа в данном преобразовании.

г) Будет ли преобразование, данное в задаче 6, а, переводить сферу в сферу? Запишите уравнение образа сферы $(x-2)^2+(y-3)^2+(z-5)^2=36$.

д) Пусть $A \in \alpha$ — данные точка и плоскость, A_1 и α_1 — их образы в некотором движении (они тоже являются данными). Через точку A проведена прямая a, перпендикулярная плоскости α. Как будет располагаться образ прямой a относительно плоскости α_1?

е) Составьте и решите задачу, аналогичную предыдущей, для преобразования подобия.

ж) Пусть в некотором движении все точки какой-либо плоскости остаются неподвижными. Докажите, что прямая, перпендикулярная этой плоскости, в данном движении переходит сама в себя.

з) Докажите, что если при движении две точки прямой остаются неподвижными, то каждая точка этой прямой является неподвижной.

§ 2. Виды движений: симметрия относительно плоскости, центральная симметрия

7. Дайте определения понятий, приведенных на схеме (рис. 151).

Рис. 151

8. В теореме 2.7 утверждается, что «...при центральной симметрии и параллельном переносе прямые (плоскости) переходят в параллельные прямые (плоскости)». Можно ли эту теорему сформулировать так: «Центральная симметрия и параллельный перенос сохраняют параллельность прямых (плоскостей)»?

9. а) Имеются ли неподвижные точки при симметрии относительно плоскости? Какую фигуру они образуют?

б) Если при преобразовании прямая переходит сама в себя (при этом ее точки не обязательно являются неподвижными), то она называется *инвариантной прямой* этого преобразования. Имеются ли инвариантные прямые при симметрии относительно плоскости? Как они располагаются относительно плоскости симметрии?

в) Если при преобразовании точка A переходит в точку A_1, а точка A_1 — в точку A (для любой точки A), то такое преобразование называется *инволюцией*. Является ли инволюцией симметрия относительно плоскости?

10. а) Даны две прямые (плоскости), симметричные относительно некоторой плоскости. Как они могут располагаться по отношению друг к другу?

б) Докажите, что если две прямые (плоскости) симметричны относительно некоторой плоскости и пересекаются, то точка (прямая) пересечения лежит на плоскости симметрии.

в) Докажите, что две точки имеют лишь одну плоскость симметрии.

г) Докажите, что каждая точка, лежащая на плоскости симметрии двух данных точек, равноудалена от этих точек.

д) Докажите обратное предыдущему: если точка равноудалена от двух данных точек, то она лежит на плоскости симметрии этих точек.

е) Если некоторая фигура при симметрии относительно плоскости переходит сама в себя, то говорят, что эта *фигура имеет плоскость симметрии*. Сколько плоскостей симметрии имеет куб? Имеет ли плоскости симметрии правильный тетраэдр?

11. а) Можно ли составить задачи, аналогичные задачам 9, а—в, для центральной симметрии?

б) Если при центральной симметрии некоторая фигура переходит сама в себя, то она называется *центрально-симметричной*. Является ли параллелепипед центрально-симметричной фигурой?

в) Может ли ограниченная фигура иметь два центра (две плоскости) симметрии?

г) Докажите, что середина любого отрезка, соединяющего точки двух параллельных плоскостей, есть центр симметрии этих плоскостей.

д) Найдите геометрическое место центров симметрии двух параллельных плоскостей.

е) Можно ли утверждать, что геометрическое место центров симметрии двух параллельных плоскостей есть плоскость симметрии этих плоскостей?

12. а) Пусть $\beta \perp \alpha$. Докажите, что плоскость β при симметрии относительно плоскости α переходит сама в себя: $\alpha(\beta) = \beta$.

б) Докажите, что прямая a, перпендикулярная плоскости α, при симметрии относительно плоскости α переходит сама в себя: $a \perp \alpha \Rightarrow$ $\Rightarrow \alpha(a) = a$.

в) 1) Докажите, что если при движении две пересекающиеся прямые переходят каждая сама в себя, то плоскость, проходящая через эти прямые, также переходит сама в себя.

2) Пользуясь этим утверждением, докажите, что плоскость, проходящая через центр симметрии, при центральной симметрии с этим центром переходит сама в себя.

г) При последовательном выполнении двух центральных симметрий с центрами O_1 и O_2 прямая a переходит в прямую a_1. Докажите, что $a \parallel a_1$.

д) Пользуясь симметрией относительно плоскости, докажите, что если одна из параллельных прямых перпендикулярна плоскости симметрии, то ей перпендикулярна и вторая прямая.

е) Пользуясь симметрией относительно плоскости, докажите, что если одна из параллельных плоскостей перпендикулярна плоскости симметрии, то ей перпендикулярна и другая плоскость.

ж) Прямая a проходит через центр симметрии и перпендикулярна некоторой плоскости α. Докажите, что прямая a перпендикулярна образу плоскости α в данной центральной симметрии.

з) Докажите, что если плоскость α проходит через центр симметрии и перпендикулярна некоторой плоскости β, то плоскость α перпендикулярна образу плоскости β в данной центральной симметрии.

и) Пусть a, α и β — данные прямая и плоскости. На прямой a постройте точку X, которая при симметрии относительно плоскости α переходит в точку, принадлежащую плоскости β.

к) Даны точки A, A_1 и прямая a. На прямой a постройте точку X, равноудаленную от точек A и A_1.

л) При последовательном выполнении двух центральных симметрий с центрами O_1 и O_2 плоскость α переходит в плоскость α_1. Докажите, что $\alpha \parallel \alpha_1$.

§ 3. Виды движений: поворот вокруг оси, осевая симметрия

13. а) Являются ли неподвижными точки оси поворота?

б) Справедливо ли, что каждые две точки имеют бесконечное множество осей поворота?

в) Докажите, что две точки, соответственные в повороте вокруг оси, равноудалены от любой точки этой оси.

г) Докажите, что если точка одинаково удалена от двух данных точек, то она лежит на одной из осей поворота, переводящего одну из них в другую.

д) Дана прямая, параллельная оси поворота. Можно ли утверждать, что эта прямая перейдет в параллельную прямую?

е) Докажите, что при повороте вокруг оси угол между каждой прямой и осью поворота остается неизменным.

14. а) При решении задач 13, а—е были установлены некоторые свойства поворота вокруг оси. Останутся ли они справедливыми для осевой симметрии?

б) Верно ли, что все свойства поворота вокруг оси являются свойствами осевой симметрии? Справедливо ли обратное утверждение?

15. а) Докажите, что один из двух равных непараллельных отрезков можно совместить с другим поворотом вокруг оси. Как построить ось и угол поворота?

б) Постройте ось симметрии двух данных скрещивающихся прямых.

16. а) Верно ли утверждение: «Если все точки какой-либо фигуры Φ симметричны точкам фигуры Φ_1 относительно плоскости α и в то же время симметричны точкам другой фигуры Φ_2 относительно центра O, лежащего в плоскости α, то фигуры Φ и Φ_2 симметричны относительно оси, проходящей через центр O перпендикулярно плоскости α»?

б) Если при осевой симметрии фигура переходит сама в себя, то говорят, что эта фигура имеет ось симметрии. Сколько осей симметрии имеет куб?

17. а) Докажите, что плоскость, перпендикулярная оси поворота, при выполнении поворота переходит сама в себя.

б) Пусть при повороте вокруг оси s на $60°$ точка M переходит в точку M_1. На оси s взята точка A такая, что отрезок AM образует с осью s угол $45°$. Найдите $\angle MAM_1$.

в) Пусть $s \perp \alpha$. Докажите, что последовательное выполнение осевой симметрии с осью s и симметрии относительно плоскости α можно заменить одной центральной симметрией. Где расположен центр этой симметрии?

г) Докажите, что если прямая перпендикулярна оси поворота, то образ этой прямой также перпендикулярен оси поворота.

д) Докажите, что плоскость, параллельная оси поворота, переходит в плоскость, которая также параллельна оси поворота.

е) Пусть a, s и α — данные прямые и плоскость. На прямой a постройте точку X, которая при осевой симметрии с осью s переходит в точку, принадлежащую плоскости α.

ж) Пусть s, α и β — данные прямая и плоскости. На плоскости α постройте прямую x, которая бы при осевой симметрии с осью s переходила в прямую, принадлежащую плоскости β.

з) Пусть $O \in s$. Каким одним преобразованием можно заменить последовательное выполнение осевой симметрии с осью s и центральной симметрии с центром O?

и) Прямая s проходит через вершину правильного тетраэдра и центроид противоположной грани. Докажите, что при повороте вокруг оси s на $120°$ тетраэдр перейдет сам в себя.

§ 4. Виды движений: параллельный перенос, винтовое движение

18. а) При каком условии могут быть совмещены параллельным переносом два отрезка, две прямые, два луча, две плоскости?

б) Сохраняется ли при параллельном переносе перпендикулярность прямой и плоскости?

в) Пользуясь задачей 18, б, докажите, что если одна из параллельных прямых перпендикулярна плоскости, то ей перпендикулярна и другая прямая. Как нужно выбрать при этом вектор переноса?

г) Если одна из двух параллельных плоскостей перпендикулярна прямой, то другая плоскость также перпендикулярна этой прямой. Докажите это с помощью параллельного переноса. Как необходимо выбрать вектор параллельного переноса?

д) Отрезок длины m поместите между данной прямой a и плоскостью α так, чтобы он был параллелен другой данной прямой b. Проведите исследование.

19. а) Башенный кран последовательно выполняет два движения: совершает поворот вокруг своей оси и опускает или поднимает груз. Какое результирующее движение совершает груз?

б) Почему поворот вокруг оси и параллельный перенос можно считать частными случаями винтового движения?

в) Докажите, что последовательное выполнение двух осевых симметрий с двумя скрещивающимися осями есть винтовое движение. Найдите ось поворота, угол поворота и вектор параллельного переноса.

20. а) Докажите, что прямая, параллельная вектору параллельного переноса, при данном параллельном переносе переходит сама в себя.

б) Докажите, что последовательное выполнение двух параллельных переносов на векторы $\vec{m}_1$ и $\vec{m}_2$ можно заменить одним параллельным переносом на вектор $\vec{m}_1 + \vec{m}_2$.

в) Пусть при параллельном переносе на вектор $\vec{m}(2; 3; 4)$ точка $A(a; b; c)$ переходит в точку A_1. Найдите координаты точки A_1.

г) Докажите, что плоскость, параллельная вектору переноса, при параллельном переносе переходит сама в себя.

д) Докажите, что последовательное выполнение трех параллельных переносов на векторы $\vec{m}_1$, $\vec{m}_2$ и $\vec{m}_3$ можно заменить одним параллельным переносом на вектор $\vec{m}_1 + \vec{m}_2 + \vec{m}_3$.

е) С помощью параллельного переноса докажите, что если одна из параллельных плоскостей перпендикулярна некоторой плоскости, то этой плоскости перпендикулярна и другая плоскость.

ж) Сколько существует параллельных переносов, которые одну из параллельных прямых переводят в другую?

з) Даны прямая a, плоскость α и вектор переноса $\vec{m}$. На прямой a найдите точку X такую, чтобы ее образ при параллельном переносе на вектор $\vec{m}$ принадлежал плоскости α.

и) Дана прямая a, плоскость α и вектор переноса $\vec{m}$. На плоскости α найдите точку X, образ которой в данном параллельном переносе принадлежит прямой a.

к) С помощью параллельного переноса докажите, что если две прямые перпендикулярны к одной плоскости, то они параллельны.

л) Сколько существует параллельных переносов, которые одну из параллельных плоскостей переводят в другую?

м) Докажите, что последовательное выполнение двух центральных симметрий можно заменить параллельным переносом. Найдите вектор параллельного переноса.

н) С помощью параллельного переноса докажите равенство линейных углов двугранного угла.

о) Каким преобразованием можно заменить последовательное выполнение двух симметрий от двух параллельных плоскостей?

п) Докажите, что если при некотором движении вершины тетраэдра остаются неподвижными, то при этом движении каждая точка пространства будет неподвижной.

р) Пусть s — ось поворота, $\vec{m}$ — вектор переноса, параллельный оси s. Докажите, что последовательные выполнения поворота с осью s и параллельного переноса на вектор $\vec{m}$, выполненные в различном порядке, дают одно и то же преобразование.

с) Пусть в винтовом движении угол поворота и вектор переноса — ненулевые. Имеется ли в этом винтовом движении неподвижная точка?

т) Пусть $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб, s — прямая, проходящая через центры его оснований. Задано винтовое движение с осью поворота s, углом поворота, равным 90° и имеющим положительное направление (направленным против часовой стрелки), и вектором переноса $\overrightarrow{AA_1}$. Какая точка перейдет при этом винтовом движении в точку D_1? Укажите образ отрезка AB в этом винтовом движении.

§ 5. Гомотетия как пример преобразования подобия

21. На рисунке 152 точки B и B_1 лежат по одну сторону от прямой OA, $A_1B_1 \parallel AB$ и $\dfrac{A_1B_1}{AB} = \dfrac{OA_1}{OA}$. Докажите, что точки O, B и B_1 лежат на одной прямой.

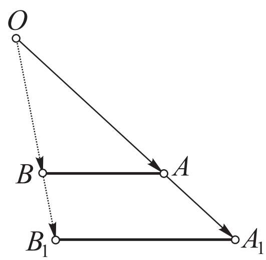


Рис. 152

22. а) Докажите, что две последовательно выполненные гомотетии можно заменить одной гомотетией (или одним параллельным переносом), а центры всех трех гомотетий лежат на одной прямой, называемой *осью гомотетии*. Чему равен коэффициент результирующей гомотетии?

б) При каких условиях две последовательные гомотетии можно заменить одним параллельным переносом? Как расположена в этом случае ось гомотетии?

23. а) Гомотетия задана центром O и парой гомотетичных точек A и A_1. Дана прямая a, проходящая через точку A. Постройте образ прямой a в этой гомотетии.

б) Гомотетия задана центром O и парой гомотетичных точек A и A_1. Дана некоторая прямая a. Постройте образ прямой a в этой гомотетии.

в) Гомотетия задана центром O и парой гомотетичных точек A и A_1. Дана прямая a, проходящая через точку A, и некоторая плоскость α. На прямой a постройте точку X, которая при данной гомотетии переходит в точку, принадлежащую плоскости α.

г) Гомотетия задана центром O и парой гомотетичных точек A и A_1. Дана плоскость α, проходящая через точку A. Постройте образ плоскости α в этой гомотетии.

д) Гомотетия задана центром O и парой гомотетичных точек A и A_1. Дана плоскость α, проходящая через точку A, и некоторая прямая a. На плоскости α постройте точку X, которая при этой гомотетии переходит в точку, принадлежащую прямой a.

е) Гомотетия задана центром O и парой гомотетичных точек A и A_1. Даны точки P, Q и R, задающие плоскость. Постройте образ плоскости PQR в этой гомотетии.

§ 6. Метод геометрических преобразований

24. а) Докажите, что каждая прямая, лежащая в плоскости симметрии двух данных прямых, составляет с этими прямыми равные углы.

б) Пусть $a \parallel \alpha$. Докажите, что прямая a_1, симметричная a относительно α, параллельна α.

в) Даны два равных отрезка. Найдите наименьшее число симметрий относительно плоскостей, переводящих один из этих отрезков в другой.

25. а) Найдите геометрическое место точек, симметричных данной точке A относительно всех точек данной прямой a.

б) Найдите геометрическое место точек, симметричных данной точке A относительно всех точек данной плоскости α, не проходящей через A.

в) Найдите геометрическое место точек, симметричных данной точке A относительно всех плоскостей, проходящих через данную прямую a.

г) На данной плоскости α найдите точку X, при симметрии относительно которой данная точка A переходила бы в точку, лежащую на данной прямой a.

д) Внутри двугранного угла дана точка. Проведите через эту точку прямую, перпендикулярную ребру угла, так, чтобы отрезок этой прямой, заключенный между сторонами угла, делился точкой пополам.

26. а) Тетраэдры $PABC$ и P_1ABC симметричны относительно плоскости ABC. Что можно сказать об ориентации этих тетраэдров?

б) Даны две равные одинаково ориентированные фигуры, у которых совпадают три соответственные, не лежащие на одной прямой точки: $A = A_1$, $B = B_1$, $C = C_1$. Докажите, что остальные соответственные точки этих фигур также совпадают.

в) В условиях предыдущей задачи возьмите две противоположно ориентированные фигуры. Докажите, что эти фигуры можно совместить одной симметрией относительно плоскости ABC.

г) Можно ли сформулировать задачи 26, б и 26, в в виде одной задачи? Как это сделать?

д) Даны две равные одинаково ориентированные фигуры, у которых совпадают две соответственные точки: $A = A_1$, $B = B_1$. Докажите, что эти фигуры можно совместить поворотом вокруг оси.

е) Даны две равные противоположно ориентированные фигуры, у которых совпадают две соответственные точки: $A = A_1$, $B = B_1$. Каким движением их можно совместить?

ж) (*Теорема Даламбера.*) Даны две равные одинаково ориентированные фигуры, у которых совпадают по одной соответственной точке: $A = A_1$. Докажите, что эти фигуры можно совместить одним поворотом вокруг оси, проходящей через эти совпадающие точки.

з) Каким преобразованием можно заменить последовательное выполнение трех симметрий относительно трех плоскостей, проходящих через одну прямую?

и) Даны две равные и противоположно ориентированные фигуры, у которых совпадают по одной соответственной точке: $A = A_1$. Каким движением можно совместить эти фигуры?

к) Докажите, что любые две равные одинаково ориентированные фигуры можно совместить последовательным выполнением параллельного переноса и поворота вокруг некоторой оси.

27. а) На данной плоскости найдите точку, находящуюся на данных расстояниях от двух данных плоскостей. Проведите исследование.

б) На данной прямой найдите точку, находящуюся на данном расстоянии от данной плоскости.

в) Через данную вне плоскости точку проведите к этой плоскости наклонную, имеющую данную длину и параллельную другой плоскости.

28. а) Если движение не изменяет ориентации фигуры, то оно называется *движением первого рода*. Перечислите все движения первого рода.

б) Если движение изменяет ориентацию фигуры, то оно называется *движением второго рода*. Перечислите все движения второго рода.

29. Можно ли ввести понятия одинаково и противоположно ориентированных подобных фигур? Как это сделать?

30. Сформулируйте и решите задачу для подобных фигур, которая была бы аналогична одной из следующих задач: 1) 26, б; 2) 26, в; 3) 26, д; 4) 26, е; 5) 26, ж.

Тема 2. МНОГОГРАННИКИ, ТЕЛА ВРАЩЕНИЯ И ИХ КОМБИНАЦИИ

§ 1—2. Понятие «многогранник». Цилиндр и призма

31. Сформулируйте определения понятий, приведенных на схемах (рис. 153, *а*, *б*).

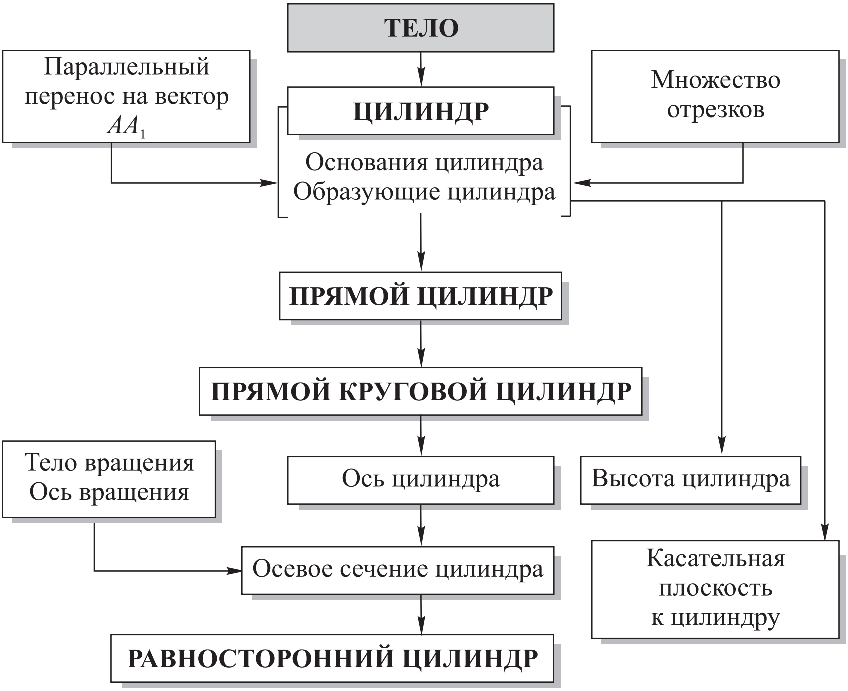


Рис. 153, а

Рис. 153, б

32. а) Приведите пример многогранника, для которого справедливо равенство Г + В – Р = 2 (называемое *эйлеровой характеристикой многогранника*), где Г, В, Р — соответственно число граней, вершин и ребер.

б) Приведите пример многогранника, для которого Г + В – Р ≠ 2.

в) Чем отличается выпуклый многогранник от невыпуклого? Приведите примеры выпуклых и невыпуклых многогранников.

33. а) Докажите, что если одна из трех граней треугольной призмы, вписанной в цилиндр, проходит через его ось, то две другие ее боковые грани перпендикулярны. Как связаны между собой площади боковых граней?

б) Двугранный угол, ребром которого служит образующая цилиндра и грани которого проходят через две образующие цилиндра, равен половине двугранного угла, ребром которого служит ось цилиндра и грани которого проходят через те же образующие. Докажите это.

34. Докажите, что две непараллельные плоскости, касающиеся цилиндра, пересекаются по прямой, параллельной оси цилиндра.

35. а) Через образующую цилиндра проведена плоскость под углом α к плоскости осевого сечения, содержащего ту же образующую. Диагональ d прямоугольника, получившегося в сечении, образует с плоскостью основания угол β. Найдите образующую и площадь основания цилиндра.

б) Площадь осевого сечения цилиндра относится к площади его основания как $4 : \pi$. Найдите угол между диагоналями осевого сечения.

в) В цилиндре параллельно его оси проведена секущая плоскость на расстоянии 2 см от оси. Эта плоскость отсекает от окружности основания дугу в $120°$. Найдите площадь сечения, если высота цилиндра равна 10 см.

г) Высота цилиндра 6 дм, радиус основания 5 дм. Концы отрезка длиной 10 дм лежат на окружностях обоих оснований. Найдите расстояние от этого отрезка до оси.

д) Высота цилиндра 2 м, радиус основания 7 м. В этот цилиндр вписан квадрат так, что его вершины (по две) находятся на окружностях оснований. Найдите сторону квадрата.

е) В цилиндре параллельно его оси на расстоянии a от нее проведена плоскость, отсекающая от окружности основания дугу α. Площадь сечения равна Q. Найдите высоту цилиндра.

36. Правильно ли указаны отношения между различными множествами призм (рис. 154)?

1) Самая большая область на рисунке — это множество призм. Вертикальной чертой она разделена на две части. Левая часть — множество наклонных призм, правая — множество прямых призм. Внутри правой части изображено множество правильных призм. Почему?

2) Параллелепипеды включены в область, которая частично покрывает левую и правую части. Почему?

3) Параллелепипеды частично покрывают область правильных призм. Правильно ли это?

4) Прямые параллелепипеды изображаются справа от вертикальной линии. Правильно ли это?

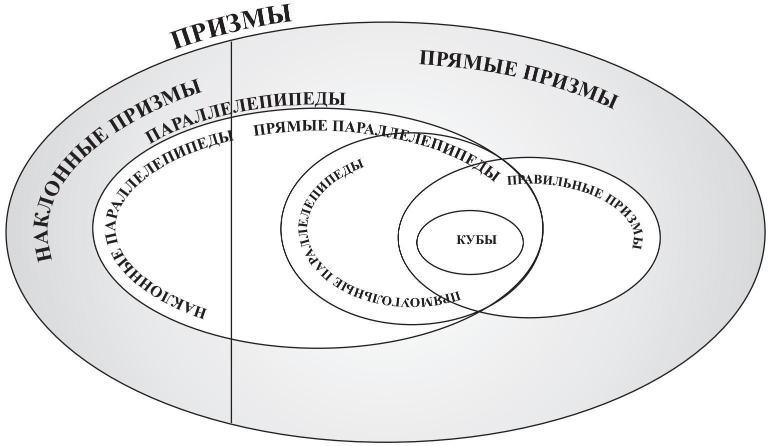


Рис. 154

5) Прямоугольные параллелепипеды включены во множество, расположенное внутри множества прямых параллелепипедов и частично покрывающее множество правильных призм. Почему?

6) Почему кубы изображены множеством, частично покрывающим общую часть множества прямоугольных параллелепипедов и правильных призм?

37. а) Боковое ребро наклонной призмы $l = 15$ см наклонено к плоскости основания под углом $\alpha = 30°$. Найдите высоту призмы.

б) Боковое ребро наклонной призмы наклонено к плоскости основания под углом в 30°. Высота призмы равна H. Найдите боковое ребро.

в) Боковое ребро наклонной призмы в 2 раза больше ее высоты. Найдите угол наклона бокового ребра к плоскости основания.

г) В наклонной треугольной призме два двугранных угла при боковых ребрах равны α и β. Чему равен двугранный угол при третьем боковом ребре?

38. а) В наклонной треугольной призме расстояния между боковыми ребрами 37, 13 и 40. Найдите расстояние между плоскостью большей боковой грани и противолежащим боковым ребром.

б) В наклонной треугольной призме расстояния между боковыми ребрами 37, 13 и x. Известно расстояние от бокового ребра до плоскости, содержащей ребра, расстояние между которыми x. Оно равно 12. Найдите x.

в) Основаниями наклонной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ являются равносторонние треугольники. Вершина A_1 равноудалена от всех вершин нижнего основания ABC. Постройте высоту призмы, проходящую через точку A_1.

г) Продолжите боковые ребра призмы, рассмотренной в задаче 38, в, так, чтобы получилась треугольная призма, высота которой, проведенная через вершину A_1, проходила бы через середину стороны CB.

д) Измените условие задачи 38, в так, чтобы основание высоты, проведенной из вершины A_1, оказалось вне основания призмы.

39. а) Основанием параллелепипеда служит квадрат. Одна из вершин верхнего основания одинаково отстоит от всех вершин нижнего основания. Сторона основания равна a, боковое ребро равно l. Найдите:

1) высоту призмы;

2) косинус угла наклона ребра AA_1 к плоскости нижнего основания;

3) косинус угла наклона ребра AA_1 к сторонам нижнего основания;

4) площадь полной поверхности параллелепипеда.

б) Параллелепипед является прямоугольным тогда и только тогда, когда его диагонали равны. Справедливо ли это предложение? Сформулируйте аналогичное планиметрическое предложение.

в) Найдите диагонали прямого параллелепипеда, у которого стороны основания равны 5 и 8 и образуют между собой угол в 60°. Меньшая диагональ параллелепипеда составляет с плоскостью основания также угол в 60°.

г) В прямом параллелепипеде стороны основания равны 17 и 18, одна из диагоналей оснований равна 25. Большая диагональ параллелепипеда составляет с плоскостью основания угол в 45°. Найдите площадь его диагональных сечений.

д) В прямоугольном параллелепипеде стороны основания равны 7 и 24, высота равна 8. Найдите площадь диагонального сечения.

е) В прямоугольном параллелепипеде боковое ребро, площадь диагонального сечения и площадь основания соответственно равны 5, 205 и 360. Найдите стороны основания.

ж) В прямом параллелепипеде острый угол основания равен α, одна из сторон основания a; сечение, проведенное через эту сторону и противоположное ей ребро, имеет площадь Q и образует с плоскостью основания угол $\frac{\pi}{2} - \alpha$. Найдите неизвестные ребра параллелепипеда.

40. а) Основание прямой треугольной призмы — равнобедренный треугольник, у которого стороны, равные a, образуют угол α. Диагональ грани, противоположной этому углу, образует с другой боковой гранью угол β. Найдите высоту призмы.

б) Основанием прямой призмы служит равнобедренный треугольник, основание которого равно a, а угол при основании равен α. Найдите высоту призмы, если ее боковая поверхность равна сумме площадей ее оснований.

в) Найдите высоту прямой призмы, у которой в основании лежит равнобедренный треугольник с углом α при вершине и противолежащей стороной b, если диагональ одной из равных боковых граней наклонена к плоскости основания под углом β.

г) В основании прямой призмы лежит треугольник. Два его угла соответственно равны α и β, а площадь его равна S. Прямая, соединяющая вершину верхнего основания с центром круга, описанного около нижнего основания, составляет с плоскостью основания угол φ. Найдите высоту призмы.

41. а) Основанием прямой призмы служит прямоугольный треугольник с радиусом описанной окружности, равным R. Найдите площадь сечения, образованного диагоналями наибольшей и наименьшей боковых граней и стороной основания, если диагонали наклонены к плоскости основания под углами α и 3α.

б) Основанием прямой призмы служит ромб. Диагонали призмы 8 и 5, высота призмы 2. Найдите площадь основания.

в) Ребро куба равно 2. Через диагональ куба проведена плоскость, параллельная диагонали основания, не имеющей с диагональю куба общих точек. Найдите площадь полученного сечения.

г) Сторона основания правильной четырехугольной призмы a, высота $2a$. Найдите площадь сечения, проведенного через середины двух смежных сторон основания и центр симметрии призмы.

д) Диагональ l прямоугольного параллелепипеда наклонена к плоскости основания под углом φ, острый угол между диагоналями основания β. Найдите ребра параллелепипеда.

е) В прямоугольном параллелепипеде диагональ основания d, угол между диагоналями основания α, а угол, образованный плоскостью, проведенной через большие стороны нижнего и верхнего оснований, с плоскостью основания, β. Найдите высоту параллелепипеда.

ж) Основанием прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ является квадрат $ABCD$. Найдите наибольший угол между прямой BD_1 и плоскостью BDC_1.

з) Непересекающиеся диагонали двух смежных боковых граней прямоугольного параллелепипеда наклонены к плоскости его основания под углами α и β. Найдите угол γ между этими диагоналями.

42. а) Пусть R — радиус основания цилиндра, H — его высота, AB_1 — отрезок, концы которого лежат на окружностях оснований, d — расстояние между скрещивающимися прямыми AB_1 и осью цилиндра. Найдите отрезок AB_1, синус угла наклона отрезка AB_1 к плоскости основания цилиндра, угол между данными скрещивающимися прямыми.

б) Основанием наклонной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ является правильный треугольник, M — середина ребра A_1B_1 — равноудалена от вершин A, B и C. Постройте высоту призмы, проходящую через вершину A_1. Найдите эту высоту, если $AB = a$ и угол наклона грани AA_1B_1B к плоскости основания равен α. Постройте сечение призмы плоскостью, проходящей через ребро A_1B_1 и перпендикулярной плоскости основания. Найдите площадь этого сечения.

в) В условиях предыдущей задачи постройте сечение призмы плоскостью, проходящей через точку M и перпендикулярной ребру AB. Найдите площадь этого сечения.

г) Основанием четырехугольной наклонной призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ является трапеция, у которой $AB \parallel CD$, $AD = DC = CB = l$. Боковое ребро $AA_1 = 2l$. Боковые грани, проходящие через AB и DC, перпендикулярны плоскости основания. Угол наклона бокового ребра к плоскости основания равен $60°$. Постройте высоту призмы, проходящую через вершину A_1, найдите эту высоту. Постройте сечение призмы плоскостью, проходящей через ребро A_1D_1 и перпендикулярной плоскости основания; найдите площадь этого сечения. Задают ли данные задачи призму?

д) В условиях предыдущей задачи найдите диагональ BD_1 призмы и угол наклона ее к плоскости основания.

е) В основании прямого параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ лежит параллелограмм со сторонами a и b и острым углом A, равным α. Диагональ B_1D наклонена к плоскости основания под углом β. Постройте этот параллелепипед. Найдите: 1) B_1D; 2) высоту AA_1; 3) площадь боковой поверхности; 4) площадь сечения параллелепипеда плоскостью, проходящей через диагональ параллелепипеда B_1D параллельно диагонали основания AC.

43. а) Постройте линейный угол двугранного угла при боковом ребре: 1) правильного тетраэдра; 2) правильной треугольной пирамиды со стороной основания a и боковым ребром $2a$; 3) правильной четырехугольной пирамиды, боковое ребро которой в 2 раза больше стороны основания.

б) В правильной четырехугольной пирамиде угол между апофемами противолежащих боковых граней есть линейный угол двугранного угла, образованного плоскостями этих граней. Докажите это.

в) В основании треугольной пирамиды лежит прямоугольный треугольник. Все боковые ребра равны между собой. В какую точку плоскости основания ортогонально проектируется вершина пирамиды?

г) Боковые грани треугольной пирамиды образуют равные двугранные углы с плоскостью основания. В какую точку плоскости основания ортогонально проектируется вершина пирамиды?

д) Докажите, что если в правильной треугольной пирамиде высота равна стороне основания, то боковые ребра составляют с плоскостью основания угол в 60°.

е) Найдите высоту правильной треугольной пирамиды, у которой сторона основания равна a, боковое ребро равно l.

ж) В тетраэдре $ABCD$ $CD \perp AD$, $CD \perp BD$. Двугранный угол при ребре CD равен 120°, $AD = BD = 2$, $CD = 1$. Найдите двугранный угол при ребре AB.

з) В правильной четырехугольной пирамиде все ребра равны между собой. Найдите: 1) угол между боковым ребром и плоскостью основания; 2) двугранный угол при основании; 3) двугранный угол при боковом ребре.

и) В правильной шестиугольной пирамиде боковое ребро в 2 раза больше стороны основания. Найдите:

1) угол наклона бокового ребра к плоскости основания;

2) высоту пирамиды, если сторона основания a;

3) углы, которые образуют одно боковое ребро с остальными боковыми ребрами;

4) угол наклона боковых граней к плоскости основания;

5) углы, которые составляет плоскость одного диагонального сечения пирамиды с плоскостями остальных диагональных сечений;

6) углы, которые образует одно боковое ребро со сторонами основания.

44. а) Докажите, что двугранный угол при ребре правильного тетраэдра всегда больше 60°.

б) Докажите, что двугранный угол при боковом ребре правильной четырехугольной пирамиды всегда больше 90°.

в) Обобщите предыдущие задачи на правильную n-угольную пирамиду.

45. а) В правильный тетраэдр вписана треугольная призма так, что вершины верхнего основания являются серединами боковых ребер тетраэдра, а вершины нижнего основания призмы — ортогональные проекции вершин ее верхнего основания на плоскость основания тетраэдра. Постройте изображение данной комбинации тел. Найдите высоту призмы, если ребро тетраэдра равно a.

б) Основанием пирамиды служит прямоугольник, площадь которого равна S. Две боковые грани пирамиды перпендикулярны основанию, а две другие образуют с ним углы α и β. Найдите высоту пирамиды.

в) В правильной n-угольной пирамиде боковые грани наклонены к плоскости основания под углом β. Под каким углом наклонены к плоскости основания боковые ребра пирамиды?

г) Стороны оснований правильной треугольной усеченной пирамиды равны 5 и 2, боковое ребро равно 2. Найдите: 1) высоту пирамиды; 2) ее апофему; 3) угол наклона бокового ребра к плоскости нижнего основания; 4) косинус угла наклона апофем к плоскости нижнего основания; 5) высоту полной пирамиды.

д) В правильной четырехугольной усеченной пирамиде стороны оснований 3 и 5, высота 3. Постройте сечение, проходящее через противолежащие стороны оснований. Найдите его площадь. Чему равен угол между плоскостью сечения и плоскостью нижнего основания?

46. Биссектор двугранного угла тетраэдра делит противолежащее ребро в отношении, равном отношению площадей граней, образующих этот двугранный угол. Докажите это и сформулируйте аналогичный планиметрический факт.

Обозначения:

α — угол между боковым ребром и плоскостью основания;

β — угол наклона боковых граней к плоскости основания;

γ — плоский угол при вершине пирамиды;

δ — двугранный угол при боковом ребре.

47. Докажите, что для правильной треугольной пирамиды справедливы следующие формулы:

1) $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{2}\operatorname{tg}\beta;$ 2) $\cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{3}}\sin\frac{\gamma}{2};$

3) $\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{ctg}\frac{\delta}{2};$ 4) $\cos\beta = \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2};$

5) $\sin\beta = \frac{2}{\sqrt{3}}\cos\frac{\delta}{2};$ 6) $\cos\frac{\gamma}{2}\cdot\sin\frac{\delta}{2} = \frac{1}{2}.$

48. Докажите, что для правильной четырехугольной пирамиды справедливы формулы:

1) $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{tg}\beta;$ 2) $\cos\alpha = \sqrt{2}\sin\frac{\gamma}{2};$

3) $\sin\alpha = \operatorname{ctg}\frac{\delta}{2};$ 4) $\cos\beta = \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2};$

5) $\sin\beta = \sqrt{2}\cos\frac{\delta}{2};$ 6) $\cos\frac{\gamma}{2}\cdot\sin\frac{\delta}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$

49. Докажите, что для правильной n-угольной пирамиды выполняются равенства:

1) $\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}\beta\cos\frac{\pi}{n};$ 2) $\cos\alpha = \dfrac{\sin\frac{\gamma}{2}}{\sin\frac{\pi}{n}};$

4) $\cos\beta = \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}\operatorname{ctg}\frac{\pi}{n};$ 3) $\sin\alpha = \operatorname{ctg}\frac{\delta}{2}\operatorname{ctg}\frac{\pi}{n};$

5) $\sin\beta = \dfrac{\cos\frac{\delta}{2}}{\sin\frac{\pi}{n}};$ 6) $\cos\frac{\gamma}{2}\cdot\sin\frac{\delta}{2} = \cos\frac{\pi}{n}.$

50. а) В трехгранном угле каждый из плоских углов при вершине равен γ. Как удалена от его вершины точка, которая находится внутри угла на расстоянии a от каждой грани?

б) Найдите полную поверхность правильной треугольной пирамиды, у которой плоский угол при основании боковой грани равен α, радиус круга, вписанного в эту грань, равен r.

в) Боковые ребра четырехугольной пирамиды равны между собой. Плоские углы при вершине, взятые через один угол, равны γ_1, γ_2, γ_1, γ_2. Высота пирамиды H. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.

г) Плоский угол при вершине правильной шестиугольной пирамиды равен углу между боковым ребром и плоскостью основания. Найдите этот угол.

д) Дана правильная n-угольная пирамида $SA_1A_2...A_n$, боковые ребра которой образуют угол α с плоскостью основания. Найдите тангенс половины двугранного угла, образованного смежными боковыми гранями пирамиды.

е) В правильной четырехугольной пирамиде сумма величин двугранных углов между смежными и противоположными боковыми гранями равна 180°. Найдите эти углы.

51. а) В основании треугольной пирамиды $PABC$ лежит прямоугольный ΔABC с прямым углом C. Боковые грани PCA и PCB перпендикулярны к плоскости основания, $PC = CA = CB = 1$. Найдите: 1) плоские углы при вершине пирамиды; 2) тангенс двугранного угла при ребре AB; 3) тангенсы двугранных углов при ребрах PB и PA. Докажите равенство двугранных углов при ребрах AB, PA и PB. Постройте сечение пирамиды плоскостью, проходящей через точку C и перпендикулярной ребру PB, и найдите его площадь.

б) Пусть $PABC$ — правильная треугольная пирамида, α — угол наклона бокового ребра к плоскости основания, r — радиус окружности, вписанной в основание. Найдите: 1) тангенс угла наклона боковой грани к плоскости основания; 2) высоту пирамиды; 3) апофему; 4) боковое ребро; 5) площадь боковой поверхности.

в) Пусть в правильной четырехугольной пирамиде α — угол наклона бокового ребра к плоскости основания, R — радиус окружности, описанной около основания. Найдите: 1) тангенс угла наклона боковой грани к плоскости основания; 2) синус половины плоского угла при вершине пирамиды; 3) высоту пирамиды; 4) боковое ребро; 5) апофему.

г) Пусть в правильной четырехугольной пирамиде α — угол наклона бокового ребра к плоскости основания, r — радиус окружности, вписанной в основание. Найдите: 1) котангенс половины двугранного угла при боковом ребре; 2) тангенс угла наклона боковой грани к плоскости основания.

д) В условиях предыдущей задачи найдите высоту пирамиды и ее боковое ребро.

е) Пусть в правильной шестиугольной пирамиде α — угол наклона бокового ребра к плоскости основания, β — угол наклона боковой грани к плоскости основания, γ — плоский угол при вершине пирамиды, δ — двугранный угол при боковом ребре. Выясните, возможны ли следующие равенства: 1) $\alpha = \beta$; 2) $\alpha = \gamma$; 3) $\alpha = \delta$.

§ 4. Сфера и шар. Сечение сферы плоскостью

52. а) Стороны треугольника равны 13, 14, 15. Найдите расстояние от плоскости треугольника до центра шара, касающегося всех сторон треугольника, если радиус шара равен 5.

б) Диагонали ромба равны 15 и 20. Сфера касается всех его сторон. Радиус сферы равен 10. Найдите расстояние от центра сферы до плоскости ромба.

в) К шару радиуса R проведена касательная плоскость. Найдите площадь сечения шара плоскостью, которая проходит через точку касания и образует с касательной плоскостью угол φ.

г) Шар радиуса R касается граней двугранного угла, равного α. Найдите расстояние от центра шара до ребра двугранного угла.

53. а) Радиусы, проведенные в точку касания двух шаров, лежат на одной прямой. Расстояние между центрами касающихся шаров равно сумме или разности их радиусов. Докажите это и сформулируйте аналогичный факт из планиметрии.

б) Если плоскость проходит через центры касающихся шаров, то она содержит точку касания. Докажите это и сформулируйте аналогичный факт из планиметрии.

в) Пусть шар имеет единственную общую точку с боковой поверхностью прямого кругового цилиндра. Докажите, что плоскость, проходящая через ось цилиндра и центр шара, содержит эту точку.

54. а) Отрезок PQ параллелен плоскости, в которой лежит прямоугольник $KLMN$, причем $KL = 1$, $PQ = 3$. Все стороны прямоугольника $KLMN$ и отрезки KP, LP, NQ, MQ, PQ касаются некоторого шара. Найдите радиус этого шара.

б) Шар радиуса R касается всех ребер треугольной пирамиды. Центр шара лежит внутри пирамиды на ее высоте и расположен на расстоянии $R\sqrt{3}$ от вершины. Докажите, что пирамида правильная. Найдите высоту пирамиды.

55. а) В правильной шестиугольной пирамиде плоский угол при вершине P равен γ, PO — высота пирамиды. Точка O удалена от каждого ребра на расстояние a. Найдите PO.

б) В условиях предыдущей задачи найдите, при каком γ $PO = 2a$.

в) Составьте и решите задачи, аналогичные задачам 55, а, б, для правильного n-гранного угла.

г) В трехгранном угле каждый из плоских углов при вершине P равен γ. Шар с центром O и радиусом R касается всех граней этого угла. Найдите расстояние от вершины трехгранного угла до центра шара.

д) Составьте и решите задачу, аналогичную предыдущей, для четырехгранного угла.

е) Составьте и решите задачу, обратную задаче 55, г.

ж) В правильном шестигранном угле каждый из плоских углов при вершине P равен γ. Шар с центром O и радиусом R касается всех граней этого угла. Найдите расстояние от центра шара до вершины данного шестигранного угла.

з) Составьте и решите задачу, аналогичную предыдущей, для n-гранного угла.

и) Составьте и решите задачу, обратную задаче 55, ж.

§ 5. Конус

56. Можно ли задать однозначно конус указанием следующих его элементов: 1) радиуса основания R и образующей l; 2) радиуса основания R и высоты конуса H; 3) радиуса основания R и угла α между осью и образующей; 4) H и α; 5) H и l; 6) α и l?

57. а) Осевое сечение конуса — правильный треугольник со стороной a. Найдите площадь сечения, проведенного через две образующие, угол между которыми равен: 1) 30°; 2) 60°; 3) 90°.

б) Образующая конуса в 2 раза больше радиуса его основания. Найдите: 1) угол при вершине осевого сечения; 2) отношение высоты конуса к диаметру основания.

58. а) Докажите, что угол между осью конуса и касательной плоскостью равен углу между осью и образующей.

б) Постройте касательную плоскость к конусу, проходящую через точку, данную в плоскости основания конуса.

59. а) В равностороннем конусе радиус основания равен R. Найдите площадь сечения, проведенного через две образующие, угол между которыми равен α. В каких границах могут находиться значения α? Чему равно наибольшее значение площади сечения?

б) Докажите, что из сечений конуса, проходящих через его вершину, площадь осевого сечения является максимальной в том случае, когда угол при вершине осевого сечения острый или прямой. Если же он тупой, то наибольшую площадь имеет сечение, проходящее через две взаимно перпендикулярные образующие.

в) Высота конуса H. Угол между высотой и образующей равен α. Найдите площадь сечения, проведенного через две перпендикулярные образующие. В каких границах может измениться угол α? При каком значении α площадь сечения будет наименьшей? Как в этом случае построить конус и его сечение?

60. а) В конусе проведено сечение плоскостью, проходящей через его вершину. Найдите площадь сечения, если радиус основания конуса равен R, двугранный угол между плоскостью сечения и плоскостью основания равен α, а угол между образующей и высотой равен $45°$.

б) Высота конуса равна H. Образующая конуса в 2 раза больше высоты. Найдите площадь сечения, проходящего через вершину, если расстояние от секущей плоскости до центра основания конуса равно половине высоты.

в) Отношение площади основания конуса к площади осевого сечения равно π. Найдите угол наклона образующей к плоскости основания.

61. Угол между образующей конуса и его осью равен α. Угол между двумя радиусами основания равен β. Найдите угол между образующими конуса, проведенными к концам данных радиусов.

62. Каким должен быть угол между осью конуса и его образующей, чтобы можно было провести: 1) две перпендикулярные образующие; 2) три попарно перпендикулярные образующие?

63. а) Площади оснований усеченного конуса S_1 и S_2. Через середину высоты параллельно основаниям проведена плоскость. Найдите площадь сечения.

б) Радиусы оснований усеченного конуса R_1 и R_2, образующая конуса равна l. Найдите расстояние от центра меньшего основания до окружности большего основания. (*Указание*. Определение расстояния от точки до фигуры было дано в планиметрии. Это определение сохраняется и в стереометрии.)

в) Найдите расстояние от центра основания конуса до касательной плоскости к конусу, если образующая конуса равна l, радиус основания равен R.

64. а) Хорда AB основания конуса видна из центра O основания под углом α, а из вершины P конуса — под углом β. Найдите площадь ΔPAB, если радиус основания конуса равен R.

б) В условиях предыдущей задачи найдите косинус угла наклона плоскости PAB к плоскости основания конуса.

в) Хорда AB основания конуса видна из центра O основания под углом, равным $120°$, а из вершины P конуса — под углом, равным $90°$. Найдите площадь ΔPAB, если его плоскость удалена от точки O на расстояние h.

г) Хорда AB основания конуса видна из центра O основания под углом α, а из вершины P конуса — под углом β. Площадь ΔPAB равна Q. Найдите радиус основания конуса.

д) В условиях предыдущей задачи найдите косинус угла наклона плоскости PAB к плоскости основания конуса.

е) Хорда AB основания конуса видна из центра O основания под углом, равным $120°$, а из вершины P конуса — под углом, равным $90°$. Найдите расстояние от точки O до плоскости PAB, если площадь ΔPAB равна Q.

§ 6—8. Комбинации многогранников и тел вращения. Части сферы и шара. Правильные многогранники

65. а) Пусть R — радиус шара, описанного около правильной пирамиды, r — радиус окружности, описанной около основания, H — высота пирамиды. Докажите, что $R = \dfrac{r^2 + H^2}{2H}$.

б) Пусть R — радиус шара, описанного около правильного тетраэдра с ребром a. Докажите, что $R = \dfrac{a\sqrt{6}}{4}$.

в) Можно ли результат задачи 65, а перенести без изменения на любую пирамиду с равными боковыми ребрами?

г) Дана пирамида $SABCD$, в основании которой лежит прямоугольник $ABCD$ со сторонами a и b. Ребро SA перпендикулярно плоскости основания. Большее из боковых ребер составляет с плоскостью основания угол α. Найдите радиус шара, описанного около данной пирамиды.

д) Основанием пирамиды является прямоугольный треугольник с катетами $AB = a$, $AC = b$. Боковое ребро $SA = SB = SC = c$. Найдите радиус шара, описанного около данной пирамиды.

е) Дана треугольная пирамида $SABC$, в которой $BC = a$, $AB = AC$, $SA \perp ABC$. Двугранный угол при ребре SA равен α, при ребре BC равен β. Найдите радиус описанного шара.

ж) Докажите, что радиус R описанного около призмы шара вычисляется по формуле $R = \frac{1}{2}\sqrt{H^2 + 4r^2}$, где H — высота призмы, r — радиус окружности, описанной около основания призмы.

з) Радиус шара, описанного около куба, равен R. Найдите ребро куба.

и) Дан прямой круговой цилиндр с радиусом основания R и высотой H. Найдите радиус описанного шара.

66. а) Докажите, что если двугранные углы при ребрах основания пирамиды равны между собой, то в эту пирамиду можно вписать шар.

б) Основанием пирамиды служит ромб с острым углом α и стороной a. Все боковые грани пирамиды составляют с плоскостью основания угол β. Найдите радиус шара, вписанного в эту пирамиду.

в) Докажите, что для правильной пирамиды центр вписанного шара является точкой пересечения ее высоты с биссектором какого-нибудь двугранного угла при основании.

г) Докажите, что радиус R шара, вписанного в правильную пирамиду, может быть найден по формуле $R = \frac{Hr}{r + \sqrt{H^2 + r^2}}$, где H — высота пирамиды, r — радиус круга, вписанного в ее основание.

д) Пусть дан правильный тетраэдр с ребром a. Докажите, что радиус вписанного шара $R = \frac{a\sqrt{6}}{12}$.

е) Проверьте, справедливы ли результаты задач 66, г и 66, д применительно к пирамидам, боковые грани которых равнонаклонены к плоскости основания.

67. а) Докажите, что шар можно вписать в призму тогда и только тогда, когда ее перпендикулярное сечение — описанный многоугольник, а высота равна диаметру круга, вписанного в это сечение.

б) Докажите, что в прямую призму можно вписать шар тогда и только тогда, когда ее основание — описанный многоугольник (с радиусом вписанного круга R), а боковое ребро равно $2R$.

в) В треугольную призму вписан шар радиуса R. Известно, что перпендикулярным сечением призмы является прямоугольный треугольник с углом 60°. Найдите площадь этого сечения.

г) Основанием четырехугольной призмы служит ромб со стороной a и острым углом α. Перпендикулярным сечением призмы является квадрат. Найдите угол между плоскостью перпендикулярного сечения и плоскостью нижнего основания, если радиус шара, вписанного в призму, равен R.

68. а) Докажите, что если шар вписан в прямой круговой конус, то центр шара всегда лежит на высоте конуса.

б) В конус, образующая которого равна l и составляет с плоскостью основания угол α, вписан шар. Найдите длину окружности касания шара и конуса.

в) В конус вписан шар. Окружность, по которой боковая поверхность конуса касается шара, имеет радиус, равный r. Образующая конуса видна из центра шара под углом α. Найдите: 1) угол при вершине осевого сечения конуса; 2) угол наклона образующей к плоскости основания конуса; 3) радиус основания конуса; 4) высоту и образующую конуса. Установите, в каких границах могут изменяться значения угла α.

г) В конус вписан шар. Радиус окружности, по которой касаются конус и шар, равен r. Угол между образующей и высотой конуса равен α. Найдите: 1) радиус шара; 2) радиус основания конуса; 3) высоту и образующую конуса.

д) В конус вписан шар. Найдите радиус шара, если образующая конуса равна l и наклонена к плоскости основания под углом α.

е) Площадь осевого сечения конуса равна Q. Образующая составляет с плоскостью основания угол α. Найдите радиус вписанного в конус шара.

69. Шар радиуса R вписан в цилиндр, около которого описан шар. Найдите радиус описанного шара.

70. а) Около данного цилиндра опишите правильную четырехугольную пирамиду, высота которой вдвое больше высоты цилиндра.

б) В равносторонний конус, образующая которого равна l, вписана правильная шестиугольная призма, боковая грань которой — квадрат. Найдите площадь диагональных сечений призмы.

в) В конус помещена правильная треугольная призма, все ребра которой равны a. Четыре вершины призмы лежат на окружности основания, а две — на боковой поверхности конуса. Найдите высоту конуса.

г) В цилиндр вписана треугольная пирамида, в основании которой лежит правильный треугольник. Две боковые грани ее перпендикулярны плоскости основания, а третья образует с ней угол α. Найдите высоту цилиндра, если радиус его основания равен R.

71. а) Радиус сферического сегмента r, дуга в осевом сечении α. Найдите: 1) длину окружности, лежащей в основании сегмента; 2) высоту сегмента.

б) Радиус сферического пояса равен r. Углы, под которыми видны из центра сферы диаметры его оснований, равны α и β. Найдите высоту пояса.

72. а) Найдите радиус основания равностороннего цилиндра, у которого ось лежит на диагонали куба с ребром a, а каждая из окружностей оснований касается трех граней куба, имеющих общую вершину.

б) Точка O — середина высоты PM правильного тетраэдра $PABC$. Докажите, что лучи OA, OB и OC — попарно перпендикулярны.

в) В правильный октаэдр вписан куб так, что его вершины находятся на ребрах октаэдра. Ребро октаэдра равно a. Найдите ребро куба.

73. а) Плоский угол при вершине правильной n-угольной пирамиды равен γ, радиус окружности, описанной около основания, равен r. Найдите радиус шара, описанного около пирамиды.

б) Угол наклона бокового ребра к плоскости основания правильной n-угольной пирамиды равен α, сторона основания равна a. Найдите радиус шара, описанного около пирамиды.

в) Угол наклона боковой грани к плоскости основания правильной n-угольной пирамиды равен β, сторона основания равна a. Найдите радиус шара, описанного около пирамиды.

г) Высота правильной четырехугольной призмы равна H, угол наклона ее диагонали к плоскости основания равен α. Найдите радиус описанного шара.

д) Основанием прямой призмы служит равнобедренный треугольник с острым углом α при вершине и противолежащей стороной a. Диагональ боковой грани, проходящей через эту сторону, наклонена к плоскости основания под углом β. Найдите радиус описанного шара.

е) Основанием прямой призмы служит прямоугольный треугольник с катетами, равными 6 и 8. Площадь боковой грани, проходящей через гипотенузу этого треугольника, равна Q. Найдите радиус описанного шара.

ж) В прямоугольном параллелепипеде диагональ равна d и наклонена к плоскости основания под углом α. Найдите радиус описанного шара.

з) Все ребра правильной шестиугольной призмы равны a. Найдите радиус описанного шара.

и) Основанием прямой призмы служит равнобедренный прямоугольный треугольник с катетами, равными a. Диагональ боковой грани, проходящей через гипотенузу, наклонена к плоскости основания под углом α. Найдите радиус описанного шара.

к) В условиях предыдущей задачи найдите, в каком отношении делят плоскости основания призмы диаметр шара, перпендикулярный к этим плоскостям.

л) Сторона основания правильной треугольной пирамиды равна a, боковая грань наклонена к плоскости основания под углом β. Найдите радиус вписанного шара.

м) Сторона основания правильной треугольной пирамиды равна a, боковое ребро наклонено к плоскости основания под углом α. Найдите радиус вписанного шара.

н) Сторона основания правильной треугольной пирамиды равна a, плоский угол при ее вершине равен γ. Найдите радиус вписанного шара.

о) Сторона основания правильной треугольной пирамиды равна a, двугранный угол при боковом ребре равен δ. Найдите радиус вписанного шара.

п) Сторона основания правильной четырехугольной пирамиды равна a, боковая грань наклонена к плоскости основания под углом β. Найдите радиус вписанного шара.

Тема 3. ОБЪЕМЫ ТЕЛ. ПЛОЩАДИ ПОВЕРХНОСТЕЙ

§ 1—2. Понятие «объем тела». Объем произвольного прямого цилиндра

74. Цилиндрическое тело представляет собой объединение двух равных прямых круговых цилиндров с высотой H и радиусом основания R. Эти цилиндры пересекаются так, что образующая одного лежит на оси другого. Найдите объем этого тела.

75. а) Осевое сечение цилиндра — квадрат, диагональ которого равна d. Найдите объем цилиндра.

б) Цилиндр пересечен плоскостью, параллельной оси и отсекающей на окружности основания дугу α. Диагональ сечения равна d и составляет с плоскостью основания угол β. Найдите объем цилиндра.

в) Найдите объем цилиндра, вписанного в правильную шестиугольную призму, у которой каждое ребро равно a.

г) Площадь осевого сечения цилиндра составляет $\frac{1}{3}$ площади основания цилиндра. Найдите его объем, если площадь основания равна S.

д) Докажите, что если два цилиндра имеют равные объемы и равные площади разверток, то такие цилиндры равны.

е) Среди всех цилиндров, у которых осевое сечение имеет одну и ту же диагональ, равную d, найдите цилиндр, имеющий наибольший объем. Чему равен этот объем?

76. а) В прямой круговой цилиндр вписана треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$. В основании призмы лежит прямоугольный ΔABC. Отрезок, соединяющий вершину A_1 с серединой ребра BC, равен l и наклонен к плоскости ABC под углом α. Найдите объем призмы. Задаются ли этими данными цилиндр и призма?

б) В условие задачи 76, а добавим, что ΔABC — равнобедренный. Не будет ли это условие лишним? Решите вновь составленную задачу.

в) Как еще можно дополнить условие задачи 76, а? Составьте еще одну задачу и решите ее.

77. а) В правильной четырехугольной пирамиде боковое ребро равно b и образует с плоскостью основания угол α. В эту пирамиду помещен прямой круговой цилиндр с квадратным осевым сечением так, что одна из его образующих расположена на диагонали основания пирамиды, а окружность каждого основания касается двух смежных боковых граней пирамиды. Найдите объем цилиндра.

б) В правильный тетраэдр с ребром a поместите равносторонний цилиндр так, чтобы одно из оснований цилиндра содержалось в основании тетраэдра, а окружность второго основания касалась трех боковых граней. Найдите объем этого цилиндра.

в) В куб с ребром a поместите равносторонний цилиндр так, чтобы его ось лежала на диагонали куба, а окружности оснований цилиндра касались граней куба. Найдите объем этого цилиндра.

78. а) Докажите, что объем прямой треугольной призмы равен половине произведения площади боковой грани на расстояние ее от противоположного ребра. Сформулируйте аналогичное планиметрическое предложение.

б) Основанием прямой призмы является равнобедренная трапеция, боковая сторона которой равна 15, а основания равны 25 и 7. Диагональ призмы равна 29. Найдите объем призмы.

в) Найдите объем прямой треугольной призмы, зная, что ее основание — прямоугольный треугольник; радиус окружности, описанной около основания, равен R и диагонали наибольшей и наименьшей боковых граней составляют с основанием углы α и 2α.

г) Около призмы, в основании которой лежит трапеция с основаниями a и b, описан шар радиуса R. Высота призмы равна H. Найдите объем призмы.

79. Основанием прямой призмы служит прямоугольный треугольник, у которого один из острых углов равен α, а высота, проведенная из вершины прямого угла на гипотенузу, равна h. Найдите объем призмы, если известно, что в нее можно вписать шар.

80. а) Около шара радиуса R описана правильная треугольная призма. Найдите ее объем.

б) Основанием призмы служит правильный треугольник, вписанный в окружность радиуса R. Боковые грани призмы — квадраты. Найдите объем этой призмы.

в) В шар радиуса R вписана правильная треугольная призма. Боковое ребро призмы равно радиусу шара. Найдите объем призмы.

81. а) Основанием прямого параллелепипеда служит параллелограмм, у которого одна из диагоналей равна 17, а стороны — 9 и 10. Площадь поверхности параллелепипеда равна 334. Найдите его объем.

б) Основанием прямого параллелепипеда служит параллелограмм, стороны которого равны 20 и 21, а площадь боковой поверхности равна 246. Меньшая диагональ параллелепипеда равна 5. Найдите объем параллелепипеда.

в) Стороны основания прямого параллелепипеда равны 25 и 39. Площади его диагональных сечений равны 204 и 336. Найдите объем параллелепипеда.

г) Диагонали прямого параллелепипеда равны 92 и 88, а стороны основания — 15 и 16. Найдите объем параллелепипеда.

д) Основанием прямого параллелепипеда служит ромб, диагонали которого относятся как 5 : 16. Зная, что диагонали параллелепипеда равны 13 и 20, найдите объем параллелепипеда.

82. а) Диагональ прямоугольного параллелепипеда равна d и составляет с плоскостью основания угол в $30°$, а с плоскостью боковой грани — угол в $45°$. Найдите объем этого параллелепипеда.

б) Площади трех граней прямоугольного параллелепипеда равны S_1, S_2 и S_3. Найдите его объем.

в) Высота прямоугольного параллелепипеда равна H, а его диагональ составляет с плоскостью основания угол α. Найдите объем параллелепипеда, если угол между диагоналями его основания равен β.

г) Диагональ прямоугольного параллелепипеда равна d и наклонена к плоскости основания под углом α. Угол между стороной и диагональю основания равен β. Найдите объем параллелепипеда.

д) Какой длины должна быть сторона квадратов, вырезанных в углах прямоугольного листа жести размером 5×6, чтобы после загибания краев получилась коробка наибольшей вместимости?

е) Найдите объем прямоугольного параллелепипеда, зная его высоту H и углы α и β $(\alpha < \beta)$, которые образуют с плоскостью основания диагональ параллелепипеда и диагональ его боковой грани.

ж) В правильной четырехугольной пирамиде боковое ребро равно b и образует с плоскостью основания угол α. В пирамиду вписан куб так, что вершины нижнего основания принадлежат основанию пирамиды, а вершины верхнего основания — апофемам пирамиды. Найдите объем куба.

83. а) В основании прямого параллелепипеда лежит ромб, площадь которого равна 60. Площади диагональных сечений параллелепипеда равны 72 и 60. Найдите объем параллелепипеда.

б) В конус с радиусом основания R и углом α между образующей и плоскостью основания вписана прямая треугольная призма так, что одно из ее оснований лежит на основании конуса, а вершины другого основания принадлежат его боковой поверхности. Найдите объем призмы, если все ее ребра равны между собой.

в) В шар радиуса R вписан цилиндр, диагональ осевого сечения которого наклонена к плоскости основания под углом α. Найдите объем цилиндра.

г) Найдите объем прямоугольного параллелепипеда, диагональ которого равна d и составляет углы α и β с двумя смежными боковыми гранями.

д) Угол между диагоналями осевого сечения цилиндра, обращенный к основанию, равен α. Объем цилиндра равен V. Найдите высоту цилиндра.

е) Дано множество цилиндров с постоянным периметром развертки боковой поверхности. Какой из этих цилиндров имеет наибольший объем?

ж) Основанием прямой призмы служит ромб. Меньшая диагональ призмы равна 4 и составляет с плоскостью основания угол в 30°. Найдите объем призмы, если один из углов ромба равен 60°.

з) Диагональ прямоугольного параллелепипеда наклонена к плоскости основания под углом α, ее длина равна d, острый угол между диагоналями основания β. Найдите объем параллелепипеда.

и) В основании прямой четырехугольной призмы лежит равнобедренная трапеция, у которой боковая сторона a равна меньшей стороне основания, а острый угол равен α. Найдите объем призмы, если высота ее равна диагонали основания.

к) Объем правильной треугольной призмы равен V, угол между диагоналями двух граней, проведенными из одной и той же вершины, равен α. Найдите сторону основания призмы.

л) В основании прямой призмы лежит треугольник. Два его угла равны α и β, а площадь равна S. Прямая, соединяющая вершину верхнего основания с центром круга, описанного около нижнего основания, составляет с плоскостью основания угол, равный φ. Найдите объем призмы.

м) В прямоугольном параллелепипеде диагональ основания d, угол между диагоналями основания α, а угол, образованный плоскостью, проведенной через большие противоположные стороны верхнего и нижнего оснований, с плоскостью основания, равен β. Найдите объем параллелепипеда.

н) Основание прямой треугольной призмы — равнобедренный треугольник, у которого стороны, равные a, образуют угол α. Диагональ грани, противолежащей этому углу, образует с другой боковой гранью угол φ. Найдите объем призмы.

о) Основанием прямого параллелепипеда служит ромб с острым углом 2β, высота которого равна h. Одна из диагоналей параллелепипеда образует с одной из боковых граней угол φ. Найдите объем параллелепипеда.

84. Найдите объем куба, вписанного в конус, образующая которого равна l и наклонена к плоскости основания под углом α.

§ 3—4. Объем тела, для которого известны площади поперечных сечений. Объем произвольной призмы

85. а) Перпендикулярное сечение наклонного параллелепипеда — ромб с диагоналями, равными d_1 и d_2. Боковое ребро равно l. Чему равен объем параллелепипеда?

б) Основание наклонного параллелепипеда — параллелограмм $ABCD$, в котором $AB = a$, $AD = b$, $BD = c$. Диагональное сечение AA_1C_1C перпендикулярно плоскости основания и имеет площадь Q. Найдите объем параллелепипеда.

в) Основанием наклонного параллелепипеда служит квадрат со стороной a. Одно из боковых ребер образует с каждой прилежащей стороной основания угол в 60° и равно l. Найдите объем параллелепипеда.

г) Основанием наклонного параллелепипеда служи ромб, сторона которого и меньшая диагональ соответственно равны 2 и $\sqrt{7}$. Боковое ребро параллелепипеда равно 5. Диагональное сечение, проходящее через большие диагонали оснований, перпендикулярно плоскостям оснований, а меньшая диагональ этого сечения равна 3. Найдите объем параллелепипеда.

д) Боковое ребро параллелепипеда наклонено к плоскости основания под углом 60°. Сечение параллелепипеда, проходящее через меньшие диагонали оснований, является прямоугольником, диагональ которого равна d. Найдите объем параллелепипеда, если стороны параллелограмма основания равны а и b, а угол между ними равен 60°.

е) Все грани параллелепипеда — ромбы со стороной a и острым углом 60°. Найдите объем параллелепипеда.

ж) Основанием наклонного параллелепипеда служит прямоугольник со сторонами a и b. Боковое ребро равно l и образует со сторонами основания углы в 60°. Найдите объем параллелепипеда.

з) Все ребра параллелепипеда равны a. Острый угол основания равен 60°. Одно из боковых ребер образует со смежными сторонами основания углы в 45°. Найдите объем параллелепипеда.

и) В основании наклонной призмы лежит правильный треугольник со стороной a. Одна из вершин верхнего основания удалена от каждой стороны нижнего основания на h. Найдите объем призмы.

к) Основанием призмы служит ромб, сторона и меньшая диагональ которого равны a. Боковое ребро длиной l составляет с плоскостью основания угол в 60°. Найдите объем призмы.

л) Боковое ребро наклонной призмы равно l, а площадь ее основания равна S. Найдите объем призмы, если известно, что плоскость, перпендикулярная боковым ребрам, образует с плоскостью основания угол α.

86. а) Грани параллелепипеда — равные ромбы со стороной, равной 1, и острым углом α. Найдите объем параллелепипеда.

б) Основание наклонного параллелепипеда — квадрат, сторона которого равна 1. Одно из боковых ребер равно 2 и образует с каждой из прилежащих сторон основания угол в 60°. Найдите объем параллелепипеда.

в) В основании параллелепипеда — ромб $ABCD$ с углом в 60° при вершине A. Перпендикуляр, проведенный из вершины A к плоскости основания, проходит через точку пересечения диагоналей другого основания. Боковое ребро составляет с плоскостью основания угол α. Сторона основания равна a. Найдите объем параллелепипеда.

87. а) Основанием наклонного параллелепипеда служит ромб со стороной a и острым углом 2α. Боковое ребро параллелепипеда равно b и образует со смежными сторонами основания углы, равные β. Найдите объем параллелепипеда.

б) Все грани параллелепипеда — ромбы со стороной, равной a, и острым углом α. Найдите объем параллелепипеда.

в) В основании наклонной призмы лежит прямоугольный треугольник с катетом a и противолежащим ему углом α. Одна из вершин верхнего основания равноудалена от вершин нижнего основания. Боковое ребро наклонено к плоскости основания под углом β. Найдите объем призмы.

г) Боковое ребро наклонной призмы равно l, а площадь ее основания равна Q. Найдите объем призмы, если плоскость, перпендикулярная к боковым ребрам, образует с плоскостью основания угол в 30°.

д) В основании наклонной призмы лежит квадрат со стороной a. Одна из вершин верхнего основания удалена от каждой стороны нижнего основания на h. Найдите объем призмы.

е) Все ребра параллелепипеда равны a. Острый угол основания равен α. Боковое ребро образует со смежными сторонами основания углы в 45°. Найдите объем параллелепипеда.

§ 5—7. Объем тела вращения. Объем конуса и пирамиды. Объем усеченного конуса и усеченной пирамиды

88. а) (*Частный случай теоремы Паппа — Гюльдена.*) Тело получено вращением прямоугольника около оси, параллельной одной из его сторон и лежащей в плоскости прямоугольника, но его не пересекающей. Докажите, что объем этого тела равен произведению площади прямоугольника на длину окружности, описываемой при вращении центром тяжести прямоугольника.

б) Найдите объем тела, образованного вращением вокруг оси абсцисс фигуры, ограниченной линиями: 1) $y = 2x$, $x = 1$, $x = 3$ и $y = 0$; 2) $y = \sqrt{x}$, $x = 2$ и $y = 0$; 3) $y = x^2$, $x = 3$, $y = 0$.

в) Прямоугольный ΔABC с катетами a и b $(a < b)$ вращается один раз вокруг прямой AC, другой раз — вокруг прямой BC. Какое из двух тел вращения имеет больший объем?

89. а) Высота конуса H, площадь осевого сечения Q. Найдите объем конуса.

б) Найдите объем конуса, если в его основании хорда длиной l стягивает дугу α, а угол между образующей и высотой конуса равен β.

в) Образующая конуса составляет с основанием угол α. Площадь сечения, проходящего через две образующие, угол между которыми равен β, равна Q. Найдите объем конуса.

г) Найдите объем конуса, вписанного в шар радиуса R, если угол при вершине осевого сечения конуса равен α.

д) Образующая конуса равна l. Какое наибольшее значение может иметь его объем?

е) В конус помещена правильная треугольная призма, все ребра которой равны a. Четыре вершины призмы лежат на окружности основания, а две — на боковой поверхности конуса. Найдите объем конуса.

ж) В равносторонний конус, образующая которого равна l, вписана правильная шестиугольная призма, боковая грань которой — квадрат. Найдите объем конуса.

з) Ребро куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равно a. Высота равностороннего конуса с вершиной А лежит на диагонали AC_1. Окружность основания конуса касается трех граней куба с общей вершиной C. Найдите объем конуса.

90. а) Объем конуса, вписанного в правильную четырехугольную пирамиду, равен V. Двугранный угол, образованный смежными боковыми гранями, равен α. Найдите длину стороны основания пирамиды.

б) В конус вписан шар. Найдите объем конуса, если радиус шара равен R, а угол между высотой и образующей конуса равен α.

в) В усеченном конусе диагонали осевого сечения взаимно перпендикулярны, а образующая составляет с плоскостью нижнего основания угол α и равна l. Найдите объем усеченного конуса.

г) Угол при вершине осевого сечения конуса равен α, а сумма длин его высоты и образующей равна m. Найдите объем конуса.

д) В шар радиуса R вписан конус, образующая которого наклонена к плоскости основания под углом α. Найдите объем конуса.

е) Прямой круговой конус рассечен на две равные по объему части плоскостью, проходящей через центр вписанного шара перпендикулярно оси конуса. Найдите угол между образующей и плоскостью основания.

ж) В каком отношении делится объем равностороннего конуса плоскостью, которая проведена через окружность касания шара, вписанного в этот конус, с боковой поверхностью конуса?

з) В прямом круговом конусе расположены два шара единичного радиуса, касающиеся основания конуса в точках, симметричных относительно центра основания. Каждый из шаров касается боковой поверхности конуса и другого шара. Найдите объем конуса, если его образующая наклонена к плоскости основания под углом α.

91. а) В правильный тетраэдр вписан шар радиуса r. Найдите объем тетраэдра.

б) Около правильного тетраэдра описан шар радиуса R. Найдите объем тетраэдра.

в) Найдите объем пирамиды Хеопса, если известно, что эта пирамида — правильная, периметр ее квадратного основания равен 932 м, а боковое ребро равно 220 м.

г) В шар радиуса R вписана правильная треугольная пирамида. Найдите объем пирамиды, если ее боковое ребро наклонено к плоскости основания под углом α.

д) Боковое ребро правильной четырехугольной пирамиды образует с плоскостью основания угол α, а середина его удалена от центра основания на расстояние m. Найдите объем пирамиды.

е) В правильной n-угольной пирамиде боковое ребро образует с плоскостью основания угол α. Найдите объем пирамиды, если расстояние от центра ее основания до бокового ребра равно d.

ж) Основанием пирамиды $ABCD$ служит ΔABC с прямым углом C. Ребро AD равно a и перпендикулярно к плоскости основания. Ребра AD и BD составляют с ребром CD углы α и β. Найдите объем пирамиды.

92. а) В конус вписана правильная треугольная пирамида. Найдите объем пирамиды, зная радиус R основания конуса и двугранный угол δ при боковом ребре пирамиды.

б) Найдите объем правильной четырехугольной пирамиды, высота которой равна H и двугранный угол при боковом ребре в 3 раза больше двугранного угла при ребре основания.

в) Найдите объем правильной четырехугольной пирамиды, если ее боковое ребро равно b, а угол наклона боковых граней к плоскости основания равен β.

г) Найдите объем правильной треугольной пирамиды со стороной основания a и плоским углом при вершине, равным углу наклона бокового ребра пирамиды к плоскости основания.

д) В правильной треугольной пирамиде плоский угол при вершине равен $90°$, а площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через одну из сторон основания и середину противолежащего этой стороне боковому ребру, равна 6 см^2. Найдите объем пирамиды.

е) Двугранный угол между боковыми гранями правильной четырехугольной пирамиды равен δ, сторона основания равна a. Найдите объем пирамиды.

ж) Шар радиуса R вписан в треугольную пирамиду, в основании которой лежит равнобедренный треугольник с углом α при основании. Боковые грани пирамиды наклонены к плоскости основания под углом β. Найдите объем пирамиды.

з) Основание треугольной пирамиды — прямоугольный треугольник с гипотенузой c и острым углом α. Найдите объем пирамиды, если все двугранные углы при основании пирамиды равны β.

и) Найдите объем правильной четырехугольной пирамиды, если площадь ее диагонального сечения равна Q, а боковое ребро образует с плоскостью основания угол α.

к) В правильную треугольную пирамиду вписан шар радиуса R. Радиус окружности, проведенной через точки касания шара с боковой поверхностью пирамиды, равен r. Найдите объем пирамиды.

л) Найдите объем пирамиды, если известно, что высота H лежит вне пирамиды, а две противоположные грани — равнобедренные треугольники, составляющие с ее квадратным основанием углы α и β.

м) Шар радиуса R касается всех боковых граней треугольной пирамиды в серединах сторон ее основания. Отрезок, соединяющий вершину пирамиды с центром шара, делится пополам основанием пирамиды. Найдите объем пирамиды.

93. а) В усеченном конусе диагонали осевого сечения перпендикулярны. Образующая составляет с плоскостью большего основания угол α. Найдите объем конуса, если площадь осевого сечения равна Q.

б) В усеченный конус, образующая которого равна l и наклонена к плоскости нижнего основания под углом α, вписан шар. Можно ли по этим данным найти объем конуса?

в) В правильной четырехугольной усеченной пирамиде стороны оснований равны a и b, апофема пирамиды равна h. Найдите объем пирамиды.

94. В четырехугольной пирамиде через середину высоты проведена плоскость, параллельная основанию. Найдите объем образовавшейся усеченной пирамиды, если основание данной пирамиды — ромб с меньшей диагональю d и острым углом α, а высота усеченной пирамиды равна большей диагонали ромба.

§ 8. Объем шара и его частей

95. а) Найдите объем шара, вписанного в правильную четырехугольную пирамиду, высота которой равна H, а двугранный угол при основании равен $60°$.

б) В шаре радиуса R по одну сторону от центра проведены две параллельные плоскости, отстоящие от центра на расстояния h_1 и h_2. Как называется часть шара, заключенная между ними? Найдите ее объем.

в) Найдите объем шарового сектора, если известно, что дуга в его осевом сечении равна α, а стягивающая хорда равна m.

г) Найдите отношение объемов шаров, один из которых вписан в куб, а другой описан около этого куба.

д) Образующая цилиндра равна l, а диагональ его осевого сечения наклонена к плоскости основания под углом α. Найдите объем шара, описанного около данного цилиндра.

е) Найдите объем шарового сектора, если радиус окружности основания равен r, а радиус шара — R.

96. а) Найдите объем шара, вписанного в правильный тетраэдр, ребро которого равно a.

б) В шаре радиуса R по разные стороны от центра проведены две параллельные плоскости, отстоящие от центра на расстояния $\frac{R}{2}$ и $\frac{R}{3}$. Как называется часть шара, заключенная между ними? Найдите ее объем.

в) Угол между смежными боковыми гранями правильной четырехугольной пирамиды равен δ, сторона основания равна a. Найдите объем вписанного шара.

г) Шар с центром, находящимся в центре куба, касается всех его ребер. Найдите объем шара, если ребро куба равно a.

д) Найдите объем шара, описанного около правильного тетраэдра, ребро которого a.

е) Найдите объем шарового сектора, если длина окружности основания равна C, а радиус шара равен R.

ж) Угол между смежными боковыми гранями правильной шестиугольной пирамиды равен δ, сторона основания равна a. Найдите объем вписанного шара.

з) Шар касается нижнего основания куба и его боковых ребер. Найдите объем части шара, отсекаемой плоскостью верхнего основания куба и расположенной вне куба, если ребро куба равно a.

и) Образующая конуса равна l и наклонена к плоскости основания под углом α. Найдите объем вписанного в конус шара.

к) Угол при вершине осевого сечения конуса равен α. Найдите объем вписанного в конус шара, если объем конуса равен V.

л) Отношение объема конуса к объему вписанного в него шара равно k. Найдите отношение радиуса основания конуса к радиусу шара.

м) Радиус основания конуса r, образующая наклонена к плоскости его основания под углом α. Шар проходит через вершину конуса и касается основания в его центре. Найдите объем части шара, расположенной внутри конуса.

н) Образующая конуса равна l и наклонена к плоскости основания под углом α. Найдите объем описанного около конуса шара.

97. а) Шар, центр которого находится в центре куба, касается всех его ребер. Какую часть объема куба составляет его общая часть с шаром?

б) В конус, образующая которого составляет с плоскостью основания угол α, вписан шар. Найдите отношение объема шара к объему конуса.

в) Отношение радиуса основания прямого кругового конуса к радиусу вписанного в конус шара равно k. Найдите отношение объема конуса к объему шара.

г) В шар объема V вписан конус. Угол, составленный двумя образующими конуса, проведенными к концам одного и того же диаметра основания конуса, равен α. Найдите объем конуса.

§ 9. Площадь поверхности призмы и пирамиды

98. а) Диагональ куба равна d. Найдите площадь его поверхности.

б) На склад привезли 64 м^3 льда. Как выгоднее его сложить для замедления таяния: в форме куба или же в форме прямоугольного параллелепипеда с основанием 4 м × 8 м?

99. а) Высота правильной четырехугольной призмы равна H. Прямая, соединяющая центр верхнего основания с серединой стороны нижнего основания, наклонена к плоскости нижнего основания под углом α. Найдите площадь поверхности призмы.

б) Основанием прямого параллелепипеда является параллелограмм, у которого стороны равны a и b и образуют угол в $60°$. Площадь большего диагонального сечения равна Q. Найдите площадь боковой поверхности параллелепипеда.

в) Найдите площадь боковой поверхности прямой призмы, у которой основанием служит прямоугольный треугольник с острым углом α, если боковое ребро призмы равно b и составляет с диагональю большей боковой грани угол β.

г) Основанием прямой призмы служит прямоугольный треугольник с гипотенузой с и острым углом в $30°$. Через гипотенузу нижнего основания и вершину прямого угла верхнего основания проведена плоскость, образующая с плоскостью основания угол $45°$. Найдите площадь боковой поверхности призмы.

д) Диагональ прямоугольного параллелепипеда равна d и образует с плоскостью основания угол α. Найдите площадь боковой поверхности параллелепипеда, если площадь его основания равна S.

е) Найдите площадь боковой поверхности прямого параллелепипеда, у которого высота равна H, диагонали составляют с плоскостью основания углы α и β и основанием его служит ромб.

ж) Основанием прямой призмы служит ромб с острым углом α. Найдите площадь боковой поверхности призмы, если ее большая диагональ равна d и образует с плоскостью основания угол β.

з) Основанием прямой призмы служит равнобедренная трапеция с острым углом α. Боковые стороны трапеции и ее меньшее основание имеют равные длины. Найдите площадь боковой поверхности, если диагональ призмы равна a и образует с плоскостью основания угол β.

Стороны трапеции и ее меньшее основание имеют равные длины. Найдите площадь боковой поверхности, если диагональ призмы равна a и образует с плоскостью основания угол β.

100. Основанием прямого параллелепипеда служит ромб, а площади диагональных сечений равны P и Q. Найдите площадь боковой поверхности параллелепипеда.

101. а) В основании прямой призмы лежит равнобедренная трапеция, у которой диагональ равна d и образует с большим основанием угол α. Диагональ призмы наклонена к основанию под углом β. Можно ли по этим данным найти объем призмы и площадь ее боковой поверхности? Задают ли данные форму и размеры призмы?

б) Одна из сторон основания прямой треугольной призмы равна a. Высота основания, проведенная к этой стороне, равна h. Диагональ грани, проходящей через данную сторону основания, составляет с плоскостью основания угол α. Можно ли по этим данным найти объем призмы и ее боковую поверхность? Можно ли найти наименьшее значение боковой поверхности?

102. Каждое ребро треугольной наклонной призмы равно a, одно из боковых ребер образует со смежными сторонами основания углы в 60°. Найдите полную поверхность призмы.

103. а) В основании прямой призмы лежит равносторонний треугольник. Плоскость, проходящая через одну из сторон нижнего основания и противоположную вершину верхнего, наклонена к плоскости нижнего основания под углом α. Площадь сечения равна Q. Найдите площадь боковой поверхности призмы.

б) Найдите площадь боковой поверхности прямоугольного параллелепипеда, если его боковое ребро равно H, площадь основания равна S и площадь сечения, проходящего через концы трех ребер, выходящих из одной вершины, равна Q.

104. Основанием прямой призмы служит равнобедренный треугольник, в котором боковые стороны равны a и угол между ними равен α. Из вершины верхнего основания проведены две диагонали равных боковых граней; угол между ними равен β. Найдите площадь боковой поверхности призмы.

105. Докажите, что если основания наклонной призмы — трапеции, то ее объем $V=\frac{1}{2}(S_1+S_2)k$, где S_1 и S_2 — площади боковых граней, соответствующих основаниям трапеции, k — расстояние между ними.

106. а) В правильной треугольной призме проведена плоскость через сторону нижнего основания и середину противоположного бокового ребра. Площадь полученного сечения равна Q, а косинус угла при его вершине равен $\frac{3}{5}$. Найдите площадь боковой поверхности призмы.

б) В правильной четырехугольной призме диагональ равна d, а диагональ боковой грани равна q. Найдите площадь поверхности призмы.

в) В правильной шестиугольной призме наибольшая диагональ равна d, а боковое ребро равно b. Найдите площадь боковой поверхности призмы.

г) Площадь наибольшего диагонального сечения правильной шестиугольной призмы равна Q. Найдите площадь боковой поверхности призмы.

д) Основанием прямой призмы служит прямоугольный треугольник с периметром $2p$ и острым углом α. Найдите площадь боковой поверхности призмы, если известно, что в нее можно вписать шар.

107. Шар радиуса R касается всех ребер куба. Найдите площадь поверхности куба, которая находится вне шара.

108. а) Найдите площадь поверхности правильной четырехугольной пирамиды, если ее высота равна H, а сторона основания равна a.

б) Основанием пирамиды служит ромб с диагоналями p и q. Точка пересечения диагоналей ромба лежит на высоте пирамиды, длина которой равна H. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.

в) Вершинами пирамиды являются центр верхнего основания куба и середины сторон нижнего основания. Найдите площадь поверхности пирамиды, если ребро куба равно a.

109. а) Основанием пирамиды служит правильный шестиугольник со стороной a. Одно из боковых ребер перпендикулярно плоскости основания и равно стороне основания. Найдите площадь поверхности пирамиды.

б) Центр основания правильной четырехугольной пирамиды удален от боковой грани на расстояние h. Найдите площадь поверхности пирамиды, если боковая грань образует с плоскостью основания угол β.

в) Боковое ребро правильной треугольной пирамиды равно b и образует с плоскостью основания угол α. Найдите площади боковой поверхности пирамиды и ее основания.

г) Найдите площадь боковой поверхности правильной шестиугольной пирамиды, если расстояние от центра основания пирамиды до середины бокового ребра равно h и плоский угол при вершине равен γ.

110. а) Все боковые грани пирамиды наклонены под углом β к плоскости основания. Площадь боковой поверхности пирамиды равна S. Чему равна площадь поверхности пирамиды?

б) Площадь боковой поверхности правильной пирамиды втрое меньше площади всей ее поверхности. Найдите угол между боковой гранью и плоскостью основания.

в) Отношение площади боковой поверхности правильной треугольной пирамиды к площади ее основания равно k. Найдите угол между боковым ребром и высотой пирамиды.

г) Площадь боковой поверхности правильной четырехугольной пирамиды равна S, а плоский угол при вершине равен γ. Найдите высоту пирамиды.

д) Найдите сторону основания правильной четырехугольной пирамиды, зная ее высоту H и площадь боковой поверхности S.

111. а) Найдите площадь поверхности правильной n-угольной пирамиды, если известны ее апофема h и угол наклона боковой грани к плоскости основания β.

б) Найдите площадь боковой поверхности правильной треугольной пирамиды, если плоскость, проходящая через сторону основания и середину высоты пирамиды, наклонена к плоскости основания под углом в $30°$. Сторона основания равна a.

в) В правильной четырехугольной усеченной пирамиде отношение площадей оснований равно k^2 ($k > 1$), а боковая грань образует с большим основанием угол β. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды, если ее апофема равна h.

г) Апофема правильной треугольной пирамиды равна h, а боковые грани наклонены к плоскости основания под углом β. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.

д) Основанием пирамиды служит квадрат. Две боковые грани этой пирамиды перпендикулярны плоскости основания, две другие ее боковые грани образуют с плоскостью основания двугранные углы, каждый из которых равен α. Высота пирамиды равна H. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.

112. а) Плоский угол при вершине правильной четырехугольной пирамиды равен 2γ, высота пирамиды равна H. Найдите площадь полной поверхности пирамиды.

б) Площадь круга, описанного около основания правильной треугольной пирамиды, равна Q, а плоский угол при ее вершине равен $60°$. Чему равна площадь поверхности пирамиды?

113. а) Сторона основания правильной треугольной пирамиды равна a, двугранный угол между боковыми гранями равен δ. Найдите объем и площадь боковой поверхности пирамиды.

б) Стороны основания правильной четырехугольной пирамиды равны a, угол между смежными боковыми гранями равен δ. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.

в) Основанием пирамиды служит прямоугольник. Две смежные боковые грани перпендикулярны плоскости основания, а две другие образуют с ним углы α и β. Высота пирамиды H. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.

114. а) В правильную четырехугольную пирамиду вписан шар. Расстояние от центра шара до вершины пирамиды равно h, а угол наклона боковой грани к плоскости основания равен β. Найдите площадь поверхности пирамиды.

б) Диаметр шара является высотой правильного тетраэдра, ребро которого a. Какая часть площади поверхности тетраэдра содержится внутри шара?

115. В усеченной пирамиде соответственные стороны оснований относятся как $m : n$. Через середину высоты перпендикулярно ей проведена плоскость. В каком отношении она делит площадь боковой поверхности?

116. а) Пусть V — объем тетраэдра, S — площадь его поверхности, R — радиус вписанного шара. Докажите, что $R = \frac{3V}{S}$.

б) Нельзя ли обобщить предыдущую задачу? Выясните, справедливо ли утверждение: «Если в некоторый многогранник можно вписать шар, то его радиус R находится по формуле $R = \frac{3V}{S}$, где V — объем многогранника, S — площадь поверхности многогранника». Сформулируйте аналогичное планиметрическое предложение.

в) Докажите, что площадь боковой поверхности правильной шестиугольной призмы в три раза больше площади наибольшего диагонального сечения.

г) Каждое ребро треугольной наклонной призмы равно a, одно из боковых ребер образует со смежными сторонами основания углы, равные α. Найдите площадь боковой поверхности призмы.

д) Основанием прямой призмы служит прямоугольный треугольник, у которого катет a и противолежащий угол α. Найдите площадь боковой поверхности призмы, если известно, что в нее можно вписать шар.

е) Шар радиуса R касается всех ребер куба. Найдите площадь поверхности куба, которая находится внутри шара.

ж) Диагональ наибольшего диагонального сечения правильной шестиугольной призмы равна d и наклонена к плоскости основания под углом α. Найдите площадь боковой поверхности призмы.

з) В правильной треугольной призме все ребра равны. Площадь сечения, проходящего через сторону нижнего основания и вершину верхнего основания, принадлежащую противоположному ребру, равна Q. Найдите площадь боковой поверхности призмы.

и) Основанием прямой призмы служит прямоугольный треугольник, гипотенуза которого c и острый угол α. Найдите площадь боковой поверхности призмы, если известно, что в нее можно вписать шар.

к) Стороны основания прямоугольного параллелепипеда равны a и b ($b > a$). Диагональ параллелепипеда образует с плоскостью основания угол в 60°, а с плоскостью большей боковой грани — угол в 30°. Найдите площадь боковой поверхности параллелепипеда.

§ 10. О понятии «площадь кривой поверхности». Площадь поверхности цилиндра — новое применение метода производной

117. а) Найдите объем нормального слоя толщиной h, покрывающего квадрат со стороной a.

б) Составьте и решите задачу, аналогичную предыдущей.

в) Что представляет собой нормальный слой, покрывающий боковую поверхность цилиндра (сферу)? Как найти его объем?

118. а) Прямоугольник со сторонами a и b ($a < b$) вращается вначале вокруг стороны, равной a, затем вокруг стороны, равной b. Сравните площади боковых и полных поверхностей полученных цилиндров.

б) Площади основания и осевого сечения цилиндра равны соответственно S и Q. Найдите площадь поверхности цилиндра.

119. а) Найдите высоту цилиндра, площадь боковой поверхности которого равна S, а диагональ сечения, параллельного оси цилиндра и удаленного от нее на m, равна d.

б) Радиус основания цилиндра равен R. Сечение цилиндра, параллельное его оси и удаленное от нее на m, является квадратом. Найдите площадь боковой поверхности цилиндра.

в) Площадь поверхности цилиндра вдвое больше площади его боковой поверхности. Периметр осевого сечения цилиндра равен P. Найдите площадь осевого сечения цилиндра.

120. а) В цилиндр вписан прямоугольный параллелепипед, у которого одна сторона основания равна a. Диагональ параллелепипеда образует с боковой гранью, проходящей через эту сторону, угол α, а с плоскостью основания — угол β. Найдите площадь боковой поверхности цилиндра.

б) В цилиндр вписана правильная треугольная призма. Чему равно отношение площадей боковых поверхностей призмы и цилиндра?

в) В равносторонний конус с образующей l вписан равносторонний цилиндр. Найдите площадь боковой поверхности цилиндра.

г) Сторона основания правильной четырехугольной пирамиды равна a, двугранный угол при основании равен β. В пирамиду вписан цилиндр, диагональ осевого сечения цилиндра наклонена к плоскости основания под углом α. Найдите площадь боковой поверхности цилиндра.

§ 11. Площадь поверхности конуса

121. Что представляет собой нормальный слой толщиной h, покрывающий боковую поверхность конуса? Как найти объем этого слоя?

122. а) Осевое сечение конуса — равносторонний треугольник со стороной a. Чему равна площадь поверхности конуса?

б) Найдите площадь поверхности конуса, если периметр осевого сечения равен P, а угол развертки боковой поверхности — $120°$.

в) Угол при вершине осевого сечения конуса равен 2α, длина окружности основания равна C. Найдите площадь боковой поверхности конуса.

г) Угол при вершине осевого сечения конуса равен 2α, периметр осевого сечения равен $2p$. Найдите площадь поверхности конуса.

д) В конусе через его вершину и хорду основания проведено сечение. Длина хорды равна m, меньшая дуга, стягиваемая этой хордой, равна $\alpha°$. Угол между двумя образующими конуса, принадлежащими этому сечению, равен β. Найдите площадь поверхности конуса.

е) Образующая усеченного конуса равна l и наклонена к большему основанию под углом α. Диагональ осевого сечения составляет с основанием угол β. Найдите площадь боковой поверхности.

ж) Может ли площадь боковой поверхности конуса быть равной площади его основания?

123. а) Образующая конуса наклонена к плоскости основания под углом α. Найдите объем конуса, если его полная поверхность равна S.

б) Образующая усеченного конуса равна l, высота равна H, площадь боковой поверхности равна сумме площадей оснований. Найдите радиусы оснований.

124. а) В правильной четырехугольной пирамиде расстояние от середины высоты пирамиды до боковой грани равно m. Найдите площадь поверхности вписанного в пирамиду конуса, если его образующая наклонена к плоскости основания под углом α.

б) В цилиндр вписана правильная четырехугольная призма. Диагональ призмы образует с боковой гранью угол α, высота призмы равна H. В цилиндр вписан также конус: основанием конуса является основание цилиндра, вершина конуса находится в центре другого основания цилиндра. Можно ли найти отношение площадей боковых поверхностей данных трех тел?

в) Из всех конусов, вписанных в шар радиуса R, найдите тот, у которого площадь боковой поверхности наибольшая.

г) В конусе объемом V угол между образующей и осью равен α. Найдите площадь боковой поверхности конуса.

д) В шар радиуса R вписан конус, в котором угол между образующей и осью равен α. Найдите площадь боковой поверхности конуса.

е) Шар радиуса R вписан в конус, в котором угол между образующей и осью равен α. Найдите площадь полной поверхности конуса.

125. В усеченный конус вписан шар радиуса R. Образующая конуса наклонена к плоскости основания под углом α. Найдите площадь боковой поверхности конуса.

§ 12. Площадь сферы и ее частей

126. а) Как определяется площадь поверхности шара?

б) Приращение объема какого тела представляет собой объем нормального слоя, покрывающего сферический сегмент?

127. а) Площадь сечения шара плоскостью, отстоящей от его центра на h, равна Q. Найдите площадь поверхности шара.

б) Найдите площадь сферического сегмента, зная, что дуга осевого сечения содержит α°, а радиус основания равен r.

в) Какой должна быть высота сферического сегмента, чтобы его площадь была в k раз больше площади его основания? Радиус шара равен R.

г) Высота сферического пояса равна H, а радиусы оснований — r_1 и r_2. Найдите его площадь.

д) Найдите площадь сферического пояса, если высота его равна H, а дуги в осевом сечении сферы, стягиваемые диаметрами его оснований, равны α и 3α.

е) Найдите площадь сферического пояса, зная радиус сферы R и углы α и β, под которыми видны из центра сферы соответственно диаметр меньшего основания и диаметр сечения, равноудаленного от оснований.

ж) В шаровом секторе наибольший угол между боковыми радиусами равен α. Радиус шара равен R. Найдите площадь поверхности шарового сектора.

128. а) Сфера вписана в конус, у которого площадь боковой поверхности равна Q, а угол между образующей и высотой равен α. Найдите площадь сферы.

б) Около сферы описана прямая призма, основанием которой служит прямоугольный треугольник. Периметры двух меньших боковых граней равны 10 и 12. Найдите площадь сферы.

в) Найдите площадь сферы, вписанной в шаровой сектор радиуса R, если наибольший угол между боковыми радиусами равен $90°$.

г) Найдите площадь сферы, описанной около куба, площадь поверхности которого равна Q.

д) Около сферы описана правильная треугольная призма. Можно ли узнать, во сколько раз площадь поверхности призмы больше площади сферы?

е) Как относятся между собой площади трех сфер, если первая из них вписана в куб, вторая касается всех его ребер, а третья описана около этого куба?

ж) Найдите площадь всей поверхности шарового сегмента с дугой α в осевом сечении, если площадь наибольшей сферы, принадлежащей шаровому сегменту, равна Q.

з) Найдите отношение площади поверхности и объема шара соответственно к площади поверхности и объему описанного вокруг него конуса с равносторонним треугольником в осевом сечении.

и) В прямом круговом конусе образующая равна l, а высота в k раз больше радиуса шара, вписанного в конус. Найдите отношение площади боковой поверхности конуса к площади поверхности шара, описанного около этого конуса.

к) Сфера касается всех боковых ребер правильной четырехугольной призмы и ее оснований. Найдите отношение площади поверхности сферы, лежащей вне призмы, к площади полной поверхности призмы.

л) Найдите радиус основания и образующую цилиндра, вписанного в шар радиуса R и имеющего поверхность наибольшей площади.

м) В сферу вписан конус, образующая которого наклонена к плоскости основания под углом α. Найдите площадь поверхности конуса, если площадь сферы равна Q.

н) В шар вписан конус, имеющий наибольшую площадь боковой поверхности. Найдите угол при вершине осевого сечения конуса.

129. а) Какую часть земной поверхности обозревает космонавт, если высота орбиты корабля равна 1060 км? Радиус Земли считать равным 6370 км.

б) Найдите площадь земной поверхности, которая расположена к северу от 40-й параллели.

130. а) Докажите, что площадь поверхности и объем шара равны соответственно $\frac{2}{3}$ площади полной поверхности и объема цилиндра, описанного около шара. (Это было доказано Архимедом и, по преданию, рисунок к этой теореме изображен на его гробнице.)

б) Докажите, что площадь поверхности и объем шара равны соответственно $\frac{4}{9}$ площади полной поверхности и объема описанного около шара равностороннего конуса.

в) Докажите, что объемы шаров относятся как кубы их радиусов.

г) Докажите, что площади сфер относятся как квадраты их радиусов.

д) Докажите, что объем шара равен произведению площади его поверхности на треть радиуса: $V = \frac{1}{3}SR$.

ОТВЕТЫ И УКАЗАНИЯ К ЗАДАЧАМ

Тема 1

1. а)—г) Воспользуйтесь формулой расстояния между двумя точками, заданными своими координатами.

2. б) Является.

3. а) Через точку X проведите прямую, рассмотрите точку пересечения ее с какой-либо из данных прямых AB, BC или AC.

5. а) Указанные отношения между двумя прямыми при движении сохраняются. в) Сохраняет. д) Движение сохраняет. Преобразование подобия, отличное от движения, не сохраняет.

6. а) Установите, что $B_1(1; 2; 6)$, $C_1(-1; -2; 0)$. в) $3x + 4y + 6z - 12 = 0$, $3x + 4y + 6z - 30 = 0$. ж) См. § 1. з) См. § 1.

8. Нельзя.

9. а) Неподвижными являются только точки плоскости симметрии. Они образуют плоскость. б) Прямая либо лежит на плоскости симметрии, либо перпендикулярна к ней. в) Является.

10. а) Две прямые (плоскости) либо параллельны, либо пересекаются. б) Пусть прямые a и a_1 симметричны относительно плоскости α: $\alpha(a) = a_1$, $a \cap a_1 = A$. Тогда $\alpha(A) = \alpha(a \cap a_1) = \alpha(a) \cap \alpha(a_1) = a_1 \cap a = A$. Если $\alpha(A) = A$, то $A \in \alpha$. Для плоскостей рассуждения проводятся аналогично. Вначале нужно показать, что прямая, по которой пересекаются две симметричные плоскости, является инвариантной прямой в данной симметрии. Затем установить, что эта прямая не может быть перпендикулярна плоскости симметрии. После этого можно сделать вывод о том, что она лежит на плоскости симметрии. г) Примените признак равенства треугольников. д) Пусть $\alpha(A) = A_1$ и точка B равноудалена от точек A и A_1. Надо доказать, что $B \in \alpha$. Воспользуйтесь методом от противного. Если допустить, что $B \notin \alpha$, то, рассмотрев прямую OB (где $O = AA_1 \cap \alpha$), можно заметить, что она перпендикулярна к AA_1. Прямая, по которой плоскость AOB пересекает плоскость α, обладает точно таким же свойством... (Завершите рассуждение.) е) Куб имеет 9 плоскостей симметрии: 6 диагональных плоскостей и 3 плоскости, проходящие через середины каждой четверки параллельных ребер. Правильный тетраэдр имеет 3 плоскости симметрии.

11. б) Является. в) Не может (может). г) Воспользуйтесь тем, что через точку, не лежащую на данной плоскости, можно провести единственную плоскость, параллельную данной. д) Плоскость. е) Можно.

12. а) См. § 2. б) См. § 2. г) См. § 2. д) См. § 2. ж) См. § 2.

13. б) Справедливо. в) Воспользуйтесь тем, что поворот вокруг оси является движением. д) Можно. Воспользуйтесь одним из общих свойств движений. е) Рассмотрите три случая.

14. а) Останутся.

15. а) Ось поворота s строится как прямая, по которой пересекаются плоскости симметрии точек A и A_1, B и B_1 (AB и A_1B_1 — данные отрезки). Пусть плоскость, проходящая через точки A и A_1 перпендикулярно построенной прямой, пересекает эту прямую в точке O, а аналогичная плоскость, проходящая через точки B и B_1, — в точке O_1. Докажите, что $\angle AOA_1 = \angle BO_1B_1$. Рассмотрите плоскости, проходящие через прямую s и точки B и B_1, A и A_1. б) Пусть прямая PM (рис. 155) перпендикулярна к данным скрещивающимся прямым a и b и пересекает их, H — середина отрезка PM. На прямых a и b отложим равные отрезки PA и MA_1, точки A и A_1 соединим отрезком, O — середина этого отрезка. Через точки H и O проведем прямую s. Докажем, что при симметрии относительно этой оси прямая a переходит в прямую b. Проведем через точку M прямую $a_1 \parallel a$. Через прямые b и a_1 проведем плоскость α. Ясно, что $PM \perp \alpha$. Пусть A_0 — ортогональная проекция A на плоскость α, $A_0 \in a_1$. Нетрудно доказать, что точка O ортогонально проектируется на плоскость α в точку C, лежащую на биссектрисе l угла, образованного прямыми b и a_1. Тогда $l \perp AA_0$ и $l \perp A_0A_1$. Отсюда получаем, что $l \perp AA_1$. После того как будет доказано, что $l \parallel s$, получаем: $s \perp AA_1$. Итак, при симметрии относительно прямой s точка A переходит в точку A_1. Это только часть

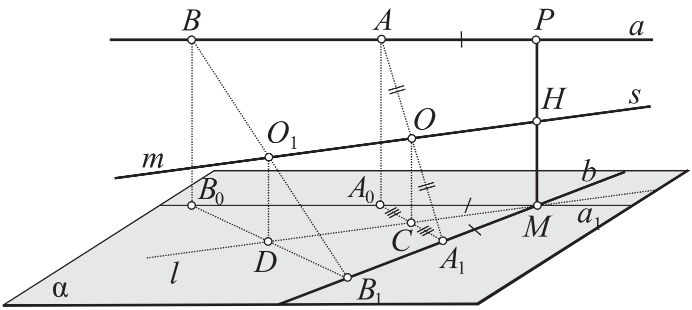


Рис. 155

доказательства. Аналогично можно построить на данных прямых a и b точки B и B_1 ($PB = MB_1$), взять середину O_1 отрезка BB_1, провести через точки H и O_1 новую прямую m; на основании предыдущего точки B и B_1 симметричны относительно прямой m. Но совпадают ли прямые m и s? Докажем, что они совпадают. В самом деле, совпадение этих прямых следует из того, что они принадлежат двум одним и тем же плоскостям: плоскости симметрии точек P и M и плоскости, проходящей через PM и l. После этого доказательство можно считать законченным. Проведите это доказательство полностью. Возможен *другой способ*. Он менее нагляден, но зато несравненно проще. Идея его усматривается из предыдущего доказательства, в котором было установлено, что ось симметрии s находится как прямая, по которой пересекаются плоскость симметрии точек P и M и плоскость симметрии прямых b и a_1. Действительно, при симметрии относительно первой плоскости прямая a переходит в прямую a_1, а при симметрии относительно второй — прямая a_1 переходит в прямую b. В итоге прямая a переведена в прямую b. Нетрудно видеть, что указанные две плоскости взаимно перпендикулярны. Поэтому последовательное выполнение двух симметрий относительно этих плоскостей дает осевую симметрию с осью — линией пересечения плоскостей симметрии. Таким образом, искомая ось симметрии строится как прямая пересечения двух указанных плоскостей симметрии.

16. а) Верно. б) 9 осей симметрии: 6 осей, проходящих через середины его противоположных ребер, и 3 оси, проходящие через центры противоположных граней.

17. а) См. § 3. в) См. § 3. д) См. § 3. е) См. § 3. з) Симметрия относительно плоскости. См. § 3.

18. а) Отрезки AB и A_1B_1 могут быть совмещены параллельным переносом ($A \to A_1$, $B \to B_1$), если $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A_1B_1}$. Для двух прямых достаточно потребовать их параллельности. Аналогичное условие и для двух плоскостей. Лучи AB и A_1B_1 могут быть совмещены параллельным переносом при условии, что они сонаправлены. б) Сохраняется (как и при всяком движении). в) Выполните параллельный перенос вдоль данной прямой, совмещающий одну из данных плоскостей с другой. д) Конец искомого отрезка, принадлежащий данной плоскости, может быть построен как точка пересечения плоскости α с образом прямой a в параллельном переносе, выполняемом в направлении прямой b на расстояние m. Рассмотрите различные случаи.

19. в) См. задачу 7 из § 6.

20. а) См. § 4. в) $(a+2; b+3; c+4)$, см. § 4. о) Параллельный перенос, см. § 4.

21. Воспользуйтесь гомотетией с центром O и коэффициентом, равным $\frac{OA_1}{OA}$.

22. а) Гомотетии будем подвергать пару точек A и B. Рассмотрим стереометрический вариант этой задачи: пусть A не принадлежит некоторой плоскости α (рис. 156), а B принадлежит этой плоскости; центр первой гомотетии — центр O — принадлежит плоскости α. Пусть при первой гомотетии точки A и B переходят соответственно в точки A_1 и B_1, а при второй гомотетии с центром O_1 $(O_1 \in \alpha)$ эти точки переходят в точки A_2 и B_2. Сравнительно нетрудно установить, что если $AB \neq A_2B_2$, то последовательное выполнение двух гомотетий с центрами O и O_1 можно заменить одной гомотетией с центром O_2. Докажем теперь принадлежность трех центров гомотетии одной прямой. В самом деле, точки O, O_1 и O_2 принадлежат и плоскости α, и плоскости AA_1A_2, а значит, и линии пересечения этих плоскостей.

23. б) См. § 5. в) См. § 5.

24. а) Воспользуйтесь тем, что при движении угол переходит в равный ему угол.

25. а) Прямая. б) Плоскость. в) Окружность. г) Предположите, что искомая точка X построена (рис. 157). Выясните, какими свойствами она обладает. Во-первых, так как точки A и A_1 симметричны относительно точки X, то $AX = XA_1$. Далее, точка X обязана лежать в плоскости, проходящей через данные точку A и прямую a. Кроме того, она

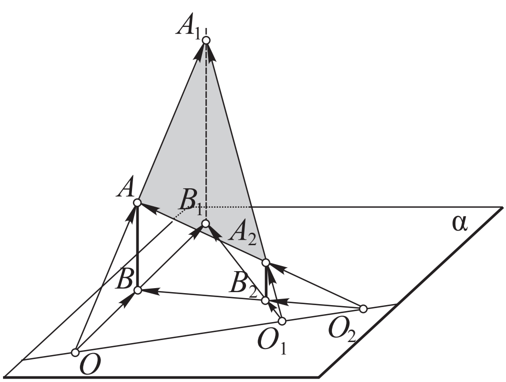


Рис. 156

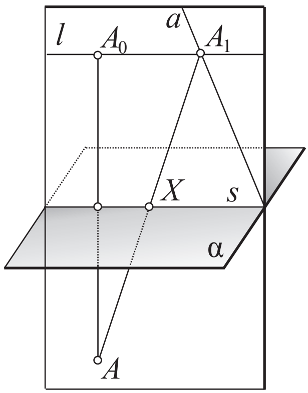


Рис. 157

должна лежать в плоскости α. Следовательно, точка X должна лежать на прямой s, по которой эти плоскости пересекаются. Теперь если в плоскости (A, a) построить точку A_0, симметричную точке A относительно прямой s, то нетрудно видеть, что $A_0A_1 \parallel s$. Это означает, что точка A_1 лежит на прямой l, проходящей через точку A_0 и параллельной s. Найденные свойства позволяют найти вначале положение точки A_1. Точка X после этого строится как точка пересечения отрезка AA_1 с прямой s. Выполните остальные этапы решения задачи: построение, доказательство и исследование. Выясните, когда задача имеет единственное решение, бесконечное множество решений и не имеет решения. д) Сведите данную задачу к планиметрической.

26. а) Они имеют противоположную ориентацию. б) См. § 6. в) См. § 6. д) См. § 6. Проведем плоскость симметрии α точек C и C_1 (рис. 158). Она пройдет через точки $A = A_1$ и $B = B_1$. При выполнении симметрии относительно этой плоскости у данных фигур окажутся совмещенными три соответственные точки: $A = A_1$, $B = B_1$, $C = C_1$, причем полученные фигуры будут иметь противоположную ориентацию. Согласно задаче 26, в эти фигуры можно совместить одной симметрией относительно плоскости ABC_1. В итоге данные фигуры совмещены последовательным выполнением двух симметрий относительно двух плоскостей α и ABC_1, пересекающихся по прямой AB. Эту прямую примем за ось поворота s. Последовательное выполнение указанных двух симметрий можно заменить одним поворотом вокруг оси s на удвоенный угол между плоскостями симметрии. е) Одной симметрией относительно плоскости. Как выбрать эту плоскость? ж) См. § 6. Сведите данную задачу к одной из предыдущих. з) Симметрией относительно одной плоскости, проходящей через ту же самую прямую. Последовательное выполнение трех симметрий относительно трех данных плоскостей α, β и γ постарайтесь заменить последовательным выполнением трех симметрий относительно плоскостей α_1, γ и γ. Как выбрать плоскость α_1?

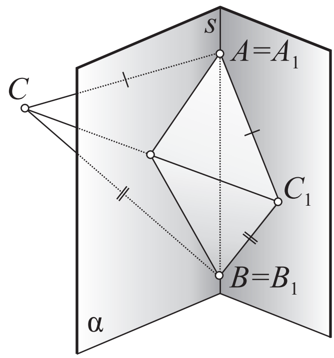


Рис. 158

27. а) Воспользуйтесь параллельным переносом плоскостей. б) Примените параллельный перенос плоскости. в) Воспользуйтесь параллельным переносом плоскости в пространстве, затем — параллельным переносом отрезка в плоскости.

28. а) Любое движение первого рода является винтовым движением, которое, в частности, может быть параллельным переносом или поворотом вокруг оси. б) Любое движение второго рода является либо поворотной симметрией, в частности центральной симметрией, либо симметрией относительно плоскости, либо скользящей симметрией.

30. б) Если взять деревянный кубик, пронумеровать его грани и начертить на листе бумаги квадрат, равный грани куба, то на этот квадрат куб можно поставить, например, гранью № 5 четырьмя различными способами. Это же справедливо и для остальных граней. Так как куб имеет 6 граней, то всего можно получить $4 \cdot 6 = 24$ самосовмещения куба. Какими же движениями первого рода можно получить эти самосовмещения? Точка пересечения диагоналей куба в каждом из таких самосовмещений остается неподвижной. Поэтому на основании теоремы Даламбера каждое самосовмещение можно осуществить поворотом вокруг некоторой оси, проходящей через указанную неподвижную точку. Чтобы дать окончательный ответ, учтем, что куб имеет 9 осей симметрии второго порядка: 6 из них проходят через середины противоположных ребер и 3 — через центры противоположных граней; три последние оси являются одновременно и осями симметрии четвертого порядка. Кроме того, куб имеет 4 оси симметрии третьего порядка, которыми являются его диагонали. Окончательный подсчет: 6 осей симметрии второго порядка дают 6 самосовмещений, 4 оси третьего порядка — 8 самосовмещений, 3 оси симметрии четвертого порядка — 9 самосовмещений. Вместе с исходным положением куба всего получаем $6 + 8 + 9 + 1 = 24$ совмещения. *Примечание.* В геометрии принято преобразования, совмещающие фигуру саму с собой, называть *преобразованиями симметрии*. К ним могут относиться и движения второго рода. К движениям второго рода, совмещающим куб с самим собой, относятся центральная симметрия относительно точки пересечения диагоналей куба и 9 симметрий относительно плоскостей. Выясните, как располагаются эти плоскости. в) 12.

Тема 2

32. б) Пример такого многогранника приведен на рисунке 159. Его можно построить следующим образом. Возьмем куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Рассмотрим квадрат, получающийся в сечении куба плоскостью, проходящей через середины его боковых ребер; O — центр этого квадрата. Выполним гомотетию с центром O, приводящую к увеличению размеров этого квадрата. Получим новый квадрат $PHMS$. Соединим вершины этого квадрата с вершинами куба. Рассмотрим многогранник с 12 вершинами, из которых 8 — вершины куба и 4 — вершины квадрата $PHMS$. Эйлерова характеристика для этого многогранника выполняется: в нем имеется 12 вершин, 10 граней, 20 ребер. Поэтому Г + В − Р = 10 + 12 − 20 = 2. С помощью этого многогранника построим новый, для которого эйлерова характеристика уже не будет выполняться. В данном многограннике сделаем сквозное отверстие, удалив из него куб. Получим многогранник с тем же самым числом вершин — 12; образовав отверстие, мы удалили 2 грани, но добавили 4; в итоге количество граней увеличилось на 2 и стало 12; удалив куб, мы увеличили число ребер на 4 боковых ребра куба; всего ребер стало 24. В итоге: Г + В − Р = 12 + 12 − 24 = 0 ≠ 2!

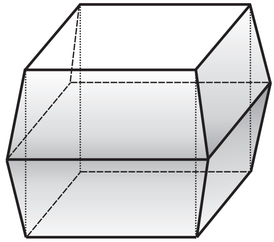


Рис. 159

33. а) $S_1^2 + S_2^2 = S_3^2$. б) Сведите задачу к планиметрической.

34. Найдите плоскость, к которой перпендикулярны линия пересечения и ось.

35. а) $d\sin\beta, \dfrac{\pi d^2\cos^2\beta}{4\cos^2\alpha}$. б) 90°. в) $40\sqrt{3}$ см. г) 3 дм. д) 10 м. е) $\dfrac{Q}{2a\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}}$.

37. а) 7,5 см. б) $2H$. в) 30°. г) $180° - (\alpha + \beta)$.

38. а) Задача сводится к нахождению высоты треугольника. б) 40 или 30. в) Основанием высоты будет служить центроид ΔABC.

39. в) Найдите вначале диагонали основания. г) $625, 25\sqrt{601}$. д) 200. е) 40; 9. ж) Проведите высоту параллелограмма, получающегося в сечении. $\dfrac{Q}{a}, \dfrac{Q\cos\alpha}{a}$.

41. а) Учтите, что в сечении получается прямоугольный треугольник с катетами, равными $\dfrac{2R\operatorname{tg}\alpha}{\sin 3\alpha}$ и $2R\sqrt{1-\operatorname{tg}^2\alpha\operatorname{ctg}^2 3\alpha}$. б) $3\sqrt{35}$. в) $2\sqrt{6}$. г) См. § 8. д) $l\sin\varphi, l\cos\varphi\sin\dfrac{\beta}{2}, l\cos\varphi\cos\dfrac{\beta}{2}$. е) $d\sin\dfrac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\beta$, см. § 8. ж) $\arcsin\dfrac{1}{3}$. Обозначьте угол между прямой BD_1 и плоскостью BDC_1 через α. По определению угла между прямой и плоскостью α — острый угол. Пусть $AB = BC = a, AA_1 = H$. Рассмотрим систему координат с началом в точке C и осями CB, CD и CC_1. Запишите координаты вектора $\overrightarrow{BD_1}$ и вектора, перпендикулярного плоскости BDC_1. Имеем $\overrightarrow{BD_1}(-a;\ a;\ H)$. Так как плоскость BDC_1 имеет уравнение $\frac{x}{a}+\frac{y}{a}+\frac{z}{H}=1$, то вектор $\vec{n}$, перпендикулярный ей, имеет координаты $\left(\frac{1}{a};\frac{1}{a};\frac{1}{H}\right)$. Поэтому $\sin\alpha=\cos\beta=$

$$=\frac{\vec{n}\cdot\overrightarrow{BD_1}}{|\vec{n}|\cdot|\overrightarrow{BD_1}|}=\frac{1}{\sqrt{\frac{2}{a^2}+\frac{1}{H^2}}\cdot\sqrt{2a^2+H^2}}=\frac{1}{\sqrt{2\left[\left(\frac{a}{H}\right)^2+\left(\frac{H}{a}\right)^2\right]+5}},$$ где β — угол между векторами $\vec{n}$ и $\overrightarrow{BD_1}$. Нетрудно установить, что $\left(\frac{a}{H}\right)^2+\left(\frac{H}{a}\right)^2\geq 2$, причем $\left(\frac{a}{H}\right)^2+\left(\frac{H}{a}\right)^2=2$ только при $a=H$. Следовательно, $\sin\alpha<\frac{1}{3}$ при $a\neq H$ и $\sin\alpha=\frac{1}{3}$ при $a=H$. Так как на $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ синус возрастает, то $\alpha\leq\arcsin\frac{1}{3}$. Значит, $\arcsin\frac{1}{3}$ — наибольшее возможное значение для α. з) $\gamma=\arccos(\sin\alpha\sin\beta)$. Воспользуйтесь обобщенной формулой Эйлера.

42. а) $AB_1=\sqrt{H^2+4(R^2-d^2)}$, $\sin\alpha=\cos\beta=\frac{H}{\sqrt{H^2+4(R^2-d^2)}}$. б) См. § 7. г) См. § 7.

43. в) В середину гипотенузы основания треугольника. г) В центр вписанной в основание окружности.

44. а) Сравните значение какой-либо тригонометрической функции угла β со значением этой тригонометрической функции от угла в 60°.

45. а) $\frac{a\sqrt{6}}{6}$. б) $\sqrt{S\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$. г) 1; $\frac{\sqrt{7}}{2}$; 30°; $\sqrt{\frac{3}{7}}$; $\frac{5}{3}$. д) 20; $\operatorname{arctg}\frac{3}{4}$.

47. 1) Рассмотрите треугольник, получившийся в сечении пирамиды плоскостью, проходящей через боковое ребро и высоту пирамиды. Углы α и β — углы при основании этого треугольника.

49. а) См. § 9. б) См. § 9.

50. г) Применив обобщенную формулу Эйлера, получим:

$\frac{1}{2}=\frac{\cos\alpha-\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}$. Отсюда $\cos\alpha=\sqrt{3}-1$. д) $\operatorname{tg}\frac{\delta}{2}=\frac{\operatorname{ctg}\frac{\pi}{n}}{\sin\alpha}$. е) $2\operatorname{arctg}\frac{2}{\sqrt{3}}$, $\pi-2\operatorname{arctg}\frac{2}{\sqrt{3}}$.

51. а) См. § 9. б) $\operatorname{tg}\beta = 2\operatorname{tg}\alpha$, $2r\operatorname{tg}\alpha$, $r\sqrt{4\operatorname{tg}^2\alpha + 1}$, $\dfrac{2r}{\cos\alpha}$. в) $\operatorname{tg}\beta = \sqrt{2}\operatorname{tg}\alpha$, $\sin\dfrac{\gamma}{2} = \dfrac{\cos\alpha}{\sqrt{2}}$, $R\operatorname{tg}\alpha$, $\dfrac{R}{\cos\alpha}$, $R\sqrt{\dfrac{1+2\operatorname{tg}^2\alpha}{2}}$. г) $\operatorname{ctg}\dfrac{\delta}{2} = \sin\alpha$, $\operatorname{tg}\beta = \sqrt{2}\operatorname{tg}\alpha$. е) См. § 9.

52. а) 3. б) 8. в) $\pi R^2\sin^2\varphi$. г) $\dfrac{R}{\sin\dfrac{\alpha}{2}}$.

54. а) См. § 10. б) Чтобы доказать, что пирамида правильная, никаких вычислений проводить не нужно. В самом деле, обратимся к рисунку 160. Сечениями сферы с гранями пирамиды будут вписанные в грани окружности. Пусть O — центр сферы, M, H и T — точки касания сферы со сторонами основания. Так как $OM = OT = OH$, то точка O ортогонально проектируется в центр окружности, описанной около ΔMHT. Эта окружность вписана в основание ABC. Значит, O проектируется в центр вписанной в основание окружности. По условию высота пирамиды проходит через точку O. В силу единственности перпендикуляра к плоскости, проходящего через точку O, основание высоты совпадает с центром вписанной окружности. Нетрудно видеть, что угол между высотой пирамиды и каждым боковым ребром один и тот же (для этого нужно рассмотреть прямоугольный ΔOPK и ему аналогичные). Тогда $SA = SB = SC$. Это означает, что центр S вписанной окружности является и центром описанной около основания окружности. Поэтому в основании лежит правильный треугольник. Из ΔPSA и ему аналогичных следует, что боковые ребра пирамиды равны между собой. Таким образом, треугольная пирамида действительно является правильной. Проведем теперь вычисления. Введем обозначение: $OS = x$. Тогда $SM = \sqrt{R^2 - x^2}$, $SC = 2\sqrt{R^2 - x^2}$. Найдем тангенс угла между высотой пирамиды и боковым ребром. Он равен $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. Тогда мож-

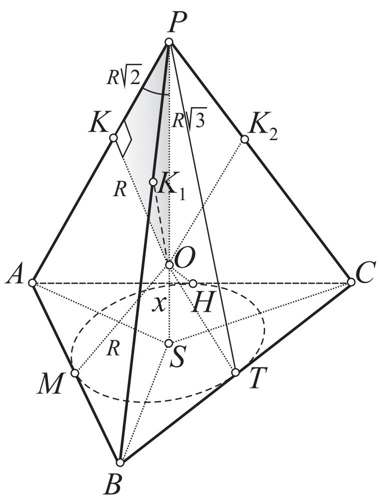


Рис. 160

но составить уравнение $\frac{2\sqrt{R^2 - x^2}}{R\sqrt{3} + x} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Решив его, получаем $x = \frac{R\sqrt{3}}{3}$. Отсюда высота $H = R\sqrt{3} + \frac{R\sqrt{3}}{3} = \frac{4R\sqrt{3}}{3}$.

55. а) $\frac{a}{2\sin\frac{\gamma}{2}}$, см. § 10. б) $2\arcsin\frac{1}{4}$, см. § 10. г) $\frac{R\sqrt{3}}{\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}}$. ж) $\frac{R}{\sqrt{3}\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}}$.

57. а) Учесть, что угол между образующими конуса не может быть больше угла между образующими в осевом сечении. б) $60°$, $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

58. а) Обратитесь к определениям. б) Через данную точку в плоскости основания конуса проведите прямую, касательную к окружности основания.

59. а) $2R^2\sin\alpha$. См. указание к задаче 57, а. б) Воспользуйтесь формулой $S_\Delta = \frac{1}{2}ab\sin C$. в) $45°$.

60. а) $\frac{R^2}{\sin^2\alpha}\sqrt{-\cos 2\alpha}$, $45° < \alpha < 90°$. б) $\frac{4\sqrt{2}H^2}{3}$. в) $45°$.

61. $\arccos(\cos^2\alpha + \cos\beta\sin^2\alpha)$. Примените обобщенную формулу Эйлера.

62. См. § 11.

63. а) $\frac{\pi}{4}\left(\sqrt{\frac{S_1}{\pi}} + \sqrt{\frac{S_2}{\pi}}\right)^2$. б) $\sqrt{R_1^2 + l^2 - (R_1 - R_2)^2}$. в) См. § 11.

64. в) См. § 11. г) $\frac{\sqrt{Q\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}}}{\sin\frac{\alpha}{2}}$. д) $\arccos\left(\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\right)$. е) $\frac{\sqrt{2Q}}{3}$.

65. в) Можно. г) $\frac{1}{2}\sqrt{(a^2 + b^2)(\operatorname{tg}^2\alpha + 1)}$. д) $\frac{c^2}{\sqrt{4c^2 - a^2 - b^2}}$.

е) $\frac{a\sqrt{1 + \cos^4\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}^2\beta}}{2\sin\alpha}$. Для нахождения радиуса описанной окружности воспользуйтесь теоремой синусов.

67. в) $R^2(3 + 2\sqrt{3})$. г) $\arccos\frac{4R^2}{a^2\sin\alpha}$.

68. а) Рассмотрите равнобедренный треугольник. б) $l\cos\alpha\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$, $\pi l\sin 2\alpha\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$. в) $90° < \alpha < 135°$. д) $l\cos\alpha\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$. е) $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\sqrt{\frac{Q}{\operatorname{tg}\alpha}}$.

69. $R\sqrt{2}$.

70. б) $\dfrac{3l}{4(2+\sqrt{3})}$; $\dfrac{3\sqrt{3}l^2}{8(2+\sqrt{3})}$. в) $\dfrac{a\sqrt{6}}{2(\sqrt{2}-1)}$. г) $\dfrac{3}{2}R\operatorname{tg}\alpha$.

71. б) $r\left(\cos\dfrac{\alpha}{2}+\cos\dfrac{\beta}{2}\right)$.

72. а) $\dfrac{a\sqrt{3}}{2(\sqrt{2}+1)}$. б) См. § 14. в) $a(2-\sqrt{2})$.

73. а) См. § 12. г) См. § 12. ж) См. § 12. и) См. § 12. м) См. § 12. н) См. § 12. п) См. § 12.

Тема 3

74. $\dfrac{R^2H}{6}(8\pi+3)$.

75. а) $\dfrac{\pi d^3}{8\sqrt{2}}$. б) $\dfrac{\pi d^3\cos^2\beta\sin\beta}{4\sin^2\dfrac{\alpha}{2}}$. в) $\dfrac{3\pi a^3}{4}$. г) $\dfrac{S\sqrt{\pi S}}{6}$. д) Докажите равенство радиусов оснований и высот цилиндров. е) $\dfrac{\pi d^3}{6\sqrt{3}}$.

76. а) Данных задачи недостаточно для ее решения. б) $\dfrac{2}{5}l^3\cos^2\alpha\sin\alpha$.

77. а) $\dfrac{2\pi b^3\cos^3\alpha\operatorname{tg}^3\dfrac{\alpha}{2}}{\left(1+\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}\right)^3}$. Обратимся к рисунку 161, *а*. Согласно условию образующая KK_1 цилиндра лежит на диагонали AC основания пирамиды, поэтому плоскость основания цилиндра перпендикулярна основанию пирамиды и параллельна ее диагональному сечению SDB. Пусть ΔMNP — сечение пирамиды плоскостью основания цилиндра, тогда из условия задачи следует, что ΔMNP — равнобедренный треугольник, подобный ΔSDB; окружность основания цилиндра вписана в ΔMNP. Обозначим искомый радиус этой окружности через x и ее центр O соединим с вершиной P ΔMNP (см. рис. 161, *б*). Так как OP есть биссектриса $\angle MNP$, равного $\angle SBH$, то $x = KP\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}$. По условию осевое сечение цилиндра — квадрат, поэтому $KH = x$. Заметив, что ΔAKP — прямоугольный и равнобедренный (как подобный ΔAHB), запишем:

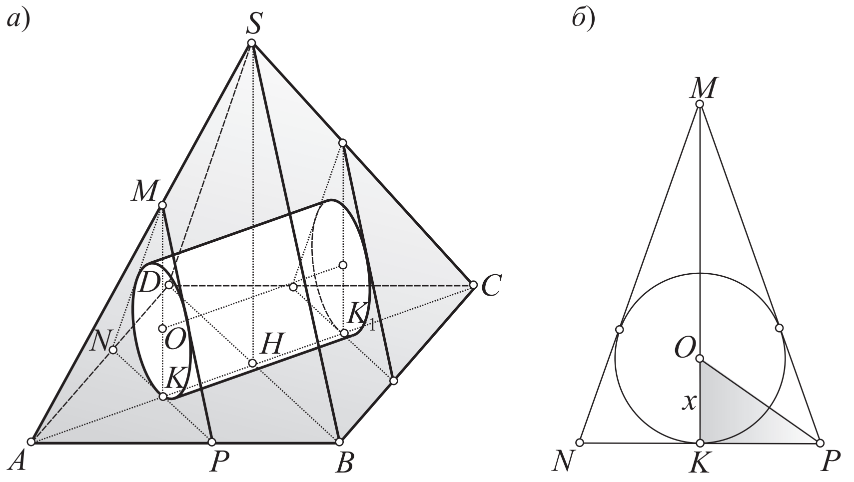


Рис. 161

$KP = AK = AH - KH = AS\cos\alpha - x = b\cos\alpha - x$. Подставив значения KP в первоначальное выражение для x, получим $x = (b\cos\alpha - x)\,\mathrm{tg}\,\dfrac{\alpha}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow x = \dfrac{b\cos\alpha\,\mathrm{tg}\,\dfrac{\alpha}{2}}{1 + \mathrm{tg}\,\dfrac{\alpha}{2}}$. После этого нетрудно найти искомый объем.

б) $\dfrac{\pi a^3\sqrt{6}}{18(1+\sqrt{2})^3}$. Рассмотрите сечение тетраэдра и цилиндра плоскостью, проходящей через боковое ребро и высоту тетраэдра. Обозначим радиус основания цилиндра через x, тогда его высота равна $2x$. в) Для построения данного цилиндра воспользуйтесь вспомогательным цилиндром и гомотетией с центром O (рис. 162). Пусть R — искомый радиус основания цилиндра. Тогда $\Delta A_1O_1E \backsim \Delta CAA_1 \Rightarrow \dfrac{A_1O_1}{AC} = \dfrac{R}{a}$. Далее

$A_1O_1 = \dfrac{a\sqrt{3}}{2} - R = \dfrac{a\sqrt{3} - 2R}{2}$, $AC = a\sqrt{2}$, $\dfrac{a\sqrt{3} - 2R}{2\sqrt{2}} = R \Rightarrow R = \dfrac{a\sqrt{3}}{2(\sqrt{2}+1)} \Rightarrow$

$\Rightarrow V = \dfrac{3\sqrt{3}\pi a^3}{4(\sqrt{2}+1)^3}$.

78. а) Воспользуйтесь основной формулой объема призмы. Получите формулу, которая аналогична формуле площади треугольника,

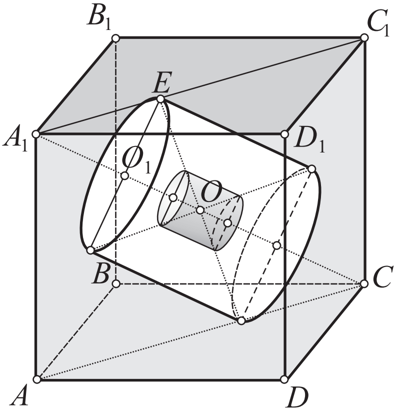


Рис. 162

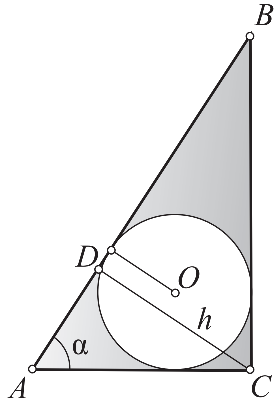


Рис. 163

выражающей ее через сторону треугольника и высоту, проведенную к этой стороне. б) 4032 куб. ед., см. § 15. в) $\dfrac{4R^3 \operatorname{tg}^2 \alpha}{\operatorname{tg}^2 2\alpha}\sqrt{\operatorname{tg}^2 2\alpha - \operatorname{tg}^2 \alpha}$.

г) $\dfrac{H(a+b)}{4}\left(\sqrt{4R^2 - H^2 - a^2} + \sqrt{4R^2 - H^2 - b^2}\right)$.

79. Пусть призма с вписанным в нее шаром построена. Рассечем их плоскостью, проходящей через центр шара и параллельной основанию призмы. В сечении получится такой же, как и в основании призмы, прямоугольный ΔABC (рис. 163) с вписанной в него окружностью, причем радиус этой окружности равен радиусу шара и, следовательно, равен половине высоты. На этом анализ рисунка закончен и можно перейти к вычислениям. Найдем площадь ΔABC:

$S_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{2} AC \cdot BC = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{h}{\sin\alpha} \cdot \dfrac{h}{\sin(90° - \alpha)} = \dfrac{h^2}{\sin 2\alpha}$. Обозначив через r радиус круга, вписанного в ΔABC, и применив формулу $r = \dfrac{S}{p}$, будем иметь:

$H = 2r = \dfrac{2S}{p}$. Находим далее периметр ΔABC: $2p = AB + AC + BC =$

$= \sqrt{AC^2 + BC^2} + AC + BC = \sqrt{\dfrac{h^2}{\sin^2\alpha} + \dfrac{h^2}{\cos^2\alpha}} + \dfrac{h}{\sin\alpha} + \dfrac{h}{\cos\alpha} =$

$= h\left(\dfrac{1}{\sin\alpha\cos\alpha} + \dfrac{1}{\sin\alpha} + \dfrac{1}{\cos\alpha}\right) = \dfrac{h(1 + \sin\alpha + \cos\alpha)}{\sin\alpha\cos\alpha}$. Имеем:

$$H=\frac{2h^2}{\sin 2\alpha}\cdot\frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{h(1+\sin\alpha+\cos\alpha)}=\frac{2h}{1+\sin\alpha+\cos\alpha}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow V=\frac{h^2}{\sin 2\alpha}\cdot\frac{2h}{1+\sin\alpha+\cos\alpha}=\frac{h^3}{\sqrt{2}\sin 2\alpha\cos\frac{\alpha}{2}\sin\left(45°+\frac{\alpha}{2}\right)}.$$

80. а) $6\sqrt{3}R^3$. б) $\frac{9}{4}R^3$. в) $\frac{9\sqrt{3}R^3}{16}$, см. § 15.

81. а) 360. б) $\frac{45}{2}\sqrt{111}$. в) 5040 куб. ед., см. § 15. г) 13860. Воспользуйтесь суммой квадратов диагоналей параллелепипеда. д) 480.

82. а) $\frac{d^3\sqrt{2}}{8}$. б) $\sqrt{S_1S_2S_3}$, см. § 15. в) $\frac{H^3\sin\beta}{2\operatorname{tg}^2\alpha}$. г) $\frac{1}{2}d^3\cos^2\alpha\sin\alpha\sin 2\beta$. д) $\frac{11-\sqrt{31}}{6}\approx 0{,}9$. Обозначьте сторону квадрата через x. ж) $\frac{b^3\sin^3\alpha}{(\operatorname{tg}\alpha+1)^3}$, см. § 15. Обратимся к рисунку 164. Обозначим ребро куба через x. Имеем: $OP=b\sin\alpha$, $OC=b\cos\alpha$. Рассмотрим два треугольника с вершиной P и соответственно основаниями OC и O_1C_1.

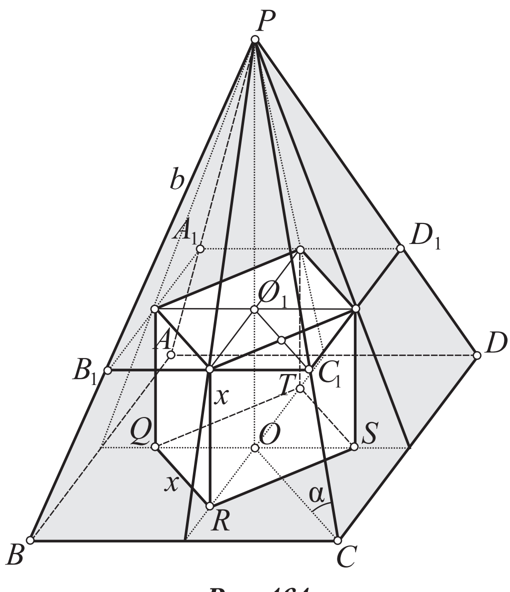


Рис. 164

Эти треугольники подобны. На основании их подобия можно записать:

$$\frac{OC}{O_1C_1}=\frac{PO}{PO-x}\Rightarrow\frac{b\cos\alpha}{x}=\frac{b\sin\alpha}{b\sin\alpha-x}\Rightarrow x=\frac{b\cos\alpha\sin\alpha}{\sin\alpha+\cos\alpha}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x=\frac{b\sin 2\alpha}{2\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)}\Rightarrow V=\frac{b^3\sin^3 2\alpha}{16\sqrt{2}\cos^3\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)}=\ldots .$$

83. а) 360. б) $\frac{27\sqrt{3}R^3\operatorname{tg}^3\alpha}{4(3+\sqrt{3}\operatorname{tg}\alpha)^3}$. в) $2\pi R^3\cos^2\alpha\sin\alpha$.

г) $d^3\sin\alpha\sin\beta\sqrt{\cos^2\alpha-\sin^2\beta}$. е) $\frac{P^3}{216\pi}$, см. § 15. д) $\frac{V}{\sqrt[3]{\frac{\pi V^2\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{4}}}$. ж) $12\sqrt{3}$.

з) $\frac{1}{2}d^3\cos^2\alpha\sin\alpha\sin\beta$. и) $4a^3\cos^3\frac{\alpha}{2}\sin\alpha$. к) Обозначим искомую сторону основания через x. Выражая через x площадь основания и высоту призмы, можно составить уравнение $V=\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{x^3}{2\sin\frac{\alpha}{2}}\sqrt{1-4\sin^2\frac{\alpha}{2}}$, из которого находится x. л) $\frac{\sqrt{2}S\sqrt{S}\operatorname{tg}\varphi}{2\sqrt{\sin\alpha\sin\beta\sin(\alpha+\beta)}}$. м) $\frac{1}{2}d^3\sin\alpha\sin\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\beta$.

н) $\frac{a^3\sin\alpha}{2\sin\varphi}\sqrt{\sin^2\alpha-2\sin^2\varphi(1-\cos\alpha)}$, см. § 15. о) $\frac{h^3\sqrt{\cos^2\beta-\sin^2\varphi}}{\sin 2\beta\cos\beta\sin\varphi}$.

84. $\frac{l^3\sin^3 2\alpha}{(\sqrt{2}\sin\alpha+2\cos\alpha)^3}$.

85. а) $\frac{1}{2}d_1d_2l$. б) $\frac{2Q\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{\sqrt{2(a^2+b^2)-c^2}}$, где p — полупериметр ΔABD. в) $\frac{a^2l}{\sqrt{2}}$. г) $\frac{5\sqrt{77}}{4}$. д) $\frac{3}{4}ab\sqrt{d^2+ab-a^2-b^2}$. е) См. задачу в § 18.

ж) $\frac{abl}{\sqrt{2}}$. з) $\frac{a^3}{2}$. и) $\frac{a^2\sqrt{12h^2-a^2}}{8}$.

86. а) См. задачу в § 18. б) Так как боковое ребро одинаково наклонено к смежным сторонам основания, то его ортогональная проекция будет находиться на биссектрисе угла между этими сторонами, т. е. на диагонали квадрата. Угол между боковым ребром и плоскостью основания удобно найти по формуле Эйлера. После этого нетрудно найти высоту и затем объем параллелепипеда. в) $\frac{3}{4}a^3\sin\alpha$.

87. а) $\dfrac{a^2 b\sin 2\alpha\sqrt{\cos^2\alpha-\cos^2\beta}}{\cos\alpha}$. б) $2a^3\sin\dfrac{\alpha}{2}\sqrt{\sin\dfrac{3\alpha}{2}\sin\dfrac{\alpha}{2}}$. в) $\dfrac{a^3\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{tg}\beta}{4\sin\alpha}$. г) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}Ql$, см. § 18. д) $\dfrac{a^2\sqrt{4h^2-a^2}}{2}$. е) $a^3\sin\dfrac{\alpha}{2}\sqrt{2\cos\alpha}$.

88. а) Вначале найдите искомый объем, затем представьте его в требуемом виде. б) 1) $\dfrac{104\pi}{3}$; 2) 2π; 3) 81π. в) $V_1 < V_2$.

89. а) $\dfrac{\pi Q^2}{3H}$. б) $\dfrac{\pi l^3\operatorname{ctg}\beta}{8\sin^3\dfrac{\alpha}{2}}$. в) $\dfrac{2\pi Q\cos^2\alpha\sin\alpha}{3\sin\beta}\sqrt{\dfrac{2Q}{\sin\beta}}$.

г) $\dfrac{2}{3}\pi R^3\sin^2\alpha\cos^2\dfrac{\alpha}{2}$. д) $\dfrac{2\pi l^3}{9\sqrt{3}}$. е) $\dfrac{\pi\sqrt{6}a^3}{12(\sqrt{2}-1)}$. ж) $\dfrac{\pi\sqrt{3}l^3}{24}$. з) $\dfrac{3\pi a^3}{(\sqrt{2}+\sqrt{3})^3}$.

90. а) $2\sqrt[3]{\dfrac{3V\sqrt{-\cos\alpha}}{\pi\sqrt{2}\cos\dfrac{\alpha}{2}}}$. г) $\dfrac{\pi m^3\sin\alpha\sin\dfrac{\alpha}{2}}{48\cos^6\dfrac{\alpha}{4}}$, см. § 20. д) $\dfrac{2}{3}\pi R^3\sin^2 2\alpha\sin^2\alpha$.

е) $\alpha = 2\arccos\dfrac{1}{\sqrt[6]{4}}$, см. § 20. ж) 1 : 7. з) $\dfrac{1}{3}\pi\left(1+\operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{2}\right)^3\operatorname{tg}\alpha$.

91. а) $4\sqrt{6}r^3$. б) $\dfrac{4\sqrt{6}R^3}{27}$. в) 2 683 311 м^3. г) $\dfrac{2\sqrt{3}R^3\sin^2 2\alpha\cos^2\alpha}{4}$.

е) $\dfrac{\pi n d^3\sin\dfrac{360^\circ}{n}}{6\sin^2\alpha\cos\alpha}$, см. § 20.

92. а) $\dfrac{\sqrt{3}R^3\operatorname{ctg}\dfrac{\delta}{2}}{4\sqrt{3-\operatorname{ctg}^2\dfrac{\delta}{2}}}$. б) $\dfrac{12H^3}{7}$, см. § 20. в) $\dfrac{4b^3\operatorname{tg}\beta}{3(2+\operatorname{tg}^2\beta)\sqrt{2+\operatorname{tg}^2\beta}}$.

г) $\dfrac{a^3\sqrt{1+2\sqrt{7}}}{12(\sqrt{7}-1)}$. д) $\dfrac{8}{\sqrt[4]{6}}$ см^3. л) $\dfrac{H^3(\operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{ctg}\beta)^2}{3}$, см. § 20. м) $\dfrac{\sqrt{6}}{4}R^3$, см. § 20.

93. а) $\dfrac{\pi Q\sqrt{Q}(3+\operatorname{ctg}^2\alpha)}{12}$. б) $\dfrac{\pi l^3\sin^3\alpha\left(\operatorname{tg}^2\dfrac{\alpha}{2}+\operatorname{ctg}^2\dfrac{\alpha}{2}+1\right)}{12}$. в) $202\dfrac{2}{3}$, см. § 21.

96. з) $\pi\sqrt{2}a(2R-a)$, см. § 22. к) $4\pi V\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}\operatorname{tg}^3\left(45^\circ-\dfrac{\alpha}{4}\right)$, см. § 22.

99. а) $8H^2\operatorname{ctg}\alpha(1+\operatorname{ctg}\alpha)$. б) Вначале найдите диагональ основания, а затем высоту параллелепипеда $H = \dfrac{Q}{d} = \dfrac{Q}{\sqrt{a^2+ab+b^2}}$ и т. д.

в) $b^2 \operatorname{tg}\beta(1+\sin\alpha+\cos\alpha)$. г) Для построения линейного угла между указанными плоскостями проведите перпендикуляры к гипотенузе из концов противолежащего ребра призмы. Найдите периметр основания и высоту призмы. д) $2d\sin\alpha\sqrt{2S+d^2\cos^2\alpha}$. ж) Сделайте отдельно рисунок основания призмы. Обозначив сторону ромба через x, получим $\dfrac{d\cos\beta}{2x}=\cos\dfrac{\alpha}{2} \Rightarrow x=\dfrac{d\cos\beta}{2\cos\dfrac{\alpha}{2}}$. Зная периметр основания и высоту призмы, можно найти площадь: $S=\dfrac{2d^2\cos\beta\sin\beta}{\cos\dfrac{\alpha}{2}}=\dfrac{d^2\sin2\beta}{\cos\dfrac{\alpha}{2}}$. з) Высоту призмы можно найти сразу. Она равна $a\sin\beta$. Как видно, задача является в основном «планиметрической». Выполните выносной рисунок основания призмы. Обозначив боковые стороны и меньшее основание через x, а проекции боковых сторон на большее основание — через y, можно записать (рис. 165):

$$\frac{a\cos\beta}{2x}=\cos\frac{\alpha}{2} \Rightarrow x=\frac{a\cos\beta}{2\cos\frac{\alpha}{2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y=x\cos\alpha=\frac{a\cos\alpha\cos\beta}{2\cos\frac{\alpha}{2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4x+2y=\frac{a\cos\beta(2+\cos\alpha)}{\cos\frac{\alpha}{2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S=\frac{a^2\cos\beta\sin\beta(2+\cos\alpha)}{\cos\frac{\alpha}{2}}=$$

$$=\frac{a^2\sin2\beta(2+\cos\alpha)}{2\cos\frac{\alpha}{2}}.$$

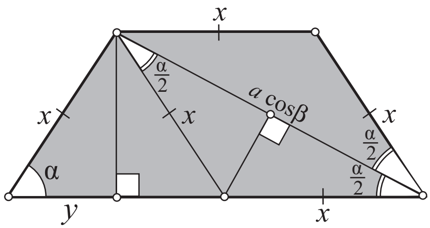


Рис. 165

100. $2\sqrt{P^2+Q^2}$. Выполните параллельный перенос одного из диагональных сечений призмы так, как показано на рисунке 166. Пусть R — удвоенная площадь передней грани призмы. Тогда $P^2+Q^2=R^2$. Поэтому

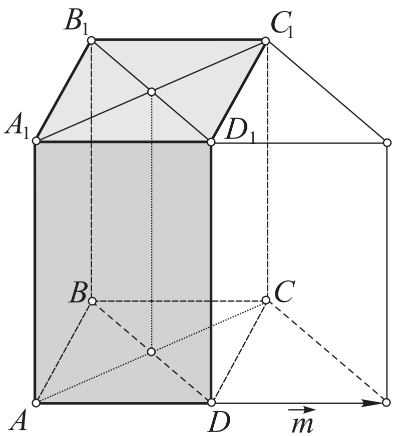


Рис. 166

искомая площадь боковой поверхности параллелепипеда $S = 2R = 2\sqrt{P^2 + Q^2}$.

101. а) $\dfrac{d^3 \sin 2\alpha \operatorname{tg}\beta}{2}$. б) $\dfrac{a^2 h \operatorname{tg}\alpha}{2}$, $a \operatorname{tg}\alpha\left(a + \sqrt{4h^2 + a^2}\right)$.

102. $\dfrac{\left(3\sqrt{3} + 2\right)a^2}{2}$.

103. а) $6Q\sin\alpha$. б) $2H\sqrt{\dfrac{4H^2S^2 + 8Q^2S - 2S^2}{4Q^2 - S^2}}$.

104. $2a^2\left(1 + \sin\dfrac{\alpha}{2}\right)\sqrt{\dfrac{\cos\beta - \cos\alpha}{1 - \cos\beta}}$.

106. а) $6Q$. д) $\dfrac{4p^2 \sin 2\alpha}{(1 + \sin\alpha + \cos\alpha)^2}$, см. § 23.

107. $3R^2(4 - \pi)$.

108. б) $\dfrac{1}{2}\sqrt{4H^2(p^2 + q^2) + p^2q^2}$.

109. г) $12h^2 \sin\gamma$.

110. а) $2S\cos^2\dfrac{\beta}{2}$, см. § 23.

111. б) $\dfrac{\sqrt{7}}{4}a^2$.

112. а) $\dfrac{4H^2}{\operatorname{ctg}\alpha - 1}$. б) $\dfrac{3\sqrt{3}}{\pi}$.

113. а) $\dfrac{a^3 \cos\dfrac{\alpha}{2}}{12\sqrt{3 - 4\cos^2\dfrac{\alpha}{2}}}$, $\dfrac{3a^2}{4\sqrt{3 - 4\cos^2\dfrac{\alpha}{2}}}$.

114. б) $\dfrac{2a^2(2\pi + 3\sqrt{3})}{27}$. Рассмотрите одну боковую грань правильного тетраэдра и выясните, какую фигуру будет представлять ее часть, заключенная внутри шара. Эта фигура ограничена двумя отрезками и дугой окружности. Для нахождения радиуса этой окружности рассмотрите сечение данной комбинации тел плоскостью, проходящей через боковое ребро и высоту данного тетраэдра. Постройте это сечение отдельно. Полезно выполнить также отдельный рисунок, на котором были бы изображены боковая грань тетраэдра и окружность, по которой пересекаются плоскость этой грани и поверхность шара.

116. в) См. § 23. к) $2(a+b)\sqrt{3(a^2-b^2)}$, см. § 23.

119. б) $4\pi R\sqrt{R^2-m^2}$.

120. а) $\dfrac{\pi a^2\sin 2\beta}{2(\cos^2\beta-\sin^2\alpha)}$, см. § 24.

122. б) $\dfrac{3\pi P^2}{16}$. е) $\dfrac{\pi l^2\sin\alpha}{\operatorname{tg}\beta}$. Постройте отдельно осевое сечение конуса. Удобнее находить сразу сумму радиусов оснований, не вычисляя эти радиусы по отдельности.

124. а) $\dfrac{8\pi m^2\cos^2\dfrac{\alpha}{2}}{\sin^2\alpha\cos\alpha}$, см. § 25. в) Введите параметр α — угол наклона образующей конуса к плоскости его основания. Установите, что площадь боковой поверхности конуса выражается следующим образом: $S(\alpha)=4\pi R^2\sin^2\alpha\cos\alpha$. С помощью производной найдите наименьшее значение записанной функции. Оно будет иметь место при $\alpha=\arccos\sqrt{\dfrac{1}{3}}$. В этом случае наибольшее значение площади равно $\dfrac{8\pi\sqrt{3}}{9}R^2$. Можно найти и другие параметры такого конуса: $l=\dfrac{2\sqrt{6}}{3}R, H=\dfrac{4}{3}R$. (Последний из них является особенно удобным, если ставится задача на построение искомого конуса.) д) $2\pi R^2\sin 2\alpha\cos\alpha$, см. § 25.

128. а) $4Q\sin\alpha\operatorname{tg}^2\left(45°-\dfrac{\alpha}{2}\right)$, см. § 26. к) $\dfrac{\pi}{7}(5\sqrt{2}-6)$. л) $R\sqrt{\dfrac{5+\sqrt{5}}{10}}$, $2R\sqrt{\dfrac{5-\sqrt{5}}{10}}$. н) $2\arcsin\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

129. а) См. § 26.

СОДЕРЖАНИЕ

ТЕМА 2. МНОГОГРАННИКИ, ТЕЛА ВРАЩЕНИЯ И ИХ КОМБИНАЦИИ

ТЕМА 3. ОБЪЕМЫ ТЕЛ И ПЛОЩАДИ ПОВЕРХНОСТЕЙ: НАЧАЛА МЕТОДОВ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

Учебное издание

ФАКУЛЬТАТИВНЫЕ ЗАНЯТИЯ

Рогановский Николай Максимович
Рогановская Елена Николаевна
Тавгень Олег Игнатьевич

ГЕОМЕТРИЯ. 11 КЛАСС

Многообразие идей и методов

Пособие для учащихся общеобразовательных учреждений
с белорусским и русским языками обучения

Ответственный за выпуск *Д. Л. Дембовский*

Подписано в печать 29.12.2010. Формат 60×84 1/16. Бумага офсетная.
Печать офсетная. Усл. печ. л. 12,09. Уч.-изд. л. 9,18. Тираж 1100 экз. Заказ

Общество с дополнительной ответственностью «Аверсэв».
ЛИ № 02330/0494066 от 03.02.2009. Контактный телефон (017) 210-18-98.
E-mail: info@aversev.by; www.aversev.by
Ул. М. Богдановича, 129а, 220123, Минск.
Для писем: а/я 135, 220123, Минск.

УПП «Витебская областная типография».
ЛП № 02330/0494165 от 03.04.2009.
Ул. Щербакова-Набережная, 4, 210015, Витебск.