Национальный институт образования

Факультативные занятия

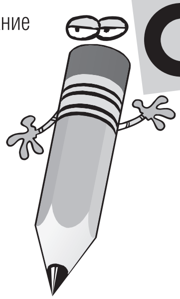
К. О. Ананченко, В. Н. Криштапович

Алгебра учит рассуждать
10 класс

Пособие для учащихся
учреждений общего среднего образования
с белорусским и русским языками обучения

Рекомендовано
Научно-методическим учреждением
«Национальный институт образования»
Министерства образования
Республики Беларусь

2-е издание



Минск • «Аверсэв» • 2012

УДК 51(075.3=161.3=161.1)
ББК 22.1я721
А64

Серия основана в 2010 году

Ананченко, К. О.

А64 Алгебра учит рассуждать. 10 класс : пособие для учащихся учреждений общ. сред. образования с белорус. и рус. яз. обучения / К. О. Ананченко, В. Н. Криштапович. — 2-е изд. — Минск : Аверсэв, 2012. — 157 с. : ил. — (Факультативные занятия).

ISBN 978-985-19-0428-6.

Пособие содержит теоретический материал и практические задания, решение которых предполагает более высокий уровень овладения учебным материалом, чем при изучении основного курса алгебры.

Предназначено учащимся 10 классов для использования на факультативных занятиях в соответствии с учебной программой.

УДК 51(075.3=161.3=161.1)
ББК 22.1я721

ISBN 978-985-19-0428-6

Предисловие

Уважаемые ученики! Вы изучаете факультативный курс математики, который предполагает более высокий уровень овладения учебным материалом, чем на уроках математики в 10 классе. Для вас важно научиться: точно и грамотно формулировать изученные теоретические положения (определения, теоремы, правила и т. д.); правильно пользоваться математической терминологией и символикой; решать стандартные и нестандартные задачи; использовать общие и частные эвристические приемы по поиску решения новых задач; рассуждать и доказывать.

Для достижения данных целей возрастает роль теоретических знаний, становятся весьма значимыми такие их качества, как полнота и глубина, оперативность и гибкость, конкретность и обобщенность, системность и осознанность, прочность.

Важное место в процессе изучения факультативного курса будет занимать *самостоятельная математическая деятельность*. Ее успешность зависит от овладения обобщенными способами самостоятельной учебной деятельности.

Вы должны стремиться к тому, чтобы ваши умения и навыки по выполнению тех или иных алгебраических действий удовлетворяли таким требованиям, как: ***правильность*** (без ошибок и недочетов выполнять все операции, входящие в действие); ***осознанность*** (уметь указывать или формулировать правило, теорему, формулу, в соответствии с которой действуешь); ***автоматизм*** (каждую операцию выполнять быстро, свернуто); ***рациональность*** (выбирать наиболее короткий, «экономный» путь действия); ***обобщенность*** (уметь выполнить действие в различных ситуациях); ***прочность*** (сохранять в течение длительного времени приобретенные умения или навыки).

Процесс решения задач включает следующие взаимно связные этапы: анализ задачи (стандартной или нестандартной); принятие решения относительно способа деятельности, соответствующего этой задаче: а) однозначный способ деятельности; б) выбор более результативного из возможных альтернативных способов; в) конструирование способа деятельности в отношении нестандартной ситуации; исполнение решения; контроль и самоконтроль.

Учебное пособие представлено в модульной программе, которая позволяет приобрести определенный опыт самостоятельной учебной деятельности, самоопределиться и оценить свои возможности овладения учебным материалом.

Рассмотрим основные структурные элементы модульной программы.

Модуль учебной программы. Вся программа состоит из модулей. Их число определяется целями обучения, содержанием и объемом учебного материала. Наименование модулей рассматриваемой программы следующее.

Учебные элементы (УЭ). Каждый модуль разбит на учебные элементы. Их число определяется содержанием, объемом материала учебного модуля и логикой изложения. Так, полный перечень учебных элементов представлен в содержании данного учебного пособия.

В предлагаемой модульной программе каждый учебный элемент включает целевую установку, теоретическую и практическую части.

Цель. Она формулируется для каждого учебного элемента и адресована учащимся.

Теоретическая часть. Она, как правило, содержит учебный материал, с которым вы познакомились на уроке. Поэтому он представлен кратко: или в виде учебного приема, или логических схем, или в виде сущности некоторых теоретических фактов, которые напоминаются посредством примеров.

В этой части модульной программы, как правило, представлено достаточное количество решенных алгебраических задач, которые могут служить примерами оформления решения задач в самостоятельных и контрольных (экзаменационных) работах.

Практическая часть. Здесь посредством системы задач идет углубление и расширение учебного материала, изученного на уроках математики. Она состоит из заданий, направленных на:

- систематизацию и обобщение знаний;
- выработку алгебраических умений и навыков, удовлетворяющих таким требованиям, как правильность, осознанность, рациональность, автоматизм, обобщенность и прочность;
- формирование интеллектуальных умений;
- коррекцию усвоенных знаний, способов деятельности, контроль за их усвоением.

Каждый модуль завершается рубрикой «Математическая мозаика». В ней вы найдете исторические сведения, интересные факты, связанные с математикой, софизмы, шутки.

Технология модульного обучения позволяет кардинально поменять вашу роль и роль учителя в учебном процессе. Вы учитесь самостоятельно (или с определенной дозой помощи), а учитель организует, координирует, консультирует, контролирует вашу учебную деятельность.

В каждом учебном элементе вы встретитесь с рубрикой «Ваш помощник». В ней имеются ответы к некоторым заданиям, краткие указания или полное решение (в случае, если они отсутствуют, учитесь самоконтролю; обращайтесь за помощью к товарищу, за консультацией к учителю).

Идея производной возникает из более или менее ясного представления о некоторой скорости, с которой всякое явление совершается.

Э. Пикар

Модуль 1 ПРОИЗВОДНАЯ И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

УЭ-1. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ПО ТЕМЕ «ПОНЯТИЕ ПРОИЗВОДНОЙ. ПРАВИЛА НАХОЖДЕНИЯ ПРОИЗВОДНЫХ»

Цель: актуализировать основные знания, умения и навыки, полученные на уроках математики.

Теоретическая часть

Понятие производной. Пусть функция $y = f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0.

Производной функции $y = f(x)$ **в точке** x_0 называется предел отношения приращения функции в этой точке к соответствующему приращению аргумента, когда последнее произвольным образом стремится к нулю.

Обозначается производная функции в точке как $f'(x_0)$ или $y'(x_0)$. Соответственно читается: «f штрих от x_0», «y штрих от x_0».

По определению:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}.$$

Функция, имеющая производную в точке x_0, называется дифференцируемой в этой точке.

Процесс нахождения производной функции называется *дифференцированием.*

Для нахождения производной, исходя из ее определения, надо:

1. Найти значения $y = f(x)$ в точках $(x_0 + \Delta x)$ и x_0, т. е.

$$f(x_0 + \Delta x),\ f(x_0).$$

2. Определить соответствующее приращение функции:

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0).$$

3. Составить отношение приращения функции к приращению аргумента:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

4. Вычислить предел этого отношения при $\Delta x \to 0$:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0).$$

Пример. Дана линейная функция $f(x) = kx + b$. Исходя из определения производной, найти $f'(x)$.

Решение. Для значений аргумента x и $x + \Delta x$ имеем соответственно:

$$f(x) = kx + b \text{ и } f(x + \Delta x) = k(x + \Delta x) + b.$$

Находим приращение функции в точке x:

$$\Delta f(x) = k(x + \Delta x) + b - (kx + b) = k\Delta x.$$

Составляем отношение:

$$\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{k\Delta x}{\Delta x} = k,\ \ \Delta x \neq 0.$$

Переходя к пределу при $\Delta x \to 0$, находим производную функции в точке x:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} k = k.$$

Ответ: $(kx + b)' = k$.

Производные некоторых элементарных функций. Вам известно, что имеют место следующие формулы дифференцирования:

$$c' = 0;\ (ax^2)' = 2ax;\ \left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2};\ (ax + b)' = a;\ (x^3)' = 3x^2;$$
$$(ax^2 + bx + c)' = 2ax + b.$$

Рассмотрим **правила дифференцирования**.

$$(cf)' = cf'; (f+g)' = f'+g'; (fg)' = f'g + fg'; \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}.$$

Практическая часть

Задание 1. Пользуясь определением, найдите производную функции в заданной точке:

а) $f(x) = \frac{4}{x}$, $x_0 = 2$; б) $f(t) = 3t^2 + t + 2$, $t_0 = -1$.

Задание 2. Докажите, что функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке x_0, если:

а) $f(x) = \sqrt{2x+1}$, $x_0 = 0$; б) $f(x) = \sin 2x$, $x_0 = 0$.

Задание 3. Для функции $y = f(x)$, $x \in D(f)$, найдите функцию $y' = f'(x)$ и укажите ее область определения:

а) $f(x) = ax^2 + bx + c, x \in \boldsymbol{R}$;

б) $f(x) = \frac{1}{3x+2}$, $x \neq -\frac{2}{3}$.

Задание 4. Найдите $f'(2)$, $g'(1)$, $\varphi'(-2)$, если:

а) $f(x) = 3x^2 - 5x + 6$;

б) $g(x) = (x^2 + 2x + 5)(x^2 + 2x + 7)$;

в) $f(x) = \frac{x}{x+1}$.

Задание 5. Найдите производную функции:

а) $y = 10 - 3x + \frac{x^2}{3}$;

б) $y = \frac{5}{x} - 5x + 2$;

в) $y = (4x+5)(2x^2 + 5x + 6)$;

г) $y = \frac{2x-1}{x+5}$.

Ваш помощник

К заданию 1. а) -1; б) -5.

К заданию 3. а) $f'(x) = 2ax + b$; $D(f') = \boldsymbol{R}$;

б) $f'(x) = -\dfrac{3}{(3x+2)^2}$, $D\big(f'(x)\big) = \left(-\infty; -\dfrac{2}{3}\right) \cup \left(-\dfrac{2}{3}; +\infty\right)$.

К заданию 4. а) 7; б) 72; в) 1.

К заданию 5. б) $-\dfrac{5}{x^2} - 5$; в) $24x^2 + 60x + 49$; г) $\dfrac{11}{(x+5)^2}$.

УЭ-2. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СМЫСЛ ПРОИЗВОДНОЙ

Цель: приобрести интуитивное и строгое понимание смысла понятия касательной к кривой, хорошо усвоить геометрический смысл производной; научиться решать разнообразные задачи на геометрический смысл производной.

Теоретическая часть

Напомним определение касательной.

Касательной к графику функции $y = f(x)$ **в точке** $M_0\big(x_0; f(x_0)\big)$ называется прямая, представляющая предельное положение секущей M_0M, если оно существует, когда точка $M\big(x; f(x)\big)$ стремится к точке M_0 (рис. 1).

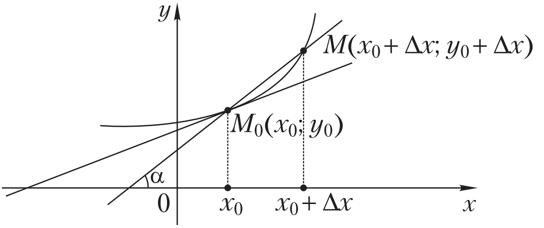


Рис. 1

Геометрический смысл производной заключается в следующем: *значение производной в точке x_0 равно тангенсу угла между касательной к графику данной функции в его точке $M_0(x_0, y_0)$ и положи-*

тельным направлением оси Ox и равно угловому коэффициенту этой касательной:

$$f'(x_0) = \operatorname{tg}\varphi = k.$$

Уравнение касательной к графику функции в точке с абсциссой x_0**.** Уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке x_0 обычно записывают так:

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0).$$

Чтобы записать уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой x_0, надо:

1) вычислить $f(x_0)$;
2) найти производную $f'(x)$;
3) вычислить $f'(x_0)$ — угловой коэффициент касательной;
4) записать уравнение касательной в виде

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0);$$

5) привести уравнение касательной к виду $y = kx + b$.

Пример. Записать уравнение касательной к графику функции $y = x^3 - x^2$ в точке $x_0 = -1$.

Решение. 1) Вычислим: $f(x_0) = -1 - 1 = -2$;
2) найдем производную от данной функции:

$$y'(x) = 3x^2 - 2x;$$

3) вычислим значение производной в точке $x_0 = -1$:

$$y'(-1) = 3(-1)^2 - 2(-1) = 5;$$

4) запишем уравнение касательной:

$$y = 5(x + 1) + (-2),$$

т. е. $y = 5x + 3$.

Ответ: уравнение касательной $y = 5x + 3$ в точке $x_0 = -1$.

Угол между графиками функций. Заметим, что углом между двумя пересекающимися прямыми называют наименьший угол, возникающий при пересечении этих прямых. Угол между параллельными прямыми считается равным нулю.

Углом между графиками функций $y = f(x)$ **и** $y = g(x)$ в точке их пересечения называется угол между касательными к их графикам в этой точке.

Практическая часть

Задание 1. Найдите тангенс угла наклона к оси абсцисс касательной, проходящей через данную точку A графика функции f:

а) $f(x) = x^3$, $A(1; 1)$; б) $f(x) = x^2 + 2x$, $A(1; 3)$.

Задание 2. Составьте уравнения касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой x_0:

а) $f(x) = 3x^2 - 2x + 1$, $x_0 = \frac{1}{2}$;

б) $f(x) = \frac{1}{3x+2}$, $x_0 = -1$;

в) $f(x) = 2x^2 - 5x + 1$, $x_0 = 2$;

г) $f(x) = \frac{3}{2x-1}$, $x_0 = 2$.

Задание 3. Напишите уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке пересечения его с осью ординат:

а) $y = x^2 - 4x + 1$; б) $y = \frac{5x-12}{x+2}$.

Задание 4. Напишите уравнение касательной к графику функции $y = h(x)$ в точке пересечения его с осью абсцисс:

а) $h(x) = x^2 - 5x + 6$; б) $h(x) = \frac{x+2}{x-2}$.

Задание 5. В каких точках касательная к графику функции $y = f(x)$ параллельна оси Ox:

а) $y = \frac{9x^2 - x + 1}{x}$; б) $y = \frac{4x^2 - 3x + 1}{x}$?

Задание 6. Напишите уравнение касательной к графику функции $f(x) = x^2 - 6$, перпендикулярной оси Oy.

Задание 7. В каких точках касательная к графику функции $y = \frac{x+8}{x-8}$ образует угол 135° с осью Ox?

Задание 8. В каких точках угловой коэффициент касательной к графику функции $y = \dfrac{2x-1}{2x+5}$ равен 3?

Задание 9. а) Составьте уравнение касательной к графику функции $y = 2x^2 - 7x + 1$, параллельной прямой, проходящей через точки $A(1; 2)$ и $B(-5; 3)$.

б) Составьте уравнение касательной к графику функции $y = 3x^2 - 5x + 4$, параллельной прямой, проходящей через точки $A(-2; -5)$ и $B(1; -1)$.

Ваш помощник

К заданию 1. а) Тангенс угла наклона к оси абсцисс требуемой касательной равен 3; б) 4.

К заданию 2. а) $4x - 4y = 1$; б) $y = x$.

К заданию 3. а) $y = -4x + 1$.

К заданию 7. $A_1(0; -1)$ или $A_2(4; 3)$; $y = -x - 1$ или $y = -x + 7$.

УЭ-3. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ПО ТЕМЕ «МЕХАНИЧЕСКИЙ СМЫСЛ ПРОИЗВОДНОЙ»

Цель: углубить понимание механического смысла производной.

Теоретическая часть

Механический смысл производной функции в точке. Пусть функция f описывает закон прямолинейного движения материальной точки, т. е. $x = f(t)$. Здесь x — координата, t — время. Тогда из определения мгновенной скорости в момент времени t и определения производной функции в точке непосредственно следует, что если функция $x = f(t)$ описывает зависимость координаты материальной точки от времени, то ее производная в момент времени t_0 есть мгновенная скорость в этот момент времени, т. е.

$$v(t_0) = f'(t_0).$$

При движении точки в одном направлении всегда можно выбрать систему отсчета, в которой значение координаты x совпадает с длиной пути s, пройденного к данному моменту времени. В этом случае закон движения записывают в виде $s = f(t)$ и можно сказать: мгновенная скорость точки при ее прямолинейном движении есть производная пути по времени, т. е.

$$v = s'(t).$$

Применяя термины механики, отметим, что для любой дифференцируемой функции производная ее характеризует скорость изменения функции.

Практическая часть

Задание 1. Тело движется прямолинейно по закону $x(t) = 3t^2 + 2t + 1$, где $x(t)$ измеряется в метрах, время t — в секундах. Найдите скорость движения тела в момент времени $t = 4$ с.

Задание 2. Для машины, движущейся со скоростью 30 м/с, тормозной путь определяется по формуле $s(t) = 30t - 16t^2$, где $s(t)$ — путь в метрах, t — время торможения в секундах. В течение какого времени осуществляется торможение до полной остановки машины? Сколько метров будет двигаться машина с начала торможения до полной остановки?

Задание 3. Найдите величину и направление скорости движения материальной точки в начальный момент времени $t_0 = 0$, если она движется по закону:

а) $x(t) = t + \frac{27}{t+3}$ (м); б) $x(t) = -2t - \frac{4}{2t+1}$ (м).

В какой момент времени мгновенная скорость будет равной нулю?

Задание 4. а) Тело движется по закону $x(t) = t(t+1)$ (x — в метрах, t — в секундах). В какой момент времени скорость тела численно равна пути, пройденному телом к этому моменту времени?

б) Тело движется по закону $x(t) = \frac{t^2}{2} + 3t + 1$ (x — в метрах, t — в секундах). В какой момент времени скорость тела численно равна пути, пройденному телом к этому моменту времени?

Задание 5. Тело движется прямолинейно $x(t)$, где x и t измеряются соответственно в метрах и секундах. Найдите скорость тела в момент времени t_0:

а) $x(t) = t^2 + 5t + 12,\ t_0 = 3;$

б) $x(t) = \frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{2}t^2 + 3t - 1,\ t_0 = 1;$

в) $x(t) = \frac{t^2 - 3t - 2}{t - 3},\ t_0 = 4.$

Ваш помощник

К заданию 1. 26 м/с.
К заданию 2. ≈ 14 м.

УЭ-4. ЧЕТНОСТЬ И НЕЧЕТНОСТЬ ФУНКЦИЙ

Цель: знать определения четной и нечетной функций и уметь проводить примеры таких функций; понимать, что наряду с четными и нечетными функциями есть функции, не являющиеся ни теми, ни другими; уметь приводить примеры таких функций; знать, что есть функции, которые являются четными и нечетными одновременно; понимать геометрический смысл четной и нечетной функции; рационально строить графики функций, которые обладают свойством четности или нечетности; уметь исследовать функцию на четность и нечетность.

Теоретическая часть

Понятие четной и нечетной функции. Напомним основные определения понятий.

Числовое множество X называют **симметричным** относительно нуля, если из того, что $x \in X$, следует, что и $-x \in X$.

Функция $y = f(x)$ называется **четной**, если:

1) область определения функции симметрична относительно нуля;

2) для любого x из области определения справедливо равенство

$$f(-x) = f(x).$$

Функция $y = f(x)$ называется **нечетной**, если:

1) область определения функции симметрична относительно нуля;

2) для любого x из области определения справедливо равенство

$$f(-x) = -f(x).$$

Имеются функции, которые являются четными и нечетными одновременно, например: $y = 0, D(y) = \boldsymbol{R}$, $y = 0, D(y) = (-2;\ 2)$ и т. д.

Исследование функции на свойство четности или нечетности.

- Проверяем симметричность области определения функции $y = f(x)$ относительно нуля.
- Если область определения не симметрична относительно нуля, то функция не является ни четной, ни нечетной.
- Если же область определения функции симметрична относительно нуля, то переходим к проверке верности равенств

$$f(-x) = f(x), \qquad (1)$$

$$f(-x) = -f(x) \qquad (2)$$

для всех $x \in D(f)$.

Если равенство (1) выполняется, то функция четная; если выполняется равенство (2), то нечетная.

Если существует такое значение аргумента, при которых ни одно из равенств (1) и (2) не выполняется, то функция не является ни четной, ни нечетной.

Если выполняются оба равенства (1) и (2), то функция является четной и нечетной одновременно.

Пример 1. Исследовать на четность или нечетность функцию $y = \dfrac{7x-4}{5x-2}$.

Решение. Область определения данной функции

$$D(y) = (-\infty;\ 0{,}4) \cup (0{,}4;\ +\infty)$$

не симметрична относительно нуля, следовательно, данная функция свойством четности и нечетности не обладает.

Пример 2. Доказать, что функция $y = \dfrac{5x^2}{|x|}$ четная.

Доказательство. Область определения функции

$$D(y) = (-\infty;\ 0) \cup (0;\ +\infty)$$

симметрична относительно нуля. Проверим выполнимость равенства $y(-x) = y(x)$:

$$y(-x) = \frac{5(-x)^2}{|-x|} = \frac{5x^2}{|x|}, \text{ т. е. } y(-x) = y(x).$$

Так как область определения данной функции симметрична относительно нуля и $y(-x) = y(x)$ для любого аргумента x, то данная функция является четной.

Графики четных и нечетных функций. Важно знать и хорошо усвоить следующие два положения:

- график функции симметричен относительно оси ординат тогда и только тогда, когда данная функция является четной;
- график функции симметричен относительно начала координат тогда и только тогда, когда данная функция является нечетной.

Как вы понимаете словосочетание «тогда и только тогда»? Если у вас возникли трудности, то обратитесь за консультацией к учителю или к логическому словарю.

Чтобы построить график четной (нечетной) функции, достаточно:

1) построить ту часть графика, которая расположена в правой полуплоскости;

2) отобразить ее симметрично относительно оси ординат — в случае четной функции либо относительно начала координат — в случае нечетной функции.

Использование свойств четности и нечетности функций при решении уравнений и неравенств. Процесс решения уравнений и неравенств значительно облегчается, если использовать свойство четности (нечетности) функций, входящих в них. При этом мы опираемся на следующие утверждения.

1. Если функция $f(x)$ — четная или нечетная, то корни уравнения $f(x) = 0$ (если они существуют) расположены на координатной прямой симметрично относительно точки 0, т. е. если число x_0 — корень уравнения $f(x) = 0$, то число $-x_0$ — также корень этого уравнения.

2. Если функция $f(x)$ — четная, то уравнение $f(x) = 0$ имеет единственное решение только лишь в точке $x_0 = 0$.

Заметим, что это является необходимым условием существования единственного корня данного уравнения.

3. Пусть функция $f(x)$ на интервале $(0; +\infty)$ принимает положительные значения, тогда на интервале $(-\infty; 0)$ функция принимает:

а) положительные значения, если функция $f(x)$ — четная;

б) отрицательные значения, если функция $f(x)$ — нечетная.

Пример 3. Решить уравнение

$$x^2 - 5|x| + 6 = 0.$$

Решение. Пусть $x \geq 0$, тогда имеем $x^2 - 5x + 6 = 0$, откуда $x_1 = 2$, $x_2 = 3$. Поскольку функция $f(x) = x^2 - 5|x| + 6$ является четной, то данное уравнение имеет корни: $x_3 = -2$, $x_4 = -3$.

Ответ: $-3, -2, 2, 3$.

Итак, если функция $f(x)$ — четная, то при решении уравнения $f(x) = 0$ или неравенства $f(x) > 0$ достаточно найти только множество неотрицательных решений, а затем к полученному множеству решений присоединить числовое множество, симметричное найденному относительно нуля на координатной прямой.

Практическая часть

Задание 1. Четной или нечетной является функция:

а) $y = \dfrac{3}{x^2}$;

б) $y = x|x|$;

в) $y = |x| - 1$;

г) $y = \dfrac{1}{1 - |x|}$?

Задание 2. Четной или нечетной является функция:

а) $f(x) = \dfrac{1}{x^2 + 3|x| - 4}$;

б) $f(x) = \dfrac{1}{3x^2 - 5|x| + 2}$;

в) $f(x) = x^2 - |x - 2|$;

г) $f(x) = x^2 + |x - 1|$?

Задание 3. а) Докажите, что функция, заданная формулой $y = |x - 1| - |x + 1|$, нечетная, и постройте ее график.

б) Докажите, что функция, заданная формулой $y = |x + 2| + |x - 2|$, четная, и постройте ее график.

Задание 4. Верно ли высказывание:

а) если график нечетной функции пересекает ось ординат, то точки пересечения совпадают с началом координат;

б) существуют ли функции, которые одновременно обладают свойством четности и нечетности?

Задание 5. Исследуйте на четность — нечетность функцию:

а) $f(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5}$;

б) $f(x) = \frac{|x-3|}{x+1} - \frac{|x+3|}{x-1}$;

в) $f(x) = (x+2)|x-1| + (x-2)|x+1|$;

г) $f(x) = \sqrt{1+x+x^2} - \sqrt{1-x+x^2}$;

д) $f(x) = \frac{|x-5|(x+6)}{2x-1} - \frac{|x+5|(x-6)}{2x+1}$.

Задание 6. а) Может ли график нечетной функции пересекать ось Oy в точке, отличной от начала координат?

б) Может ли одна и та же функция на одном промежутке быть четной, а на другом — нечетной?

Задание 7. Решите уравнение, используя четность функции:

а) $x^2 - 7|x| + 12 = 0$;

б) $x^2 - 2|x| + 1 = 0$;

в) $|x^2 - 4|(x^2 + 2|x| - 3) = 0$;

г) $\left|x^2 - |x|\right| = \frac{1}{4}$;

д) $\left|\frac{2+3|x|}{|x|-1}\right| = 3$;

е) $\frac{2}{|x|+1} = 2 - |x|$.

В уравнениях замените знак «=» на знак «<» («>») и решите неравенство.

Задание 8. Известно, что уравнение $f(x) = 0$, где f — четная функция, имеет ровно 7 корней. Докажите, что среди корней есть число 0.

Задание 9. Известно, что h — нечетная функция, область определения которой — множество всех действительных чисел. Докажите, что уравнение $h(x) = 0$ имеет корень, равный нулю.

Задание 10. Функции $f(x)$ и $g(x)$ определены на множестве X, симметричном относительно нуля, и тождественно не равны нулю. Является четной или нечетной функция:

а) $f(x) + g(x)$, если $f(x)$ и $g(x)$ — четные (нечетные) функции;

б) $f(x) - g(x)$, если $f(x)$ и $g(x)$ — четные (нечетные) функции;

в) $f(x) \cdot g(x)$, если $f(x)$ и $g(x)$ — нечетные функции;

г) $f(x) \cdot g(x)$, если $f(x)$ и $g(x)$ — четные функции;

д) $f(x) \cdot g(x)$, если $f(x)$ — четная функция, а $g(x)$ — нечетная функция?

Задание 11. Можно ли любую функцию, определенную на числовом множестве X, симметричном относительно нуля, представить в виде суммы двух функций, каждая из которых определена на том же множестве X и одна из которых — четная, а другая — нечетная?

Задание 12. Запишите в виде суммы четной и нечетной функций функции:

а) $f(x) = 2x^2 - 3x + 1$, $D(f) = \boldsymbol{R}$;

б) $f(x) = 2x^3 + x$, $D(f) = \boldsymbol{R}$;

в) $f(x) = \dfrac{1}{x} + 1$, $D(f) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$;

г) $f(x) = |x - 3|$, $D(f) = \boldsymbol{R}$;

д) $f(x) = \dfrac{1}{x^2 + x}$, $D(f) = (-\infty; -1) \cup (-1; 1) \cup (1; +\infty)$.

Задание 13. Найдите все значения параметра a, при котором уравнение

$$x^6 + 4x^4 + 7x^2 + a^2 - 4 = 0$$

имеет ровно один действительный корень.

УЭ-5. ЗАДАЧИ НА НАХОЖДЕНИЕ ПРОМЕЖУТКОВ МОНОТОННОСТИ ФУНКЦИЙ

Цель: проверка, корректировка и самооценка сформированности действий по исследованию функции на монотонность.

Теоретическая часть

Понятие монотонной функции. Напомним определение монотонной функции.

Функция $y = f(x)$ называется **монотонной** на интервале $(a; b)$, если для любых x_1, x_2, принадлежащих $(a; b)$, выполняется одно из условий:

а) из неравенства $x_1 < x_2$ следует $f(x_1) < f(x_2)$, т. е. $y = f(x)$ — возрастающая;

б) из неравенства $x_1 < x_2$ следует $f(x_1) > f(x_2)$, т. е. $y = f(x)$ — убывающая;

в) из неравенства $x_1 < x_2$ следует $f(x_1) \leq f(x_2)$, т. е. $y = f(x)$ — неубывающая;

г) из неравенства $x_1 < x_2$ следует $f(x_1) \geq f(x_2)$, т. е. $y = f(x)$ — невозрастающая.

Схема исследования функций на монотонность. Чтобы найти промежутки возрастания (убывания) функции $y = f(x)$, надо:

1) найти область определения данной функции;

2) найти производную $f'(x)$;

3) найти точки, в которых производная обращается в нуль;

4) на координатной прямой отметить область определения функции и нулями производной (если они существуют) разбить на промежутки;

5) определить знак производной на каждом из промежутков;

6) записать ответ.

Пример. Найти промежутки возрастания и убывания функции, заданной формулой $f(x) = x + \frac{1}{x}$.

Решение. Область определения данной функции есть объединение промежутков $(-\infty; 0)$ и $(0; +\infty)$. Она дифференцируема в каждом из промежутков $(-\infty; 0)$ и $(0; +\infty)$, и

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2 - 1}{x^2} = \frac{(x+1)(x-1)}{x^2}.$$

Найдем нули производной: $x_1 = -1, x_2 = 1.$

На числовой прямой отметим область определения функции, нули производной и определим знак производной в каждом из полученных промежутков (рис. 2).

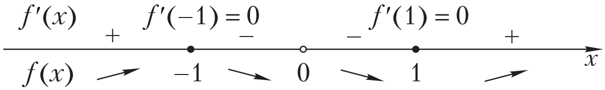


Рис. 2

Ответ: функция возрастает на промежутках $(-\infty; -1]$ и $[1; +\infty)$, а убывает на промежутках $[-1; 0)$ и $(0; 1]$.

Практическая часть

Задание 1. Приведите пример: а) возрастающей функции; б) убывающей функции. Докажите, что эта функция обладает указанным свойством.

Задание 2. Найдите промежутки возрастания и убывания функции:

а) $y = 2x^2 - 8x;$

б) $y = -x^3 + 2x^2;$

в) $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 1{,}5;$

г) $y = 3x^2 - 9x;$

д) $y = x^3 - \frac{x^2}{2};$

е) $y = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 7.$

Задание 3. В зависимости от параметров a $(a \neq 0)$, b и c определите промежутки возрастания и убывания функции:

а) $y = ax + b;$ б) $y = ax^3;$ в) $y = ax^2 + bx + c.$

Задание 4. Докажите, что функция монотонна на указанном множестве:

а) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{5}{2}x^2 + 7x + 4, x \in \boldsymbol{R};$

б) $f(x) = 1 + 12x + 3x^2 - 2x^3,\ x \in (-1; 1).$

Задание 5. Найдите промежутки монотонности функции:

а) $g(x) = x^3 - 2x|x-2|,\ x \in [0; 3];$

б) $g(x) = -5x^3 + x|x-1|,\ x \in [0; 2].$

Задание 6. Докажите, что:

а) при $x \geq 1$ функция $y = x + \dfrac{1}{x}$ возрастает;

б) при $x \geq 1$ функция $y = \dfrac{x+1}{x^2+1}$ убывает.

Задание 7. Найдите промежутки возрастания и убывания функции:

а) $f(x) = \dfrac{x}{3} - x;$

б) $g(x) = \dfrac{x^2}{x^2-1};$

в) $g(x) = \dfrac{(x-2)(1-x)}{x^2};$

г) $g(x) = \dfrac{1-x}{1-2x}.$

Задание 8. а) При каких значениях параметра a функция $y = 6ax - 2x^3$ возрастает на всей числовой прямой?

б) При каких значениях параметра b функция $y = 10bx - 2x^5$ убывает на всей числовой прямой?

Задание 9. При каких значениях параметра a функция возрастает на всей числовой прямой:

а) $f(x) = x^3 - ax^2 + 3ax + 5;$

б) $f(x) = x^3 + ax^2 - 2ax + 7;$

в) $f(x) = (a-12)x^3 + 3(a-12)x^3 + 6x + 1?$

Задание 10. При каких действительных значениях параметра a функция:

а) $g(x) = x^3 - ax^3 + 3(a-1)x + 8$ возрастает на промежутке $[4; +\infty);$

б) $g(x) = -x^3 + ax^2 + a^2x + 2{,}5$ возрастает на промежутке $[-6; 2]?$

УЭ-6. ЗАДАЧИ НА НАХОЖДЕНИЕ МАКСИМУМОВ И МИНИМУМОВ ФУНКЦИИ

Цель: проверить, откорректировать и самооценить сформированность действий по нахождению максимумов и минимумов функции.

Теоретическая часть

Существенную роль при исследовании функции играют критические точки.

Внутренние точки области определения, в которых производная не существует или равна нулю, называют **критическими точками**.

Пусть на промежутке $(a; b)$ задана непрерывная функция $y = f(x)$.

Точка x_0 из области определения функции называется **точкой максимума** этой функции, если существует такая δ-окрестность точки x_0, что для всех $x \neq x_0$ из этой окрестности выполняется неравенство $f(x) < f(x_0)$.

Точка x_0 из области определения функции называется **точкой минимума** этой функции, если существует такая δ-окрестность точки x_0, что для всех $x \neq x_0$ из этой окрестности выполняется неравенство $f(x) > f(x_0)$.

На рисунке 3, *а* x_0 — точка максимума, а на рисунке 3, *б* x_0 — точка минимума.

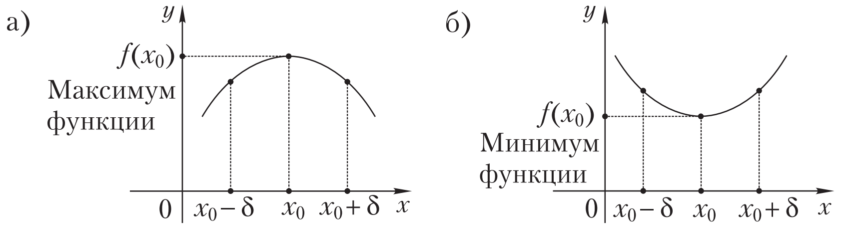


Рис. 3

Точки максимума и минимума функции называют **точками экстремума**, а значения функции в этих точках — **экстремумами функции**.

Максимум $f(x_0)$ будем обозначать так: $y_{\max} = f(x_0)$, а минимум — $y_{\min} = f(x_0)$.

Тот факт, что точка $x = x_0$ является точкой экстремума непрерывной функции, можно охарактеризовать таблицей:

Знак производной		Вывод
$x < x_0$	$x > x_0$	x_0
+	+	Не является точкой экстремума
+	–	Точка максимума
–	+	Точка минимума
–	–	Не является точкой экстремума

Задание. Приведите графическую иллюстрацию для каждого из приведенных в таблице случаев.

Для исследования функции $y = f(x)$ на экстремум, опираясь на достаточное условие, надо:

1) найти область определения функции $D(f)$;

2) найти производную $f'(x)$;

3) найти критические точки (т. е. внутренние точки области определения функции, в которых производная равна нулю или не существует);

4) разбить область определения этими точками на промежутки и определить знак производной на каждом из них;

5) определить относительно каждой критической точки, является она точкой максимума или минимума или не является точкой экстремума;

6) вычислить значения функции в точках экстремума, если они существуют;

7) записать ответ.

Пример. Исследовать на экстремумы функцию $f(x) = x^3 - 3x^2$.

Решение. $D(f) = \boldsymbol{R}$. $f'(x) = 3x^2 - 6x$.

$$f'(x) = 0: 3x^2 - 6x = 0, \text{ откуда } x = 0 \text{ или } x = 2.$$

В данном случае производная существует при всех значениях аргумента функции, значит, кроме $x = 0$ и $x = 2$ других критических точек нет.

Разобьем область определения функции этими точками на промежутки и определим знак производной на каждом из них:

	$(-\infty; 0)$	0	$(0; 2)$	2	$(2; +\infty)$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$		max		min	

Функция $f(x)$ непрерывна в точке $x = 0$, и при переходе через эту точку слева направо производная меняет знак с плюса на минус, значит, $x = 0$ — точка максимума и $f_{\max}(0) = 0$.

Функция $f(x)$ непрерывна в точке $x = 2$, и при переходе через эту точку слева направо производная меняет знак с минуса на плюс, значит, $x = 2$ — точка минимума и $f_{\min}(2) = -4$.

Ответ: в точке $x = 0$ имеем максимум $f_{\max}(0) = 0$, а в точке $x = 2$ имеем минимум $f_{\min}(2) = -4$.

Практическая часть

Задание 1. Найдите критические точки и исследуйте на экстремум функцию:

а) $v(x) = 2x^3 - x^2 - 4x + 5$; б) $l(x) = 3x - \dfrac{27}{2 - x}$.

Задание 2. Найдите критические точки функции:

а) $y = |x + 1|x + 1$; б) $y = |x - 3| - |x + 3|$.

Задание 3. Найдите промежутки монотонности и экстремумы функции:

а) $y = 12{,}5 + 8x - x^4$; б) $y = 2{,}9 + 12x - x^3$.

Задание 4. Определите интервалы монотонности функции $f(x) = \dfrac{3 - x^2}{x + 2}$ и найдите ее экстремумы.

Задание 5. Найдите все значения a, для которых уравнение $x^3 - ax - 1 = 0$ имеет единственное решение.

Задание 6. Сколько критических точек на отрезке $[-a; a]$ $(a > 0)$ имеет функция:

а) $y = -\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 2x + 1$; б) $y = \frac{-x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 2x - 1{,}5$?

Задание 7. При каких положительных значениях параметра a точка $x = 3$ является точкой минимума функции $f(x) = 2x^3 - 6a^2x + 3$?

Задание 8. При каких действительных значениях a и b все экстремумы функции $f(x) = \frac{5a^2}{3}x^3 + 2ax - 9x + b$ положительны и максимум находится в точке $x_0 = -\frac{5}{9}$?

Ваш помощник

К заданию 4. $(-\infty; -3]$ и $[-1; +\infty)$ — функция убывает; $[-3; -2)$ и $(-2; -1]$ — возрастает; точка -3 — точка минимума; точка -1 — точка максимума.

УЭ-7. ЗАДАЧИ НА НАХОЖДЕНИЕ НАИБОЛЬШЕГО И НАИМЕНЬШЕГО ЗНАЧЕНИЙ ФУНКЦИИ

Цель: углубить знания, умения и навыки, полученные на уроках математики.

Теоретическая часть

Способы нахождения наибольшего и наименьшего значений функции на промежутке. Многие задачи на отыскание наибольшего и наименьшего значений функции сводятся к исследованию непрерывных функций на различных промежутках: отрезке, интервале, прямой и т. д.

Если функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$, то, как гарантирует одна из теорем о непрерывной функции на отрезке, она достигает на $[a; b]$ наибольшего или наименьшего значения.

Чтобы найти наибольшее и наименьшее значения непрерывной функции $y = f(x)$ на отрезке $[a; b]$, надо:

1) найти производную данной функции;

2) найти критические точки;

3) вычислить значения функции на концах отрезка $\big($т. е. $f(a)$, $f(b)\big)$ и в критических точках, принадлежащих интервалу $(a; b)$;

4) из всех найденных значений функции выбрать наибольшее и наименьшее;

5) записать ответ.

Пример 1. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $f(x) = 2x^3 - 6x + 1$ на отрезке $[-3; 0]$.

Решение. Вычислим значение функции в критических точках, принадлежащих интервалу $(-3; 0)$, а также на концах отрезка, а затем выберем наибольшее и наименьшее из них.

Поскольку функция $f(x) = 2x^3 - 6x + 1$ дифференцируема на всей числовой прямой, то критические точки данной функции найдем, решая уравнение $f'(x) = 0$, т. е. уравнение $6x^2 - 6 = 0$. Корни этого уравнения: $x_1 = -1$, $x_2 = 1$. Из них только $x_1 = -1$ принадлежит интервалу $(-3; 0)$. Вычислим теперь значения функции в точках $x = -1$, $x = -3$, $x = 0$:

$$f(-1) = 5, \ f(-3) = -35, \ f(0) = 1.$$

Ответ: $\max\limits_{[-3;\ 0]} f(x) = 5$, $\min\limits_{[-3;\ 0]} f(x) = -35$.

Примеры решения практических задач. К нахождению наибольшего и наименьшего значений функции приводит решение многих практических задач. Они решаются, как правило, по следующему плану:

1) выбирают одну из переменных и выражают через нее ту переменную, для которой находится наибольшее (наименьшее) значение, т. е. составляют функцию, например $y = f(x)$;

2) указывают промежуток изменения аргумента;

3) исследуют данную функцию на наибольшее (наименьшее) значение на указанном промежутке.

Пример 2. Нужно построить прямоугольную площадку возле каменной стены так, чтобы с трех сторон она была огорожена проволочной сеткой, а с четвертой — примыкала к стене. Для этого имеется сетка длиной 40 м. При каких размерах площадка будет иметь наибольшую площадь?

Решение. Обозначим стороны площадки через x и y. Тогда площадь площадки $S = xy$. По условию задачи $2x + y = 40$, откуда $y = 40 - 2x$ и $S = x(40 - 2x)$. Площадь S не может быть отрицательной, следовательно, $0 \le x \le 20$.

Исследуем функцию $S(x) = 40x - 2x^2$ на отрезке $[0; 20]$ на наибольшее значение:

$$S'(x) = 40 - 4x, \ \ 40 - 4x = 0, \text{ откуда } x = 10.$$

Вычислив $S(0) = 0, S(20) = 0, S(10) = 200$, получим, что наибольшее значение на отрезке $[0; 20]$ непрерывная функция $S(x)$ принимает при $x = 10$. В этом случае $y = 20$.

Ответ: ширина 10 м, длина 20 м.

Практическая часть

Задание 1. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции:

а) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$ на отрезке $[1; 3]$;

б) $f(x) = 6x^3 - 3x^2 - 12x + 7$ на отрезке $[-1; 2]$;

в) $f(x) = 3x^4 - 4x^3 + 1$ на отрезке $[-2; 1]$;

г) $f(x) = \dfrac{x}{8} + \dfrac{2}{x}$ на отрезке $[1; 6]$.

Задание 2. а) Найдите сумму квадратов наибольшего и наименьшего значений функции $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x + 2$ на отрезке $[-2; 3]$.

б) Найдите сумму наибольшего и наименьшего значений функции $f(x) = 3x^4 + 4x^3 + 1$ на отрезке $[-3; 2]$.

Задание 3. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции:

а) $y = \dfrac{x^2 + 15}{x + 1}$ на отрезке $[1; 4]$;

б) $y = \dfrac{x^2 + 15}{x - 1}$ на отрезке $[-4; -1]$.

Задание 4. а) На отрезке [0; 4] найдите наибольшее и наименьшее значения функции $y = -x^3 + 3x|x-3|$.

б) На отрезке [0; 3] найдите наибольшее и наименьшее значения функции $y = x^3 - 2x|x-2|$.

Задание 5. В арифметической прогрессии четвертый член равен 4. При каком значении разности этой прогрессии сумма попарных произведений первых трех членов прогрессии будет наименьшей?

Задание 6. Найдите наибольшее значение функции

$$f(x) = |x^3 + 6x^2 + 9x + 1|$$

на отрезке [–3; 1].

Задание 7. Докажите, что если

$$-1 \le x \le 0, \text{ то } |x^3 + 2x + 1| \le 2.$$

Задание 8. Найдите наименьший член последовательности $a_n = n^4 - 5n^3 - 3n^2$.

Задание 9. Найдите наибольшее значение x, которое удовлетворяет уравнению $x^2 = 1 + 4a - a^2$, где a — некоторое действительное число.

Задание 10. а) Представьте число 48 в виде суммы двух натуральных слагаемых так, чтобы сумма куба первого числа и квадрата второго была минимальна.

б) Число 26 представьте в виде суммы трех положительных слагаемых, сумма квадратов которых наименьшая, если известно, что второе слагаемое втрое больше первого.

Задание 11. а) На координатной плоскости изображен график параболы $y = x^2$. Найдите абсциссу точки параболы, ближайшей к точке $M(0; 2)$.

б) На графике функции $y = \dfrac{2}{x^2}$ найдите координаты точки, ближайшей к началу координат.

Задание 12. а) Найдите расстояние между ближайшими точками графиков функций $f(x) = x^2 + x + 1$ и $g(x) = 2x - 2$.

б) В какой точке графика функции $y = 3 - x^2$ $(x > 0)$ следует провести касательную, чтобы она отсекала от первого координатного угла треугольник наименьшей площади? Найдите эту площадь.

Задание 13. Из всех прямоугольников данного периметра найдите тот, который имеет наибольшую площадь.

Задание 14. В прямоугольный треугольник с гипотенузой длиной 32 см и углом 60° вписан прямоугольник, основание которого лежит на гипотенузе. Какой должна быть длина сторон прямоугольника, чтобы его площадь была наибольшей?

Задание 15. В треугольник, имеющий длину основания 4 м, длину высоты 3 м, вписан прямоугольник наибольшей площади. Найдите площадь этого прямоугольника.

Задание 16. Докажите, что из всех прямоугольных треугольников с заданной гипотенузой наибольшую площадь имеет равнобедренный треугольник.

Задание 17. Боковые стороны и меньшее основание трапеции имеет длину 20 см. Найдите наибольшее основание трапеции так, чтобы площадь трапеции была наибольшей.

Задание 18. Концы отрезка длины a находятся на сторонах прямого угла. Найдите длины катетов полученного треугольника, имеющего наибольшую площадь.

Задание 19. Заготовлена изгородь длиной 480 м. Этой изгородью надо огородить с трех сторон земельный участок прямоугольной формы, примыкающий к реке. Каковы должны быть размеры участка, чтобы его площадь была наибольшей при данной длине изгороди?

Задание 20. Требуется изготовить закрытый ящик с квадратным дном, объем которого равен 8 дм^3. Каковы должны быть линейные размеры ящика, чтобы его полная поверхность была наименьшей?

Ваш помощник

К заданию 1. а) 4 и 0. В других случаях рассуждайте аналогично. В случае затруднений обращайтесь к входной информации.

К заданию 2. а) 697. б) 136. В случае затруднений обращайтесь к входной информации.

К заданию 3. а) 8 и 6; б) –6 и –8. В случае затруднений обращайтесь к входной информации.

К заданию 4. а) 5 и –52. б) 21 и $-\dfrac{40}{27}$. Отрезок $[a; b]$ нулем подмодульного выражения разбейте на промежутки, запишите функцию без знака модуля и найдите наибольшее и наименьшее значения на полученных промежутках, сделайте общий вывод.

К заданию 5. $d = 2\dfrac{2}{11}$. Согласно условию составьте функцию $S(d) = 3ad + 6ad + 2d^2$ и найдите ее наименьшее значение.

К заданию 6. Пусть $h(x) = x^3 + 6x^2 + 9x + 1$ и $-3 < x < 1$. Найдем $h'(x)$:

$$h'(x) = 3x^2 + 12x + 9 = 3(x+1)(x+3).$$

Определим критические точки:

$$h'(x) = 0 \text{ при } -3 < x < 1, \text{ откуда } x = -1.$$

Так как $h(-3) = 1$, $h(-1) = -3$, $h(1) = 17$, то наибольшее и наименьшее значения функции $f(x)$ равны соответственно 17 и –3.

1) Если $h(x) \geq 0$, то $h(x) \leq 17$ и $f(x) = |h(x)| = |h(x)| \leq 17$, причем $f(1) = h(1) = 17$.

2) Если $f(x) < 0$, то $h(x) \leq -3$ (почему?)
и $f(x) = |h(x)| = -h(x) \leq 3 < 17$.

Следовательно, наибольшее значение функции $f(x)$ на отрезке $[-3; 1]$ равно 17.

К заданию 7. Найдите наименьшее и наибольшее значения функции $y = x^3 + 2x + 1$ на отрезке $[-1; 0]$ и убедитесь, что первое — не меньше –2, а второе — не больше 2.

К заданию 8. Рассмотрите функцию $y = x^4 - 5x^3 - 3x^2$ при $x \geq 1$.

К заданию 9. Найдите критические точки функции $y = 1 + 4a - a^2$, где $y = x^2$; $y' = 4 - 2a$; $y' = 0$ при $a = 2$.

$a = 2$ — точка максимума. Найдите значение функции в этой точке: $y(2) = 1 + 4 \cdot 2 - 2^2 = 5$. Отсюда: $x^2 = 5$, т. е. $x = \pm\sqrt{5}$. Вывод: $x = \sqrt{5}$.

К заданию 10. а) $48 = 5 + 43$. б) $26 = 4 + 12 + 10$.

К заданию 11. а) $-\frac{\sqrt{6}}{2}$ или $\frac{\sqrt{6}}{2}$. б) $(-\sqrt{2}; 1)$ или $(\sqrt{2}; 1)$.

К заданию 12. а) $0{,}55\sqrt{5}$. б) $(1; 2)$; 4.

К заданию 13. Квадрат.

К заданию 14. 16 см; $4\sqrt{3}$ см.

К заданию 15. 3 м^3.

К заданию 17. 40 см.

К заданию 19. $240 \cdot 120$.

К заданию 20. Ящик имеет форму куба с ребром 2 дм.

УЭ-8. ОБЩАЯ СХЕМА ПОСТРОЕНИЯ ГРАФИКА ФУНКЦИИ

Цель: актуализировать основные знания, умения и навыки, полученные на уроках математики по этой теме.

Теоретическая часть

Схема исследования функции и построение ее графика. Для исследования функции $y = f(x)$ и построения ее графика надо:

1) найти область определения функции;
2) исследовать функцию на четность или нечетность;
3) найти точки пересечения графика данной функции с осями координат, если они существуют;
4) найти производную данной функции и ее критические точки;
5) установить промежутки возрастания и убывания;
6) найти точки экстремума, определить вид экстремума (максимум, минимум) и вычислить значения функции в этих точках;
7) построить график.

Пример. Построить график функции

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 3.$$

Решение.

1) Функция определена на всей числовой прямой, так как $f(x)$ — многочлен, т. е. $D(f) = \boldsymbol{R}$;

2) функция не является ни четной, ни нечетной;

3) полагая $x = 0$, получаем $y = -3$. $A(0; -3)$ — точка пересечения с осью Oy. Точки пересечения графика с осью Ox в данном случае определить трудно;

4—5) найдем точки экстремума и промежутки возрастания и убывания функции. Для этого найдем $f'(x)$ и критические точки функции:

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 3(x^2 - 4x + 3) = 3(x-1)(x-3);$$

$$f'(x) = 0 \text{ при } x_1 = 1 \text{ и } x_2 = 3.$$

Составим таблицу:

x	$(-\infty; 1)$	1	$(1; 3)$	3	$(3; +\infty)$
$f'(x)$	+	0	–	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	1	$\searrow$	–3	$\nearrow$

График функции показан на рисунке 4.

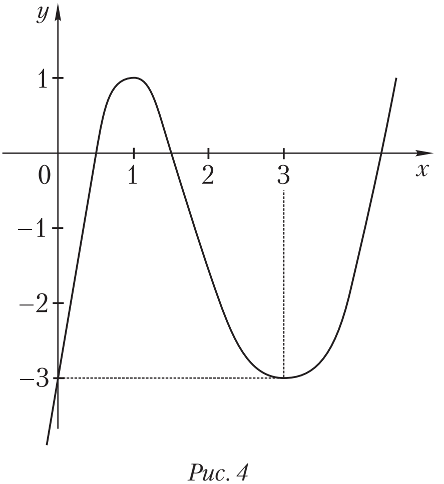


Рис. 4

Практическая часть

Задание 1. Исследуйте квадратичную функцию и постройте ее график:

а) $f(x) = -x^2 + 5x - 4$;

б) $f(x) = -x^2 - x + 1$;

в) $f(x) = x^2 - 6x + 10$;

г) $f(x) = x^2 - 2x + 8$.

Задание 2. Исследуйте функцию с помощью производной и постройте ее график:

а) $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + x^2$;

б) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$;

в) $f(x) = \frac{x^3}{3} - x^2 - 3x + 4$;

г) $f(x) = \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x$.

Задание 3. Исследуйте с помощью производной функцию $f(x) = ax^2 + bx + c$ при $a > 0$.

Задание 4. Исследуйте функцию и постройте ее график:

а) $y = |x^3 - 3x|$;

б) $y = |x^3 - 4x|$.

Задание 5. Постройте график функции:

а) $y = \frac{1}{x} + x$;

б) $y = \frac{4}{x} + x$.

Задание 6. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение $x^3 - 3x^2 = a$ имеет три корня.

Ваш помощник

К заданию 6. Исследуйте с помощью производной функцию $f(x) = x^3 - 3x^2$ и постройте ее график. Схематически изобразите график функции $y = a$, и, передвигая его параллельно оси Ox, вы сможете найти ответ на вопрос задачи: $-4 < a < 0$.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОЗАИКА

Из истории возникновения дифференциального исчисления

Понятие производной возникло еще в XVII в., задолго до построения строгой теории пределов. Формирование понятия производной исторически связано с двумя задачами: задачей проведения касательной к кривой и задачей нахождения скорости движения.

Французский математик и юрист П. Ферма (1601—1665) не позднее чем в 1629 г. предложил способы отыскания наибольшего и наименьшего значений функции и проведения касательных к произвольным кривым, которые, по существу, основывались на применении производных. Другой французский математик и философ — Р. Декарт (1596—1650) разработал к 1637 г. метод координат и основы аналитической геометрии. Научная переписка между этими учеными помогла выработать общее понятие касательной (предельное положение секущей).

Работы Р. Декарта и П. Ферма способствовали открытию интегрального исчисления и его постепенному обоснованию.

В 1666 г. английский ученый И. Ньютон (1643—1727) и независимо от него несколько позднее немецкий математик Г. Лейбниц (1646—1716) разработали теорию производных, получившую название дифференциального исчисления. И. Ньютон, исходя из вопросов механики, представлял аргумент функции как время, функцию времени называл флюентой (т. е. текущей величиной), а ее производную рассматривал как скорость течения (т. е. изменения) функции и называл флюксией. И. Ньютон обозначал функции последними буквами латинского алфавита u, x, y, z, а их флюксии, т. е. производные от флюент по времени, — соответственно теми же буквами с точкой над ними: $\dot{u}$, $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$.

Вопрос о взаимосвязи между непрерывностью функции и существованием ее производной сыграл важную роль в проблеме строгого обоснования математического анализа. Дело в том, что в течение XVII, XVIII и первой половины XIX в. ученые-математики считали, что любая непрерывная функция имеет производную. Это утверждение основывалось на том, что непрерывную кривую представляли как траекторию движения тела, а производная — это скорость движения, тогда естественно считать, что всякое движение совершается с некоторой скоростью. Немецкий математик К. Вейерштрасс (1815—1897) в 1875 г. построил пример непрерывной функции, не имеющей производной ни в одной точке. Геометрически это значит, что кривая непрерывна, но ни в одной точке не имеет касательной. Пример К. Вейерштрасса показывает, что интуиция в некоторых случаях подводит. Можно различными способами построить непрерывные функции на некотором промежутке, но не имеющие производной ни в одной точке.

Интересно знать

В середине XVIII в. Л. Эйлер стал пользоваться греческой буквой Δ для обозначения приращений переменных величин, т. е. $\Delta x = x_2 - x_1$, $\Delta y = y_2 - y_1$ и т. д. Это обозначение используем и мы:

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Обозначение $f(x)$ для производной функции $y = f(x)$ было введено Ж. Лагранжем (1736—1813).

Г. Лейбниц обозначал ту же производную через

$\dfrac{df(x)}{dx}$, или $\dfrac{df}{dx}$, или $\dfrac{dy}{dx}$ (читается: «df по dx» или «dy по dx»).

Например,

$$\frac{d(5x+6)}{dx} = 5; \frac{d(x^2)}{dx} = 2x; \frac{d(x^4 - x^3)}{dx} = 4x^3 - 3x^2.$$

Термин «производная» является буквальным переводом на русский французского слова *derivce*. О. Коши, используя начальную букву этого термина, обозначал производную символом Dy или $Df(x)$.

Терминология И. Ньютона (флюенты, флюксии) и его символы производной утратили свое значение. Иногда только в физике в некоторых случаях обозначают точками над буквами производные по времени.

Символ df Г. Лейбниц выбрал для обозначения дифференциала функции f.

Модуль 2 ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ВЫРАЖЕНИЙ

УЭ-1. КООРДИНАТНАЯ ОКРУЖНОСТЬ

Цель: уяснить сущность понятия «координатная окружность».

Теоретическая часть

Понятие координатной окружности. Известно, чтобы задать систему координат на прямой, выбирают на ней начало отсчета, положительное направление и единицу измерения длины. Аналогично, для задания системы координат на окружности достаточно выбрать начало отсчета, направление обхода (по часовой стрелке или против часовой стрелки) и единицу измерения длины (на окружности естественно взять длину радиуса этой окружности).

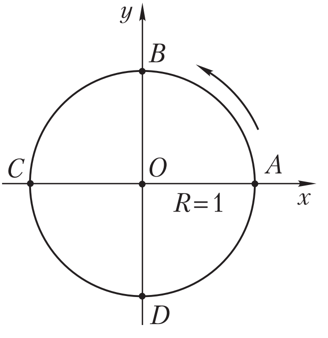


Рис. 5

Координатная окружность — это окружность единичного радиуса, на которой выбрано начало отсчета A и указано направление обхода (рис. 5).

В качестве положительного направления обхода выбираем направление против часовой стрелки.

Пусть начало отсчета (точка A) совпадает с правым концом горизонтального диаметра.

Соответствие между множеством R всех действительных чисел и множеством точек координатной окружности. Вам известно, что каждому действительному числу соответствует единственная точка на координатной прямой. Установим соответствие между точками координатной окружности следующим образом.

1. Числу $t = 0$ поставим в соответствие точку A (рис. 6).

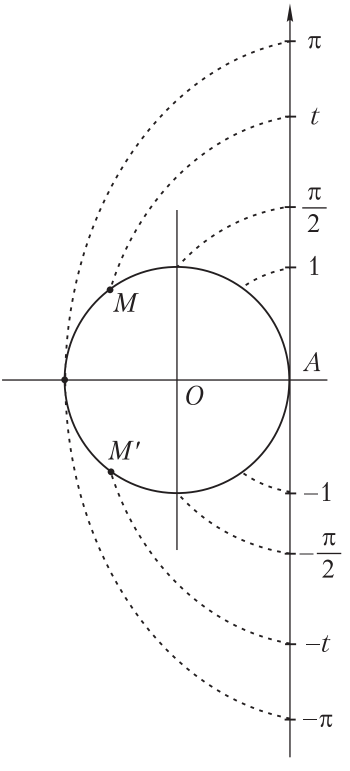


Рис. 6

2. Если число $t > 0$ взято на координатной прямой, то, двигаясь из точки A в положительном направлении (против часовой стрелки), пройдем по окружности путь длиной t. Конец этого пути — точку M и сопоставим числу t (см. рис. 6). Если $0 < t < 2\pi$, то длина этого пути равна длине дуги AM. Если же $t \geq 2\pi$, то этот путь состоит из нескольких обходов окружности и из дуги AM.

3. Если число отрицательное, то, двигаясь из точки A в отрицательном направлении (по часовой стрелке), пройдем по окружности путь длиной $|t|$. Конец этого пути — точку M' и сопоставим числу $-t$.

Наглядно отображение координатной прямой на координатную окружность сводится к «наматыванию» всей прямой на окружность, при котором начало координат совпадает с точкой A на окружности, положительная полуось «наматывается» в положительном направлении, а отрицательная — в отрицательном.

Итак, каждое действительное число однозначно изображается на координатной окружности; по своему изображению оно восстанавливается уже неоднозначно. При обходе по окружности в одном направлении целого числа оборотов мы попадаем в исходную точку, а значит, каждой точке координатной окружности наравне с некоторым числом t соответствует и любое число $t + 2\pi k$, где $k \in \boldsymbol{Z}$. Тот факт, что точка M является изображением числа t, запишем так: $M(t)$; при этом t назовем координатой точки M на координатной окружности.

Если длину дуги окружности радиуса R обозначить через l, радианную меру центрального угла этой окружности, опирающегося на данную дугу, через α, то на основании определения радианной меры угла $\frac{l}{R} = \alpha$, откуда $l = R\alpha$. Очевидно, что если $R = 1$, то $l = \alpha$

и длина дуги окружности единичного радиуса совпадает с ее мерой в радианах. Напомним также, что α рад $= \frac{180° \cdot \alpha}{\pi}$.

Пример 1. Найти на координатной окружности точки $A(0)$, $B\left(\frac{\pi}{2}\right)$, $C(\pi)$, $D\left(\frac{3\pi}{2}\right)$.

Решение. Числу 0 соответствует начало отсчета — точка $A(0)$ (рис. 7, *а*). Так как длина всей окружности равна 2π, то $\frac{\pi}{2}$ — это длина дуги, составляющей четверть окружности. Значит, если мы из точки A отложим в положительном направлении дугу, длина которой равна четверти длины окружности, то получим искомую точку $B\left(\frac{\pi}{2}\right)$. Аналогично находим остальные точки (см. рис. 7, *а*).

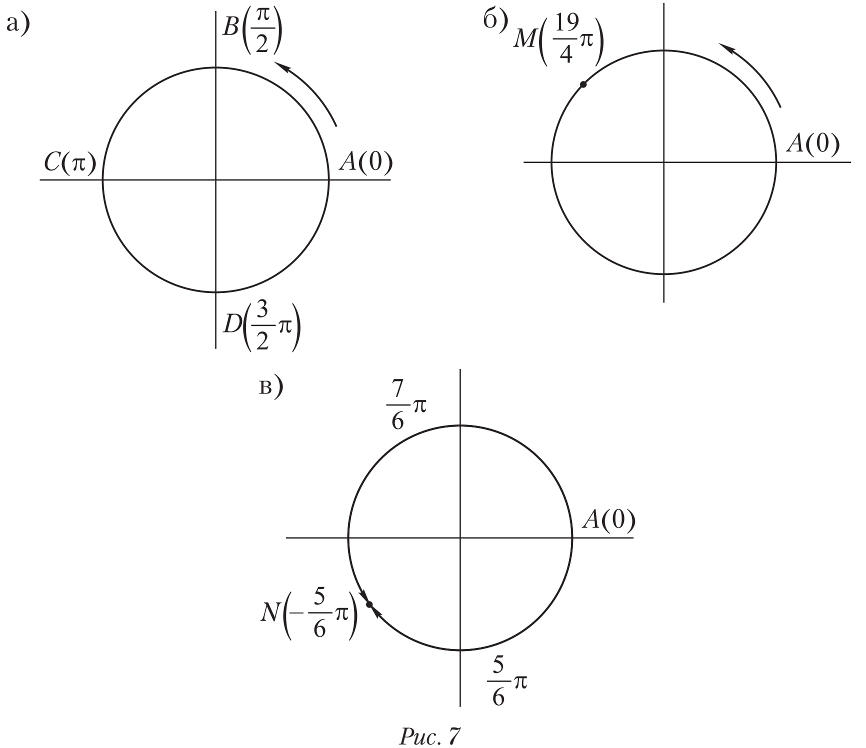


Рис. 7

Пример 2. Найти на координатной окружности точки $M\left(\frac{19\pi}{4}\right)$ и $N\left(-\frac{5\pi}{6}\right)$.

Решение. Построим сначала точку M. Так как $\frac{19\pi}{4} = 4\pi + \frac{3\pi}{4}$, то для отыскания точки M откладываем от точки $A(0)$ в положительном направлении дугу в $\frac{19\pi}{4} - 4\pi = \frac{3\pi}{4}$ рад, т. е. $\frac{3 \cdot 180°}{4} = 135°$ (рис. 7, *б*).

Построив в отрицательном направлении дугу в $\frac{5\pi}{6}$ рад, т. е. в 150°, получим точку N (рис. 7, *в*). Эту же точку можно получить, построив в положительном направлении дугу в $\frac{7\pi}{6}$ рад, т. е. в 210°. (Объясните почему.)

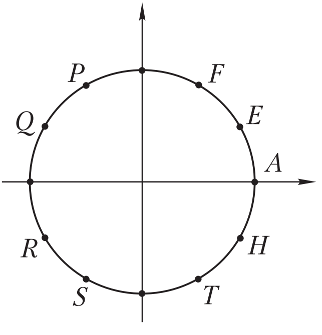


Рис. 8

Пример 3. Построить на координатной окружности точки, соответствующие числам $\frac{\pi k}{6}$, где $k = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11$.

Разделим на три равные части каждую из четвертей координатной окружности, поскольку $\frac{\pi}{6}k = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{k}{3}$. Тогда длина одной такой части равна $\frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{\pi}{6}$. Искомые точки E, F, P, Q, R, S, T, H показаны на рисунке 8.

Практическая часть

Задание 1. Отметьте на координатной окружности точки, соответствующие числам: $0; \frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{6}; -\frac{7\pi}{6}; 2\pi; -\frac{9}{2}\pi; \frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{2}; -\frac{3\pi}{2}; \frac{11\pi}{4}$.

Задание 2. Укажите все действительные числа, соответствующие точкам координатной окружности, изображенным на рисунке 9, *а—е*.

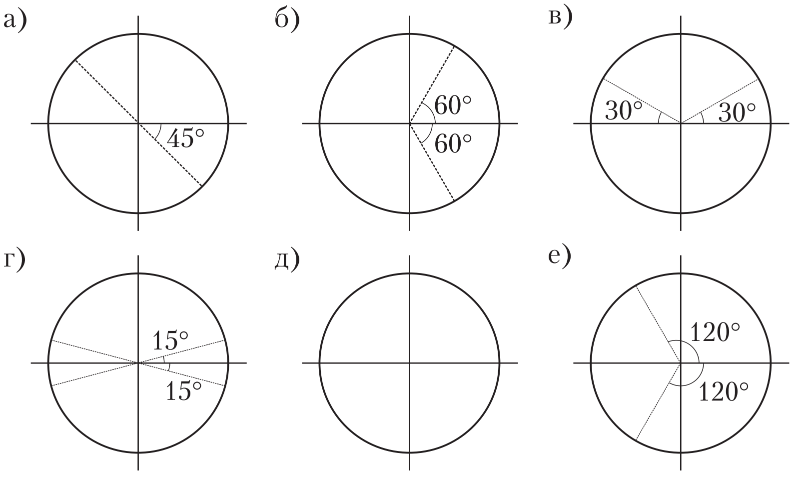


Рис. 9

Задание 3. На координатной окружности отметьте точки, соответствующие числам $\frac{\pi k}{4}$, где $k \in \{1, 3, 5, 7\}$.

Задание 4. На координатной окружности отметьте приближенно точку, соответствующую числу: а) 25; б) -12.

Задание 5. В какой четверти координатной окружности находится точка, соответствующая числу:

а) $\frac{13\pi}{5}$;   б) $-\frac{11\pi}{6}$;   в) 10;

г) -7;   д) $\pi + 2$;   е) $\frac{\pi}{3} + 4$?

Задание 6. Найдите соотношения между действительными числами t_1 и t_2, если соответствующие им точки координатной окружности:

а) совпадают;

б) диаметрально противоположны;

в) симметричны относительно прямой OA, где A — начало отсчета;

г) симметричны относительно прямой OB, перпендикулярной OA;

д) симметричны относительно прямой, делящей угол OAB пополам.

Задание 7. На координатной окружности точке Q соответствует число: а) $\frac{\pi}{3}$; б) $-\frac{5\pi}{6}$. Найдите ближайшие друг к другу и соответствующие точке Q два числа, между которыми расположено данное число.

Задание 8. Как меняется число t, когда соответствующая ему точка движется по координатной окружности: а) по часовой стрелке; б) против часовой стрелки (при условии, что число t нигде не совершает скачка на $2\pi k, k \neq 0, k \in \boldsymbol{Z}$)?

Задание 9. На координатной окружности даны точки $A(0)$, $B\left(\frac{\pi}{3}\right)$, $C\left(\frac{5\pi}{3}\right)$, $D\left(\frac{2\pi}{3}\right)$. Запишите неравенство, которому удовлетворяют все числа, соответствующие точкам: а) меньшей дуги BC; б) большей дуги BD.

Ваш помощник

К заданию 2. а) $-\frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in \boldsymbol{Z}$; б) $\pm\frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in \boldsymbol{Z}$; в) $(-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in \boldsymbol{Z}$; г) $\pm\frac{\pi}{12} + \pi n, n \in \boldsymbol{Z}$; д) $\pi + 2\pi n, -\frac{\pi}{2} + 2\pi m, n, m \in \boldsymbol{Z}$; е) $\frac{2\pi}{3}, n \in \boldsymbol{Z}$.

К заданию 5. в) Во второй; б) в первой; в) в третьей; г) в четвертой; д) в четвертой; е) во второй.

К заданию 6. а) $t_2 - t_1 = 2\pi n, n \in \boldsymbol{Z}$; б) $t_2 - t_1 = \pi(2n+1), n \in \boldsymbol{Z}$; в) $t_2 + t_1 = 2\pi n, n \in \boldsymbol{Z}$; г) $t_2 + t_1 = \pi(2n+1), n \in \boldsymbol{Z}$; д) $t_2 + t_1 = \pi\left(\frac{1}{2} + 2n\right), n \in \boldsymbol{Z}$.

К заданию 7. а) $-\frac{5\pi}{6}; \frac{7\pi}{3}$; б) $-\frac{17\pi}{6}; \frac{7\pi}{6}$.

К заданию 8. а) Убывает; б) возрастает.

К заданию 9. а) $-\frac{\pi}{3} + 2\pi n \leq t \leq \frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in \boldsymbol{Z}$.

УЭ-2. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ПО ТЕМЕ «ПОНЯТИЯ СИНУСА, КОСИНУСА И ТАНГЕНСА УГЛА»

Цель: актуализировать основные знания, умения и навыки, полученные на уроках математики.

Теоретическая часть

Возьмем на плоскости прямоугольную систему координат с осью Ox, направленной вправо, и осью Oy, направленной вверх, а также окружность с центром в начале координат и с радиусом $R = 1$ (рис. 10).

Ордината точки $M_{\alpha}(x; y)$ координатной окружности, соответствующей углу α называется **синусом угла** α и обозначается $\sin\alpha$, т. е. $\sin\alpha = y$.

Абсцисса точки $M_{\alpha}(x; y)$ координатной окружности, соответствующей углу α, называется **косинусом угла** α и обозначается $\cos\alpha$, т. е. $\cos\alpha = x$.

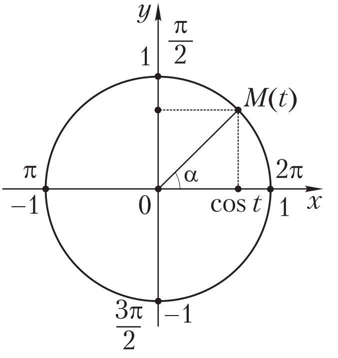


Рис. 10

Пример 1. Найти все углы α, для каждого из которых $\sin\alpha = 0$.

Решение. Из определения синуса (см. рис. 10) следует, что $\sin 0 = 0$, $\sin\pi = 0$, $\sin(-\pi) = 0$, $\sin 2\pi = 0$, $\sin(-2\pi) = 0$ и т. д., т. е. $\sin 0 = 0$ для любого целого числа k.

Итак, $\sin\alpha = 0$ для углов $\alpha = \pi k$, где k — любое целое число. Для любых углов α, отличных от πk, $\sin\alpha \neq 0$.

Пример 2. Найти все углы, пользуясь координатной окружностью, для каждого из которых $\cos\alpha = 0$.

Решение. Из определения косинуса (см. рис. 10) следует, что $\cos\frac{\pi}{2} = 0$, $\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0$, $\cos\frac{3\pi}{2} = 0$, $\cos\left(-\frac{3\pi}{2}\right) = 0$ и т. д., т. е. $\cos\left(\frac{\pi}{2} + \pi k\right) = 0$ для любого целого числа k.

Итак, для любого целого числа k $\cos\alpha = 0$ для углов $\alpha = \frac{\pi}{2} + \pi k$ и $\cos\alpha \neq 0$ для углов $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$.

Число, равное отношению $\sin\alpha$ к $\cos\alpha$, называется тангенсом угла α и обозначается $\operatorname{tg}\alpha$, т. е.

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha},$$

где $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

Выражение $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, а значит, и $\operatorname{tg}\alpha$ имеет смысл для всех углов α, кроме тех, для которых $\cos\alpha = 0$, т. е. кроме $\alpha = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \neq \boldsymbol{Z}$.

Значения синуса, косинуса и тангенса некоторых часто встречающихся углов — от 0 до $\frac{\pi}{2}$. Прочерк сделан в том случае, когда выражение не имеет смысла:

α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\operatorname{tg}\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	–

Знаки синуса, косинуса и тангенса угла по четвертям показаны на рисунке 11, *а—в*.

Некоторые равенства. Можно доказать, что:

$$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha; \quad \cos(-\alpha) = \cos\alpha; \quad \operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg}(\alpha).$$

Углы, которые имеют одинаковые синус, косинус или тангенс:

$$\sin(\alpha + 2\pi k) = \sin\alpha, \quad \cos(\alpha + 2\pi k) = \cos\alpha, \quad \operatorname{tg}(\alpha + 2\pi k) = \operatorname{tg}\alpha.$$

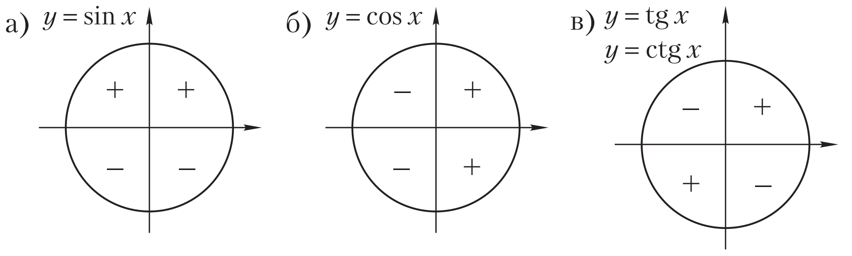


Рис. 11

Итак, угол α имеет тот же синус и косинус, что и углы $\alpha + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$, и тот же тангенс, что углы $\alpha + \pi l$, $l \in \boldsymbol{Z}$.

Практическая часть

Задание 1. Начертите координатную окружность на миллиметровой бумаге с центром в начале координат. Найдите приближенное значение $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{ctg}\alpha$, если $\alpha = 30°$, $\alpha = 70°$, $\alpha = -130°$, $\alpha = -150°$.

Задание 2. Найдите значение выражения:

а) $4\cos 60° + 8\sin 90°$;
б) $6\sin 60° - 2\cos 30°$;
в) $\sin 30° + \operatorname{tg} 45° - \operatorname{tg} 60°$;
г) $6\sin 45° \cos 45°$;
д) $7\cos 30° \operatorname{tg} 60°$;
е) $3\operatorname{tg} 30° \sin 60°$.

Задание 3. Вычислите:

а) $\sin\left(-\dfrac{\pi}{2}\right) + \cos\dfrac{3\pi}{2} + \cos\pi - \operatorname{tg} 0$;

б) $4\sin\pi\cos 2\pi + 5\operatorname{tg}\pi$;

в) $2\sin\dfrac{\pi}{3} + 2\cos\dfrac{\pi}{4} - 3\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{3}$;

г) $\sin^2\dfrac{\pi}{4} - 2\cos^2\dfrac{\pi}{3} - 5\operatorname{tg}^2\dfrac{\pi}{4}$.

Задание 4. Вычислите:

а) $2\cos 0° + 3\sin 90° + 4\operatorname{tg} 180°$;

б) $5\sin 270° - 2\cos 0° + 3\operatorname{tg} 0°$;

в) $\operatorname{tg} 45° \sin 60° \operatorname{tg} 30°$.

Задание 5. Может ли синус или косинус какого-либо угла быть равным:

а) $-0{,}5$; б) 1; в) 2;

г) π; д) $-1{,}75$?

Задание 6. Существует ли такой угол x, при котором истинно равенство:

а) $\sin x = \frac{k}{k-1}$ при $k > 1$;

б) $\cos x = a + \frac{1}{a}$;

в) $\sin x = \frac{2\sqrt{ab}}{a+b}$ при $a > 0$ и $b > 0$;

г) $\operatorname{tg} x = \sqrt{10}$;

д) $\cos x = -\sqrt{10}$;

е) $\sin x = 0$?

Задание 7. Укажите несколько значений α, при которых:

а) $\sin\alpha = 0$; б) $\sin\alpha = -1$;

в) $\cos\alpha = -1$; г) $\operatorname{tg}\alpha = 0$.

Задание 8. Укажите несколько значений β, при которых:

а) $\sin\beta = 1$; б) $\cos\beta = 1$;

в) $\cos\beta = 0$; г) $\operatorname{ctg}\beta = 0$.

Задание 9. Постройте углы, синус каждого из которых равен:

а) $-\frac{3}{4}$; б) $0{,}6$; в) $-\frac{1}{2}$; г) $-\frac{2}{5}$.

Задание 10. Постройте углы, косинус каждого из которых равен:

а) $-\frac{2}{5}$; б) $\frac{1}{2}$; в) $\frac{2}{3}$; г) $-0{,}3$.

Задание 11. Вычислите:

а) $\operatorname{tg}^2\frac{\pi}{3} + \operatorname{tg}\frac{\pi}{6} - 2\sin\frac{\pi}{3} + \sin\pi - 4\cos\frac{3\pi}{2} - 2\cos\frac{\pi}{3}$;

б) $\operatorname{tg}\frac{\pi}{6}+\operatorname{tg}\pi-\sin\frac{3\pi}{2}-\cos\frac{\pi}{2}+\sin\pi$;

в) $\sin 180^\circ+\sin 270^\circ-\operatorname{tg}0^\circ+\operatorname{tg}180^\circ-\cos 90^\circ$;

г) $a^2\cos 0^\circ+2ab\cos 180^\circ+b^2\sin 90^\circ$.

Задание 12. Какой знак имеет $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ и $\operatorname{tg}\alpha$, если:

а) $\alpha=52^\circ$; б) $\alpha=120^\circ$;

в) $\alpha=300^\circ$; г) $\alpha=308^\circ$?

Задание 13. Какой знак имеет:

а) $\sin 320^\circ$; б) $\cos 150^\circ$; в) $\operatorname{tg}220^\circ$;

г) $\operatorname{tg}351^\circ$; д) $\cos 420^\circ$; е) $\operatorname{tg}600^\circ$;

ж) $\sin(-35^\circ)$; з) $\cos(-100^\circ)$?

Задание 14. Положительным или отрицательным действительным числом является значение выражения:

а) $\sin 100^\circ\sin 122^\circ$; б) $\cos 275^\circ\sin 316^\circ$;

в) $\cos 318^\circ\operatorname{tg}214^\circ$; г) $\cos 21^\circ\sin 115^\circ$;

д) $\operatorname{tg}102^\circ\sin 155^\circ$; е) $\cos 300^\circ\operatorname{tg}100^\circ$?

Задание 15. Углом какой четверти является α, если:

а) $\sin\alpha<0$ и $\cos\alpha>0$; б) $\sin\alpha>0$ и $\cos\alpha>0$;

в) $\sin\alpha<0$ и $\cos\alpha<0$; г) $\cos\alpha<0$ и $\operatorname{tg}\alpha>0$;

д) $\sin\alpha>0$ и $\operatorname{tg}\alpha<0$; е) $\cos\alpha>0$ и $\operatorname{tg}\alpha<0$?

Задание 16. Углом какой четверти является α, если:

а) $|\sin\alpha|=\sin\alpha$;

б) $|\cos\alpha|=-\cos\alpha$;

в) $|\operatorname{tg}\alpha|+\operatorname{tg}\alpha=0$?

Задание 17. Найдите значение выражения:

а) $\sin(-60^\circ)$; б) $\cos(-30^\circ)$; в) $\operatorname{tg}(-30^\circ)$;

г) $\operatorname{tg}(-45^\circ)$; д) $\sin(-90^\circ)$; е) $\cos(-75^\circ)$.

Задание 18. Найдите:

а) $\sin(-90^\circ)$; б) $\sin(-60^\circ)$;

в) $\sin 180^\circ$; г) $\cos(-180^\circ)$.

Задание 19. Упростите:

а) $\sin^2(-\alpha)-\cos(-\alpha)+\operatorname{tg}(-\alpha)$;

б) $\sin\left(-\frac{3\pi}{2}\right)+\cos(-\pi)+\operatorname{tg}(-2\pi)$.

Задание 20. Найдите:

а) $\sin 420°$; б) $\cos 390°$; в) $\sin 405°$;

г) $\operatorname{tg} 540°$; д) $\operatorname{tg} 450°$; е) $\cos 420°$;

ж) $\sin(-720°)$; з) $\cos(-405°)$; и) $\operatorname{tg}(-1110°)$.

Задание 21. Вычислите:

а) $\cos 3660°$; б) $\sin 900°$;

в) $\operatorname{tg} 585°$; г) $2\cos 4{,}5\pi+\sin\frac{19\pi}{3}$;

д) $\sin\frac{19\pi}{3}-\cos\frac{19\pi}{3}$;

е) $2\sin 750°-3\cos 900°+\operatorname{tg} 405°$.

Задание 22. Найдите наибольшее и наименьшее значения выражения:

а) $2+\cos\alpha$; б) $5-2\sin\alpha$; в) $2+4\cos\alpha$.

Задание 23. Вычислите:

а) $\sin\left(4\pi-\frac{\pi}{6}\right)-\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)-\operatorname{tg}^2\left(3\pi-\frac{\pi}{4}\right)-|\cos\pi|+\operatorname{tg}0$;

б) $\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)+\cos\left(2\pi-\frac{\pi}{4}\right)-1{,}5\operatorname{tg}^2\left(-\frac{\pi}{6}\right)-2\sin 2\pi+$
$+\frac{1}{2}\operatorname{tg}\left(4\pi+\frac{\pi}{4}\right)$;

в) $\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)-3\left|\operatorname{ctg}\left(5\pi-\frac{\pi}{3}\right)\right|+\sin\left(6\pi-\frac{\pi}{4}\right)-2\cos\frac{3\pi}{2}-4\sin^2\left(-\frac{\pi}{6}\right)$;

г) $\frac{1}{3}\operatorname{tg}^2\left(-\frac{\pi}{3}\right)-\left|\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right|+\cos\left(4\pi-\frac{\pi}{3}\right)-3\operatorname{tg}7\pi+4\cos 2\pi$;

д) $\cos\frac{\pi}{6}-\sin(-4\pi)-0{,}5\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{4}\right)-\frac{1}{2}\sin\frac{3\pi}{2}-2\operatorname{tg}^2\left(3\pi-\frac{\pi}{3}\right)$;

е) $\cos\left(2\pi-\frac{\pi}{4}\right)-3\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)-\operatorname{ctg}^2\left(3\pi-\frac{\pi}{6}\right)+2\left|\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right|+$
$+\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{4}\right)$.

Ваш помощник

К заданию 2. а) 10; б) $2\sqrt{3}$; в) 1,5; г) 3.
К заданию 4. а) 5; б) –7.
К заданию 23. а) –3; б) 0; в) $-1-\sqrt{3}$; г) 5; д) $\frac{\sqrt{3}-12}{2}$; е) $\frac{\sqrt{2}-6}{2}$.

УЭ-3. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ПО ТЕМЕ «ОСНОВНЫЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ТОЖДЕСТВА»

Цель: актуализировать основные знания, умения и навыки, полученные на уроках математики по данной теме.

Теоретическая часть

Тригонометрическим выражением называют любое выражение, содержащее синус, косинус или тангенс одного или нескольких углов. Напомним основные соотношения между простейшими тригонометрическими выражениями: $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$:

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1,$$

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\left(\alpha\neq\frac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in\boldsymbol{Z}\right),$$

$$1+\operatorname{tg}^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha}.$$

Эти равенства называют *основными тригонометрическими тождествами*. Они позволяют по значению одного из выражений $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$ найти значения остальных выражений.

Из равенства $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ следует, что $\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha$, $\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha$, откуда

$$|\sin\alpha| = \sqrt{1-\cos^2\alpha}; \quad |\cos\alpha| = \sqrt{1-\sin^2\alpha}.$$

Пример 1. Найти $\sin\alpha$, если известно, что

$$\cos\alpha = -0{,}8 \text{ и } 90° < \alpha < 180°.$$

Решение. Для любого угла α, удовлетворяющего условию $90° < \alpha < 180°$, $\sin\alpha$ положителен, поэтому из равенства $|\sin\alpha| = \sqrt{1-\cos^2\alpha}$ следует, что $\sin\alpha = \sqrt{1-0{,}64} = 0{,}6$.

Пример 2. Найти $\sin\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{ctg}\alpha$, если известно, что $\cos\alpha = 0{,}6$ и $\frac{3}{2}\pi < \alpha < 2\pi$.

Решение. Найдем сначала $\sin\alpha$. Для любого угла α из промежутка $\left(\frac{3}{2}\pi; 2\pi\right)$ $\sin\alpha$ отрицателен, поэтому из формулы $|\sin\alpha| = \sqrt{1-\cos^2\alpha}$ следует, что $\sin\alpha = -\sqrt{1-0{,}36} = -0{,}8$. Зная синус и косинус угла α, можно найти его тангенс:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}, \operatorname{tg}\alpha = \frac{-0{,}8}{0{,}6} = -\frac{4}{3}.$$

Для отыскания котангенса угла α удобно воспользоваться формулой

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}; \operatorname{ctg}\alpha = -\frac{3}{4}.$$

Итак, $\sin\alpha = -0{,}8$, $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{4}{3}$, $\operatorname{ctg}\alpha = -\frac{3}{4}$.

Практическая часть

Задание 1. Упростите выражение:

а) $1 - \sin^2\alpha$;　　б) $\cos^2\alpha - 1$;

в) $\sin^2\alpha + (1 - \cos^2\alpha)$;　　г) $\sin^2\alpha - 3\cos^2\alpha - 1$;

д) $(1+\cos\alpha)(1-\cos\alpha)$;　　е) $(\sin\alpha - 1)(1 + \sin\alpha)$.

Задание 2. Упростите выражение:

а) $\cos x \operatorname{tg} x + \sin x$;

б) $\dfrac{1+\cos^2\alpha - \sin^2\alpha}{2\cos\alpha}$;

в) $\dfrac{1-\sin^2\alpha}{1-\cos^2\alpha} + 1$;

г) $(\cos x \operatorname{tg} x)^2 + (\sin x \operatorname{ctg} x)^2$.

Задание 3. Докажите тождество:

а) $\dfrac{\sin^3\alpha - \cos^3\alpha}{\cos\alpha - \sin\alpha} + \sin\alpha\cos\alpha = -1$;

б) $\dfrac{\cos\alpha}{1+\cos\alpha} - \dfrac{\cos\alpha}{1-\cos\alpha} + 2\operatorname{ctg}^2\alpha = 0$;

в) $\cos\alpha \operatorname{tg}\alpha + \dfrac{\cos\alpha}{\operatorname{tg}\alpha} = -\dfrac{1}{\sin\alpha}$;

г) $\dfrac{\operatorname{ctg}\alpha}{\operatorname{tg}\alpha + \cos\alpha} = \cos^2\alpha$.

Задание 4. Может ли для какого-нибудь угла α выполняться условие:

а) $\sin\alpha = \dfrac{40}{41}$ и $\cos\alpha = \dfrac{9}{41}$;

б) $\sin\alpha = \dfrac{3}{4}$ и $\cos\alpha = \dfrac{1}{4}$;

в) $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{5}{9}$ и $\dfrac{1}{\operatorname{tg}\alpha} = 1{,}8$;

г) $\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{2} - 1$ и $\dfrac{1}{\operatorname{tg}\alpha} = \sqrt{2} + 1$?

Задание 5. Известно, что $\sin\alpha = 0{,}8$ и $\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. Вычислите $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{ctg}\alpha$.

Задание 6. Известно, что $\cos\alpha = -\dfrac{2}{3}$ и $\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. Вычислите $\sin\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{ctg}\alpha$.

Задание 7. Известно, что $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$. Найдите:

а) $\cos\alpha$, если $\sin\alpha = -\frac{12}{13}$; б) $\sin\alpha$, если $\cos\alpha = 0{,}4$.

Задание 8. Известно, что $\operatorname{tg}\alpha = 2{,}4$ и $\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{3\pi}{2}$. Найдите $\sin\alpha$.

Задание 9. Известно, что $\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} = -\frac{24}{7}$ и $\pi < \alpha < 2\pi$. Найдите $\cos\alpha$ и $\operatorname{tg}\alpha$.

Задание 10. Могут ли синус и косинус одного и того же угла α быть равными соответственно:

а) $\frac{1}{3}$ и $-\frac{2}{3}$;

б) $-\frac{3}{\sqrt{34}}$ и $\frac{5}{\sqrt{34}}$;

в) 0 и 0?

Задание 11. Постройте график функции, заданной формулой:

а) $y = \cos^2 x + \sin^2 x$;

б) $y = (\sin x + \cos x)^2 + (\sin x - \cos x)^2$.

Задание 12. Докажите тождество:

а) $\sin^6\alpha + \cos^6\alpha + 3\sin^2\alpha\cos^2\alpha = 1$;

б) $\frac{\sin^2\alpha - \operatorname{tg}^2\alpha}{\cos^2\alpha - \operatorname{ctg}^2\alpha} = \operatorname{tg}^6\alpha$;

в) $\frac{1-(\sin\alpha + \cos\alpha)^2}{\sin\alpha\cos\alpha - \operatorname{ctg}\alpha} = 2\operatorname{tg}^2\alpha$;

г) $2(\sin^6\alpha + \cos^6\alpha) - 3(\sin^4\alpha + \cos^4\alpha) + 1 = 0$.

Задание 13. Упростите выражение:

а) $\sin^2\alpha(1+\operatorname{ctg}^2\alpha) + \cos^2\alpha(1+\operatorname{tg}^2\alpha)$;

б) $2\sin^2\alpha + 2\cos^2\alpha + \mathrm{tg}^2\alpha + \dfrac{1}{\mathrm{tg}^2\alpha}$;

в) $1 + \dfrac{1}{\mathrm{tg}^2\alpha}(\cos^2\alpha - 1) + \mathrm{tg}^2\alpha(\sin^2\alpha - 1)$;

г) $\left(\dfrac{1}{\cos\alpha} + \mathrm{tg}\,\alpha\right)\left(\dfrac{1}{\cos\alpha} - \mathrm{tg}\,\alpha\right)$.

Задание 14. Докажите, что при всех допустимых значениях α выражение принимает одно и то же значение:

а) $(\sin\alpha - \cos\alpha)^2 + 2\,\mathrm{tg}\,\alpha\cos^2\alpha$;

б) $\sin^4\alpha + \cos^4\alpha + \dfrac{2}{\mathrm{tg}^2\alpha} + \sin^4\alpha$;

в) $\dfrac{\sin^4\alpha - \cos^4\alpha}{1 + \mathrm{tg}^4\alpha} \cdot \mathrm{tg}^2\alpha + \sin^2\alpha$;

г) $\dfrac{1 - \sin^6\alpha - \cos^6\alpha}{1 - \sin^4\alpha - \cos^4\alpha}$.

Задание 15. Докажите тождество:

а) $\cos^4\alpha + \sin^2\alpha\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$;

б) $\left(1 - \dfrac{1}{\mathrm{tg}\,\alpha}\right)^2 + \left(1 + \dfrac{1}{\mathrm{tg}\,\alpha}\right)^2 = \dfrac{2}{\sin^2\alpha}$;

в) $3(\sin^4\alpha + \cos^4\alpha) - 2(\sin^6\alpha + \cos^6\alpha) = 1$;

г) $\sqrt{1 + 2\sin\alpha\cos\alpha} = |\cos\alpha + \sin\alpha|$;

д) $\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha + \sin\alpha} - \dfrac{\cos\alpha}{\cos\alpha - \sin\alpha} = \dfrac{1 + \mathrm{ctg}^2\alpha}{1 - \mathrm{ctg}^2\alpha}$;

е) $\dfrac{\mathrm{ctg}^2\alpha - \cos^2\alpha}{\mathrm{tg}^2\alpha - \sin^2\alpha} = \mathrm{ctg}^6\alpha$.

Задание 16. Докажите тождество:

а) $\dfrac{\mathrm{tg}^2\alpha - \mathrm{tg}^2\beta}{\mathrm{tg}^2\alpha\,\mathrm{tg}^2\beta} = \dfrac{\sin^2\alpha - \sin^2\beta}{\sin^2\alpha\sin^2\beta}$;

б) $\dfrac{1+2\sin\alpha\sin\alpha}{\sin^2\alpha-\cos^2\alpha} = \dfrac{\operatorname{tg}\alpha+1}{\operatorname{tg}\alpha-1}$;

в) $\dfrac{(1-\operatorname{tg}^2\alpha)^2}{4\operatorname{tg}^2\alpha} = \dfrac{1}{4\sin^2\alpha\cos^2\alpha}-1$;

г) $\dfrac{\sin^2\alpha}{\cos^2\beta}+\operatorname{tg}^2\beta\cos^2\alpha = \sin^2\alpha+\operatorname{tg}^2\beta$.

Задание 17. Найдите наибольшее и наименьшее значения выражения:

а) $1-(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)$;

б) $3-\sin\alpha\cos\alpha\operatorname{tg}\alpha$;

в) $1+4\cos^2\alpha+3\sin^2\alpha$;

г) $3-3\sin^2\alpha-4\cos^2\alpha$;

д) $3\sin\alpha+(\cos\alpha+3\sin\alpha)^2+(3\cos\alpha-\sin\alpha)^2$;

е) $8\operatorname{tg}\alpha\operatorname{ctg}\alpha-(\sin^2\alpha-\cos^2\alpha)$.

Задание 18. Известно, что $\sin\alpha+\cos\alpha = a\left(|a|\le\sqrt{2}\right)$. Найдите:

а) $\sin\alpha\cos\alpha$;

б) $\sin\alpha-\cos\alpha$;

в) $\sin^3\alpha+\cos^3\alpha$;

г) $\sin^4\alpha+\cos^4\alpha$.

Ваш помощник

К заданию 1. а) $\cos^2\alpha$; б) $-\sin^2\alpha$.

К заданию 2. а) $2\sin x$; б) $\cos x$; в) $\dfrac{1}{\sin^2\alpha}$; г) 1.

К заданию 5. $\cos\alpha = -0{,}6$; $\operatorname{tg}\alpha = -\dfrac{4}{3}$.

К заданию 6. $\sin\alpha = \dfrac{\sqrt{5}}{3}$; $\operatorname{tg}\alpha = -\dfrac{\sqrt{5}}{2}$.

К заданию 7. а) $\dfrac{5}{13}$; б) $-\sqrt{0{,}84}$.

УЭ-4. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ПО ТЕМЕ «КОСИНУС РАЗНОСТИ И КОСИНУС СУММЫ ДВУХ УГЛОВ»

Цель: актуализировать основные знания, умения и навыки, полученные на уроках математики по данной теме.

Теоретическая часть

Напомним, как по синусу и косинусу углов α и β можно найти косинус разности (или суммы) этих углов.

Для любых углов α и β справедливо равенство

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta.$$

Эту формулу называют *формулой косинуса разности двух углов*.

Косинус разности двух углов равен произведению косинусов этих углов плюс произведение синусов этих углов.

Пример 1. Вычислить $\cos 15°$.

Решение. Представим $15°$ в виде разности $45° - 30°$. Тогда

$$\cos 15° = \cos(45° - 30°) =$$

$$= \cos 45° \cos 30° + \sin 45° \sin 30° =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}.$$

Для любых углов α и β справедливо равенство

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta.$$

Косинус суммы двух углов равен произведению косинусов этих углов минус произведение синусов этих углов.

Пример 2. Вычислить $\cos 75°$.

Решение. Поскольку $75° = 45° + 30°$, то

$$\cos 75° = \cos(30° + 45°) =$$

$$= \cos 30° \cos 45° - \sin 30° \sin 45° =$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4}\left(\sqrt{3} - 1\right).$$

Для любого угла α справедливы равенства

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\sin\alpha,\ \sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\alpha,$$

$$\sin\beta=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right).$$

Практическая часть

Задание 1. Вычислите:

а) $\cos 105°$; б) $\cos 120°$.

Задание 2. Найдите значение выражения:

а) $\cos 107°\cos 17° + \sin 107°\sin 17°$;

б) $\cos 36°\cos 24° - \sin 36°\sin 24°$;

в) $\sin 3°\sin 42° - \cos 3°\cos 42°$;

г) $\sin 108°\sin 252° - \cos 252°\cos 108°$.

Задание 3. Упростите:

а) $\dfrac{\cos(\alpha+\beta)-\sin\alpha\sin\beta}{\cos(\alpha-\beta)+\sin\alpha\sin\beta}$;

б) $\dfrac{\cos(\alpha-\beta)-\cos\alpha\cos\beta}{\cos(\alpha+\beta)+\sin\alpha\sin\beta}$.

Задание 4. Докажите тождество:

а) $\operatorname{tg}\alpha+\dfrac{1}{\operatorname{tg}\beta}=\dfrac{\cos(\beta-\alpha)}{\sin\beta\cos\alpha}$;

б) $\dfrac{1}{\operatorname{tg}\alpha}-\operatorname{tg}\beta=\dfrac{\cos(\alpha+\beta)}{\sin\alpha\cos\beta}$;

в) $\dfrac{\operatorname{tg}38°-\operatorname{tg}6°}{\operatorname{tg}38°+\operatorname{tg}6°}=\dfrac{\sin 32°}{\sin 44°}$.

Задание 5. Вычислите:

а) $\cos\left(\dfrac{\pi}{6}+\alpha\right)$, если $\sin\alpha=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ и $\dfrac{\pi}{2}<\alpha<\pi$;

б) $\cos(\alpha - \beta)$, если $\cos\alpha = -\frac{1}{5}$, $\sin\beta = \frac{2}{5}$ и α и β — углы II четверти;

в) $\cos(\alpha + \beta)$, если $\cos\alpha = \frac{4}{5}$, $\sin\beta = \frac{5}{13}$ и α и β — углы I четверти.

Задание 6. Вычислите $\cos\alpha$, если $\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{4}$ и $\frac{7}{6}\pi < \alpha < \frac{3}{2}\pi$.

Задание 7. Докажите тождество:

а) $\cos^2\alpha - \sin^2\beta = \cos(\alpha - \beta)\cos(\alpha + \beta)$;

б) $\cos^2\alpha - 2\cos\alpha\cos\beta\cos(\alpha + \beta) + \cos^2(\alpha + \beta) = \sin^2\beta$.

Ваш помощник

К заданию 1. а) $\frac{\sqrt{3} - \sqrt{6}}{4}$; б) $-\frac{1}{2}$.

К заданию 2. а) 0; б) 0,5; в) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$; -1.

К заданию 5. а) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$; б) $\frac{\sqrt{21} + 4\sqrt{6}}{25}$; в) $\frac{33}{65}$.

К заданию 6. $-\frac{\sqrt{3} - \sqrt{15}}{8}$.

УЭ-5. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ПО ТЕМЕ «СИНУС СУММЫ И РАЗНОСТИ ДВУХ УГЛОВ»

Цель: актуализировать основные знания, умения и навыки, полученные на уроках математики по данной теме.

Теоретическая часть

Напомним формулы синуса суммы и разности двух углов.

Для любых углов α и β справедливо равенство

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta.$$

Синус суммы двух углов равен произведению синуса первого угла на косинус второго плюс произведение косинуса первого угла на синус второго угла.

Пример 1. Вычислить $\sin 75°$.

Решение. Имеем

$$\sin 75° = \sin(30° + 45°) =$$

$$= \sin 30° \cos 45° + \cos 30° \sin 45° =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}\left(1+\sqrt{3}\right)}{4}.$$

Для любых углов α и β справедливо равенство

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha \cos\beta - \cos\alpha \sin\beta.$$

Синус разности двух углов равен произведению синуса первого угла на косинус второго минус произведение косинуса первого угла на синус второго.

Пример 2. Вычислить $\sin 15°$.

Решение. Так как $15° = 45° - 30°$, то

$$\sin 15° = \sin(45° - 30°) =$$

$$= \sin 45° \cos 30° - \cos 45° \sin 30° =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}\left(\sqrt{3}-1\right)}{4}.$$

Практическая часть

Задание 1. Докажите, что $\sin 105° = \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$.

Задание 2. Найдите значение выражения:

а) $\sin 63° \cos 27° + \cos 63° \sin 27°$;

б) $\sin 51° \cos 21° - \cos 51° \sin 21°$;

в) $\sin 53° \cos 7° - \cos 53° \sin(-7°)$;

г) $\sin(-15°) \cos 75° + \cos 15° \sin 75°$.

Задание 3. Упростите выражение:

а) $\dfrac{\sin(\alpha+\beta)-\cos\alpha\sin\beta}{\sin(\alpha-\beta)+\cos\alpha\sin\beta}$; б) $\dfrac{\sin(\alpha-\beta)+\cos\alpha\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)-\sin\alpha\cos\beta}$.

Задание 4. Упростите выражение:

а) $\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)$; б) $\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)$.

Задание 5. Вычислите:

а) $\sin\left(\dfrac{\pi}{4}-\alpha\right)$, если $\cos\alpha=-0{,}5$ и $\dfrac{\pi}{2}<\alpha<\pi$;

б) $\sin(\alpha+\beta)$, если $\sin\alpha=\dfrac{3}{4}, \cos\beta=-\dfrac{1}{5}, \dfrac{\pi}{2}<\alpha<\pi, \pi<\beta<\dfrac{3\pi}{2}$;

в) $\sin(\alpha-\beta)$, если $\sin\alpha=0{,}6, \cos\beta=\dfrac{5}{13}, 0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}<\beta<\pi$.

Задание 6. Вычислите $\sin\alpha$, если $\sin\left(\alpha+\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{\sqrt{10}}{4}$ и $\dfrac{\pi}{4}<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$.

Задание 7. Докажите, что:

а) $\dfrac{1}{2}(\cos x+\sqrt{3}\sin x)=\cos\left(\dfrac{\pi}{3}-x\right)$;

б) $\cos 15^\circ-\sqrt{3}\sin 15^\circ=2\sin 45^\circ$.

Задание 8. Упростите:

а) $\cos 15^\circ+\sqrt{3}\sin 15^\circ$; б) $\sqrt{3}\cos\dfrac{\pi}{9}-\sin\dfrac{\pi}{9}$.

Задание 9. Докажите тождество:

а) $\dfrac{\sin 40^\circ\cos 15^\circ-\cos 40^\circ\sin 15^\circ}{\cos 15^\circ\cos 10^\circ-\sin 15^\circ\sin 10^\circ}=\operatorname{tg}25^\circ$;

б) $\dfrac{\sin 20^\circ\cos 25^\circ+\sin 25^\circ\cos 20^\circ}{\cos 51^\circ\cos 21^\circ+\sin 21^\circ\cos 39^\circ}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$.

Задание 10. Верно ли равенство:

а) $\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)=\sin^2\alpha-\sin^2\beta$;

б) $\sin(\alpha+\beta)\sin\beta+\cos(\alpha+\beta)\cos\beta=\cos\alpha$;

в) $\dfrac{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)}=\operatorname{tg}\alpha;$

г) $\dfrac{\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)}=\operatorname{tg}\beta?$

Задание 11. Докажите тождество:

а) $\sin(\alpha+\beta+\gamma)=\sin(\alpha+\beta)\cos\gamma+\cos(\alpha+\beta)\sin\gamma;$

б) $\cos(\alpha+\beta+\gamma)=\cos(\alpha+\beta)\cos\gamma-\sin(\alpha+\beta)\sin\gamma;$

в) $\dfrac{\sin(\alpha-\beta)}{\sin\alpha\sin\beta}+\dfrac{\sin(\beta-\gamma)}{\sin\beta\sin\gamma}+\dfrac{\sin(\gamma-\alpha)}{\sin\gamma\sin\alpha}=0.$

Задание 12. Докажите, что если α и β — углы I четверти, то $\sin(\alpha+\beta)<\sin\alpha+\sin\beta.$

Используя это неравенство, докажите:

а) $\sin 65^\circ+\sin 25^\circ>1;$

б) $\sin 35^\circ+\sin 75^\circ>0{,}5;$

в) $\sin 15^\circ+\sin 45^\circ>0{,}7;$

г) $1<\sin 75^\circ+\sin 15^\circ.$

Задание 13. При каких значениях α и β имеет место равенство $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha+\sin\beta?$

Ваш помощник

К заданию 2. а) 1; б) 0,5; в) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$; г) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

К заданию 3. а) 1; б) $\dfrac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\beta}$.

К заданию 4. а) $2\sin\alpha\cos\beta$; б) $2\cos\alpha\sin\beta$.

К заданию 5. а) $-\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$; б) $\dfrac{2\sqrt{42}-3}{20}$; в) $-\dfrac{56}{65}$; г) -2.

К заданию 6. $\dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{4}$.

К заданию 8. а) $\sqrt{2}$; б) $2\cos 50^\circ$.

К заданию 10. а) Верно; б) верно.

К заданию 13. *Указание.* $\cos\alpha=1$ и $\cos\beta=1$. Это возможно, когда $\alpha=\beta=\pi m,\ m\in\boldsymbol{Z}$.

УЭ-6. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ПО ТЕМЕ «ТАНГЕНС СУММЫ И РАЗНОСТИ ДВУХ УГЛОВ»

Цель: актуализировать основные знания, умения и навыки, полученные на уроках математики по данной теме.

Теоретическая часть

Напомним, как по тангенсу двух углов можно найти тангенс их суммы и разности.

Для любых углов α и β, таких, что $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$, $\beta \neq \frac{\pi}{2} + \pi m$, $m \in \boldsymbol{Z}$, и $\alpha + \beta \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$, справедлива формула

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta}.$$

Тангенс суммы двух углов равен сумме тангенсов этих углов, деленной на единицу, минус произведение тангенсов этих углов.

Пример. Вычислить $\operatorname{tg} 105^\circ$.

Решение. Так как $105^\circ = 45^\circ + 60^\circ$, получим:

$$\operatorname{tg} 105^\circ = \operatorname{tg}(45^\circ + 60^\circ) =$$

$$= \frac{\operatorname{tg} 45^\circ + \operatorname{tg} 60^\circ}{1 - \operatorname{tg} 45^\circ \operatorname{tg} 60^\circ} = \frac{1 + \sqrt{3}}{1 - \sqrt{3}} =$$

$$= \frac{(1 + \sqrt{3})(1 + \sqrt{3})}{(1 - \sqrt{3})(1 + \sqrt{3})} = \frac{1 + 2\sqrt{3} + 3}{1 - 3} = -(2 + \sqrt{3}).$$

Для любых углов α и β, таких, что $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$, $\beta \neq \frac{\pi}{2} + \pi m$, $m \in \boldsymbol{Z}$, и $\alpha - \beta \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$, справедлива формула

$$\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{1 + \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta}.$$

Тангенс разности двух углов равен разности тангенсов этих углов, деленной на единицу, плюс произведение тангенсов этих углов.

Практическая часть

Задание 1. Вычислите: а) $\operatorname{tg} 15°$; б) $\operatorname{tg} 195°$.

Задание 2. Зная, что $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{2}$ и $\operatorname{tg}\beta = \frac{1}{3}$, найдите:

а) $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)$;

б) $\operatorname{tg}(\alpha-\beta)$.

Задание 3. Вычислите:

а) $\dfrac{\operatorname{tg} 55° - \operatorname{tg} 25°}{1+\operatorname{tg} 55° \operatorname{tg} 25°}$;

б) $\dfrac{\operatorname{tg} 32° + \operatorname{tg} 13°}{1-\operatorname{tg} 32° \operatorname{tg} 13°}$;

в) $\dfrac{\operatorname{tg}\frac{4\pi}{15} + \operatorname{tg}\frac{\pi}{15}}{1-\operatorname{tg}\frac{\pi}{15}\operatorname{tg}\frac{4\pi}{15}}$;

г) $\dfrac{\sqrt{3} - \operatorname{tg} 15°}{1+\sqrt{3}\operatorname{tg} 15°}$.

Задание 4. Вычислите:

а) $\dfrac{\operatorname{tg}^2\frac{5\pi}{24} - \operatorname{tg}^2\frac{\pi}{24}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{5\pi}{24}\operatorname{tg}^2\frac{\pi}{24}}$;

б) $\dfrac{\operatorname{tg}^2\frac{7\pi}{24}\operatorname{tg}^2\frac{\pi}{24} - 1}{\operatorname{tg}^2\frac{7\pi}{24} - \operatorname{tg}^2\frac{\pi}{24}}$.

Задание 5. Докажите, что $\alpha+\beta = \frac{\pi}{4}$, если $\operatorname{tg}\alpha = \frac{3}{7}$, $\operatorname{tg}\beta = \frac{2}{5}$, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ и $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$.

Задание 6. Найдите $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)$ и $\operatorname{tg}(\alpha-\beta)$, если $\sin\alpha = -\frac{4}{5}$, $\cos\beta = \frac{5}{13}$, а углы α и β из одной четверти.

Задание 7. Верно ли равенство:

а) $\dfrac{1-\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\alpha+1} = \operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4}-\alpha\right)$;

б) $\dfrac{1+\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}\alpha} = \operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4}+\alpha\right)$;

в) $\dfrac{\operatorname{tg}^2\alpha-\operatorname{tg}^2\beta}{1-\operatorname{tg}^2\alpha\operatorname{tg}^2\beta} = \operatorname{tg}(\alpha+\beta)\operatorname{tg}(\alpha-\beta)$?

Задание 8. Докажите тождество:

а) $\dfrac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}(\alpha+\beta)}+\dfrac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}(\alpha-\beta)} = 2$;

б) $\dfrac{\operatorname{tg}(\alpha-\beta)+\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}(\alpha+\beta)-\operatorname{tg}\beta} = \dfrac{\cos(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha-\beta)}$;

в) $\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4}+\alpha\right)-\operatorname{tg}\alpha = 1+\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4}+\alpha\right)\operatorname{tg}\alpha$;

г) $\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta+(\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta)\operatorname{ctg}(\alpha+\beta) = 1$;

д) $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)-(\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta) = \operatorname{tg}(\alpha-\beta)\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta$.

Ваш помощник

К заданию 1. а) $2-\sqrt{3}$; б) $2-\sqrt{3}$.

К заданию 2. а) 1; б) $\frac{1}{7}$.

К заданию 3. а) $\frac{\sqrt{3}}{3}$; б) 1; в) $\sqrt{3}$; 1.

К заданию 4. а) $\frac{\sqrt{3}}{3}$; б) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$.

К заданию 6. $\frac{56}{33}$; $\frac{16}{63}$.

К заданию 7. а) Верно.

УЭ-7. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ПО ТЕМЕ «ФОРМУЛЫ ПРИВЕДЕНИЯ»

Цель: актуализировать основные знания, умения и навыки, полученные на уроках математики по данной теме.

Теоретическая часть

Напомним формулы приведения, записав их в виде таблицы.

β	$\pi+\alpha$	$\pi-\alpha$	$2\pi+\alpha$	$2\pi-\alpha$
$\sin\beta$	$-\sin\alpha$	$\sin\alpha$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$
$\cos\beta$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$\cos\alpha$	$\cos\alpha$
$\mathrm{tg}\,\beta$	$\mathrm{tg}\,\alpha$	$-\mathrm{tg}\,\alpha$	$\mathrm{tg}\,\alpha$	$-\mathrm{tg}\,\alpha$
$\mathrm{ctg}\,\beta$	$\mathrm{ctg}\,\alpha$	$-\mathrm{ctg}\,\alpha$	$\mathrm{ctg}\,\alpha$	$-\mathrm{ctg}\,\alpha$

β	$\frac{\pi}{2}+\alpha$	$\frac{\pi}{2}-\alpha$	$\frac{3}{2}\pi+\alpha$	$\frac{3}{2}\pi-\alpha$
$\sin\beta$	$\cos\alpha$	$\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$
$\cos\beta$	$-\sin\alpha$	$\sin\alpha$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$
$\mathrm{tg}\,\beta$	$-\mathrm{ctg}\,\alpha$	$\mathrm{ctg}\,\alpha$	$-\mathrm{ctg}\,\alpha$	$\mathrm{ctg}\,\alpha$
$\mathrm{ctg}\,\beta$	$-\mathrm{tg}\,\alpha$	$\mathrm{tg}\,\alpha$	$-\mathrm{tg}\,\alpha$	$\mathrm{tg}\,\alpha$

Важно подметить закономерности и на их основе запомнить правила, *облегчающие применение формул приведения*:

1) в правой части каждого равенства ставят тот знак, который имеет выражение в левой части, если считать $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$;

2) для углов $\pi\pm\alpha$, $2\pi\pm\alpha$ в обеих частях равенства стоит или синус, или косинус, или тангенс, или котангенс; для углов $\frac{\pi}{2}\pm\alpha$ и $\frac{3\pi}{2}\pm\alpha$ синус меняется на косинус, косинус — на синус, тангенс — на котангенс, котангенс — на тангенс.

Любая из формул приведения может быть выведена с помощью сложения. Например:

$$\sin(\pi+\alpha)=\sin\pi\cos\alpha+\cos\pi\sin\alpha=$$

$$=0\cos\alpha-\sin\alpha=-\sin\alpha.$$

$$\cos(\pi+\alpha)=\cos\pi\cos\alpha-\sin\pi\sin\alpha=$$

$$=-1\cos\alpha-0\sin\alpha=-\cos\alpha.$$

$$\operatorname{tg}(\pi+\alpha)=\frac{\sin(\pi+\alpha)}{\cos(\pi+\alpha)}=\frac{-\sin\alpha}{-\cos\alpha}=\operatorname{tg}\alpha.$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=\sin\frac{\pi}{2}\cos\alpha+\cos\frac{\pi}{2}\sin\alpha=$$

$$=1\cos\alpha+0\sin\alpha=\cos\alpha.$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=\cos\frac{\pi}{2}\cos\alpha-\sin\frac{\pi}{2}\sin\alpha=$$

$$=0\cos\alpha-1\sin\alpha=-\sin\alpha.$$

Аналогично выводятся остальные формулы приведения.

Пример 1. Упростить выражение $\sin\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)$, пользуясь формулами приведения.

Решение. Если считать, что α — угол I четверти, то $\frac{3\pi}{2}+\alpha$ будет углом IV четверти, в которой синус отрицателен. Значит, в правой части равенства следует поставить знак «минус». Для угла $\frac{3\pi}{2}+\alpha$ синус заменяется на косинус. Поэтому

$$\sin\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)=-\cos\alpha.$$

С помощью формул приведения нахождение значений синуса, косинуса, тангенса любого угла можно свести к нахождению их значений для угла от 0 до $\frac{\pi}{4}$.

Пример 2. Найти значение $\cos\frac{14\pi}{3}$.

Решение. Имеем:

$$\cos\frac{14\pi}{3} = \cos\left(4\pi + \frac{2\pi}{3}\right) = \cos\frac{2\pi}{3} = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) =$$

$$= -\cos\frac{\pi}{3} = -0{,}5.$$

Формулы приведения применяются и в случае, если углы записаны в градусной мере. Например: $\sin(270^\circ + m^\circ) = -\cos m^\circ$ и т. д.

Пример 3. Найти значение $\sin 1320^\circ$.

Решение. Используя трижды формулу приведения

$$\sin(360^\circ + m^\circ) = -m^\circ,$$

получаем:

$$\sin 1320^\circ = \sin(1320^\circ - 360^\circ - 360^\circ - 360^\circ) =$$

$$= \sin(1320^\circ - 360^\circ \cdot 3) = \sin 240^\circ.$$

Далее по формулам приведения имеем:

$$\sin 240^\circ = \sin(270^\circ - 30^\circ) = -\cos 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Практическая часть

Задание 1. Выразите через $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$ или $\operatorname{ctg}\alpha$:

а) $\sin(\pi - \alpha)$;

б) $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$;

в) $\operatorname{tg}\left(\frac{3}{2}\pi - \alpha\right)$;

г) $\operatorname{tg}(2\pi + \alpha)$;

д) $\sin(2\pi - \alpha)$;

е) $\cos(2\pi + \alpha)$;

ж) $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$;

з) $\sin\left(\frac{3}{2}\pi + \alpha\right)$;

и) $\operatorname{tg}(360^\circ - \alpha)$;

к) $\cos(270^\circ - \alpha)$;

л) $\sin(90^\circ + \alpha)$;

м) $\operatorname{tg}(180^\circ - \alpha)$.

Задание 2. Выразите через $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ или $\operatorname{tg}\alpha$:

а) $\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$;
б) $\cos(\pi+\alpha)$;
в) $\operatorname{tg}\left(\frac{3}{2}\pi-\alpha\right)$;
г) $\operatorname{tg}(2\pi+\alpha)$;
д) $\sin(\pi+\alpha)$;
е) $\cos\left(\frac{3}{2}\pi+\alpha\right)$;
ж) $\sin(360^\circ+\alpha)$;
з) $\cos(270^\circ-\alpha)$;
и) $\operatorname{tg}(180^\circ-\alpha)$.

Задание 3. Вычислите:

а) $\sin 135^\circ$;
б) $\operatorname{tg} 150^\circ$;
в) $\cos 240^\circ$;
г) $\sin 225^\circ$;
д) $\cos 150^\circ$;
е) $\operatorname{tg} 210^\circ$;
ж) $\sin 330^\circ$;
з) $\operatorname{tg} 315^\circ$;
и) $\sin(-120^\circ)$;
к) $\cos(-210^\circ)$;
л) $\sin 150^\circ$;
м) $\operatorname{tg}(-315^\circ)$.

Задание 4. Выразите $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ и $\operatorname{tg}\alpha$ через синус, косинус, тангенс наименьшего положительного угла, если:

а) $\alpha=143^\circ$;
б) $\alpha=220^\circ$;
в) $\alpha=290^\circ$;
г) $\alpha=-\frac{7}{6}\pi$;
д) $\alpha=\frac{10\pi}{3}$;
е) $\alpha=-\frac{17}{5}\pi$;
ж) $\alpha=0{,}8\pi$;
з) $\alpha=-0{,}9\pi$;
и) $\alpha=-\frac{20}{7}\pi$.

Задание 5. Докажите тождество:

а) $\sin\alpha-\dfrac{\cos^2(180^\circ-\alpha)}{\cos(\alpha-270^\circ)}=\dfrac{1}{\sin\alpha}$;

б) $\cos\alpha-\dfrac{\cos^2(\alpha-90^\circ)}{\sin(\alpha-90^\circ)}=\dfrac{1}{\cos\alpha}$;

в) $\dfrac{\operatorname{tg}(\pi-\alpha)}{\cos(\pi+\alpha)}\cdot\dfrac{\sin\left(\frac{3}{2}\pi+\alpha\right)}{\operatorname{tg}\left(\frac{3}{2}\pi+\alpha\right)}=\operatorname{tg}^2\alpha$.

Задание 6. Вычислите:

а) $\dfrac{\cos^2(-135^\circ)+\sin^2(-300^\circ)}{\operatorname{tg}(-225^\circ)+\cos(-240^\circ)}$; б) $\dfrac{6\cos^2(-240^\circ)+\operatorname{ctg}210^\circ}{\sin(-300^\circ)+\cos180^\circ}$.

Задание 7. Упростите выражение:

$$\operatorname{tg}\left(\frac{3}{2}\pi-\alpha\right)\operatorname{tg}(\pi+\alpha)-\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\sin(\pi+\alpha).$$

Задание 8. Что больше:

а) $\sin 26^\circ$ или $\cos 40^\circ$; б) $\sin 0{,}63$ или $\cos 0{,}87$?

Задание 9. Докажите тождество:

а) $\dfrac{\sin(\pi-\alpha)\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}{\cos(1{,}5\pi+\alpha)\dfrac{1}{\operatorname{tg}(\pi-\alpha)}}=-1$;

б) $\dfrac{\operatorname{tg}(\pi-\alpha)\sin(1{,}5\pi+\alpha)}{\cos(\pi+\alpha)\operatorname{tg}(1{,}5\pi+\alpha)}=\operatorname{tg}^2\alpha$;

в) $\dfrac{\cos^2\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)}{\operatorname{tg}^2(\alpha-2\pi)}+\dfrac{\cos^2(-\alpha)}{\operatorname{tg}^2\left(\alpha-\frac{3\pi}{2}\right)}=1$;

г) $\dfrac{\sin(\pi+\alpha)}{\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}\cdot\dfrac{\operatorname{tg}(\alpha-\pi)}{\dfrac{1}{\operatorname{tg}(\pi+\alpha)}}\cdot\dfrac{\cos(2\pi-\alpha)}{\cos\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)}=\sin\alpha$;

д) $\dfrac{\sin(\alpha-\pi)\cos(\alpha-2\pi)\sin(2\pi-\alpha)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\dfrac{1}{\operatorname{tg}(\pi-\alpha)}\dfrac{1}{\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)}}=\sin^2\alpha$.

Задание 10. Докажите, что если A, B и C — углы треугольника, то:

а) $\sin\dfrac{A+B}{2}=\cos\dfrac{C}{2}$; б) $\operatorname{tg}\left(\dfrac{A}{2}+\dfrac{B}{2}\right)=\operatorname{ctg}\dfrac{C}{2}$;

в) $\sin(A+B)=\sin C$; г) $\cos(A+B)=-\cos C$.

Задание 11. Докажите тождество:

а) $\sin(45^\circ+\alpha)=\cos(45^\circ-\alpha)$;

б) $\cos(45^\circ+\alpha)=\sin(45^\circ-\alpha)$;

в) $\operatorname{tg}(45^\circ+\alpha)=\dfrac{1}{\operatorname{tg}(45^\circ-\alpha)}$.

Задание 12. Докажите, что

$$\operatorname{tg}1^\circ\cdot\operatorname{tg}2^\circ\cdot\operatorname{tg}3^\circ\cdot\ldots\cdot\operatorname{tg}87^\circ\cdot\operatorname{tg}88^\circ\cdot\operatorname{tg}89^\circ=1.$$

Ваш помощник

К заданию 1. а) $\cos\alpha$; б) $\sin\alpha$; в) $\dfrac{1}{\operatorname{tg}\alpha}$; г) $\dfrac{1}{\operatorname{tg}\alpha}$.

К заданию 2. а) $\cos\alpha$; б) $-\cos\alpha$; г) $\dfrac{1}{\operatorname{tg}\alpha}$.

К заданию 3. а) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$; б) $-\sqrt{3}$; в) $-0{,}5$; г) $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

К заданию 4. а) $\sin37^\circ$; $-\cos37^\circ$; $\operatorname{tg}37^\circ$; $-\dfrac{1}{\operatorname{tg}37^\circ}$.

К заданию 6. а) $-\dfrac{5}{6}$; б) -3.

К заданию 7. $\cos^2\alpha$.

УЭ-8. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ПО ТЕМЕ «ФОРМУЛЫ ДВОЙНОГО И ТРОЙНОГО УГЛОВ»

Цель: углубить и расширить знания, умения и навыки по данной теме.

Теоретическая часть

Напомним формулы двойного аргумента.

Для любого угла α справедливо равенство

$$\sin2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha. \qquad (1)$$

Синус 2α равен удвоенному произведению синуса α на косинус α.

Для любого угла α справедливо равенство

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha. \qquad (2)$$

Для любого угла α, такого, что $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$, и $\alpha \neq \pm\frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$, $n \in \boldsymbol{Z}$, имеет место равенство

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2\alpha}. \qquad (3)$$

Для любого угла α имеют место равенства

$$\sin 3\alpha = \sin\alpha\,(3 - 4\sin^2\alpha); \qquad (4)$$

$$\cos 3\alpha = \cos\alpha\,(4\cos^2\alpha - 3). \qquad (5)$$

Выведем формулу (4):

$$\sin 3\alpha = \sin(2\alpha + \alpha) = \sin 2\alpha\cos\alpha + \cos 2\alpha\sin\alpha =$$
$$= 2\sin\alpha\cos^2\alpha + \cos^2\alpha\sin\alpha - \sin^3\alpha =$$
$$= 3\sin\alpha\cos^2\alpha - \sin^3\alpha = \sin\alpha\,(3\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) =$$
$$= \sin\alpha\,(3 - 4\sin^2\alpha).$$

Формулу (5) выведите самостоятельно.

Заметим, что формулы (4) и (5) называют *формулами тройного угла*.

Практическая часть

Задание 1. Упростите выражение:

а) $\frac{\sin 2\alpha}{\cos\alpha}$; б) $\frac{4\cos^2\alpha}{\sin 2\alpha}$;

в) $\frac{\cos 2\alpha}{\sin\alpha + \cos\alpha}$; г) $\frac{\cos\alpha}{\cos\frac{\alpha}{2} - \sin\frac{\alpha}{2}} - \sin\alpha$;

д) $\cos^2\alpha - \cos 2\alpha$; е) $\cos 2\alpha + \sin^2\alpha$.

Задание 2. Сократите дробь:

а) $\frac{\sin 80^\circ}{\sin 40^\circ}$; б) $\frac{\sin 200^\circ}{\cos 100^\circ}$;

в) $\frac{\cos 100^\circ}{\cos 50^\circ - \sin 50^\circ}$; г) $\frac{\cos 72^\circ - \sin^2 36^\circ}{\cos 36^\circ}$.

Задание 3. Вычислите:

а) $4\sin 15°\cos 15°$;

б) $\sin 22°30'\cos 22°30'$;

в) $\sin 15°\sin 75°$;

г) $8\sin\dfrac{\pi}{12}\sin\dfrac{5\pi}{12}$;

д) $\sin^2 22°30' - \cos^2 22°30'$;

е) $\dfrac{\operatorname{tg} 22°30'}{1-\operatorname{tg}^2 22°30'}$;

ж) $\dfrac{1-\operatorname{tg}^2\dfrac{\pi}{6}}{\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{6}}$.

Задание 4. Вычислите:

а) $\sin 2\alpha$, если $\cos\alpha = -0{,}8$ и $\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \pi$;

б) $\cos 2\alpha$, если $\sin\alpha = -0{,}6$ и $\dfrac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$;

в) $\operatorname{tg} 2\alpha$, если $\cos\alpha = \dfrac{2}{3}$ и $\dfrac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$.

Задание 5. Пусть $\sin\alpha = 0{,}8$ и $90° < \alpha < 180°$. Найдите $\sin 2\alpha$, $\cos 2\alpha$.

Задание 6. Вычислите:

а) $\sin 2\alpha$, если $\sin\alpha + \cos\alpha = \dfrac{1}{3}$;

б) $\sin 2\alpha$, если $\sin\alpha + \cos\alpha = 0{,}5$.

Задание 7. Вычислите:

а) $\sin 2\alpha$, $\cos 2\alpha$, $\operatorname{tg} 2\alpha$, если $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{1}{3}$;

б) $\sin 2\beta$, $\cos 2\beta$, если $\operatorname{tg}\beta = -\dfrac{3}{2}$.

Задание 8. Верно ли равенство:

а) $\sin^4\alpha - \cos^4\alpha = \cos 2\alpha$;

б) $\cos^4\alpha + \sin^4\alpha = 1 - \dfrac{1}{2}\cos^2 2\alpha$;

в) $\operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{tg}\alpha = 2\operatorname{ctg}2\alpha$;

г) $\dfrac{\sin 4\alpha}{\sin 2\alpha} - \dfrac{\cos 4\alpha}{\cos 2\alpha} = \dfrac{1}{\cos 2\alpha}$;

д) $\dfrac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha} = \operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}$;

е) $\dfrac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} = \operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}$?

Задание 9. Докажите тождество:

а) $\cos^4 2\alpha - \sin^4 2\alpha = \cos 4\alpha$;

б) $\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = 2\operatorname{ctg}2\alpha$;

в) $\sin 2\alpha - \operatorname{tg}\alpha = \cos 2\alpha \operatorname{tg}\alpha$;

г) $\dfrac{\sin 2x + \cos 2x + 1}{\sin 2x - \cos 2x + 1} = \dfrac{1}{\operatorname{tg} x}$.

Задание 10. Пусть $\cos(\alpha+\beta) = 0{,}3$, $\cos(\alpha-\beta) = 0{,}8$. Найдите $\sin\alpha \cdot \sin\beta$.

Задание 11. Найдите $\sin\alpha\cos\alpha$, если $\sin\alpha - \cos\alpha = \dfrac{1}{3}$.

Задание 12. Пусть $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$. Докажите неравенство $\sin\alpha\cos\alpha < \dfrac{1}{2}$.

Задание 13. Докажите неравенство:

а) $\sin 2\alpha < 2\cos\alpha$, если $-\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$;

б) $\sin 2\alpha < 2\sin\alpha$, если $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$.

Задание 14. Что больше: $\operatorname{tg}2\alpha$ или $2\operatorname{tg}\alpha$, если $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{4}$?

Задание 15. Найдите наибольшее и наименьшее значения выражения:

а) $7 - 8\sin x\cos x$;

б) $2(\sin x + \cos x)^2$.

Задание 16. Докажите тождество:

а) $\sin 10^\circ \cos 20^\circ \cos 40^\circ = \dfrac{1}{8}$;

б) $16\cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 60^\circ \cos 80^\circ = 1$.

Задание 17. Докажите тождество:

а) $\operatorname{tg} 3\alpha = \dfrac{3\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}^3\alpha}{1 - 3\operatorname{tg}^2\alpha}$; б) $\dfrac{\sin 3\alpha}{\sin\alpha} = 2 + \dfrac{\cos 3\alpha}{\cos\alpha}$;

в) $\dfrac{\operatorname{tg}^2 2\alpha - \operatorname{tg}^2\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 2\alpha \operatorname{tg}^2\alpha} = \operatorname{tg} 3\alpha \operatorname{tg}\alpha$.

Ваш помощник

К заданию 1. а) $2\sin\alpha$; б) $\dfrac{2}{\operatorname{tg}\alpha}$.

К заданию 2. а) $2\cos 40°$; б) $2\sin 100°$.

К заданию 3. а) 1; б) $\dfrac{\sqrt{2}}{4}$; в) $\dfrac{1}{4}$.

К заданию 4. а) –0,96; б) 0,28; г) $4\sqrt{5}$.

К заданию 5. $\sin 2\alpha = -0{,}96$; $\cos 2\alpha = -0{,}28$.

К заданию 6. а) $-\dfrac{8}{9}$; б) –0,75.

УЭ-9. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ПО ТЕМЕ «ФОРМУЛЫ ПОНИЖЕНИЯ СТЕПЕНИ И ФОРМУЛЫ ПОЛОВИННОГО УГЛА»

Цель: актуализировать основные знания, умения и навыки, полученные на уроках математике по данной теме.

Теоретическая часть

Формулы понижения степени. Напомним, что формулы

$$\cos^2\alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}, \qquad (1)$$

$$\sin^2\alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2} \qquad (2)$$

называют формулами понижения степени.

Формулы половинного угла. Если же в формулах (1) и (2) вместо α взять $\frac{\alpha}{2}$, то получим:

$$\cos^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1+\cos\alpha}{2},$$

$$\sin^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{2},$$

откуда:

$$\left|\sin\frac{\alpha}{2}\right|=\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}; \tag{3}$$

$$\left|\cos\frac{\alpha}{2}\right|=\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}; \tag{4}$$

$$\left|\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\right|=\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}; \tag{5}$$

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}; \tag{6}$$

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}. \tag{7}$$

Формулы (6)—(7) можно вывести следующим образом:

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}=\frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{2\cos^2\frac{\alpha}{2}}=\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha};$$

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}=\frac{2\sin^2\frac{\alpha}{2}}{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}=\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}.$$

Формулы выражения $\sin\alpha$***,*** $\cos\alpha$ ***и*** $\operatorname{tg}\alpha$ ***через*** $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$***.*** Следующие формулы имеют важное значение в курсе математики, так как они дают рациональные выражения $\sin\alpha, \cos\alpha$ и $\operatorname{tg}\alpha$ через $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$:

$$\sin\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}} \quad \left(\frac{\alpha}{2} \neq \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}\right);$$

$$\cos\alpha = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}} \quad \left(\frac{\alpha}{2} \neq \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}\right);$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}} \quad \left(\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi k \text{ и } \frac{\alpha}{2} \neq \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}\right).$$

Практическая часть

Задание 1. Докажите тождество:

а) $\sin^2 3\alpha - \sin^2 2\alpha = \sin 5\alpha \sin\alpha;$

б) $\dfrac{\sin^2\alpha - \sin^2\beta}{\cos^2\alpha - \cos^2\beta} = \operatorname{tg}(\alpha+\beta)\operatorname{tg}(\alpha-\beta);$

в) $\dfrac{\cos 2\alpha - \sin^2\alpha}{\cos\alpha} = \cos 3\alpha;$

г) $\sin^2\left(\dfrac{9\pi}{8} + \dfrac{\alpha}{4}\right) - \sin^2\left(\dfrac{7\pi}{8} + \dfrac{\alpha}{4}\right) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\sin\dfrac{\alpha}{2};$

д) $\cos^2(\alpha + 2\beta) + \sin^2(\alpha - 2\beta) - 1 = -\sin 2\alpha \sin 4\beta.$

Задание 2. Известно, что $\cos x = \dfrac{3}{4}$ и $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$. Вычислите: $\sin\dfrac{x}{2}$, $\cos\dfrac{x}{2}$.

Задание 3. Докажите тождество:

а) $1 + \cos\alpha = 2\cos^2\dfrac{\alpha}{2};$

б) $1 - \cos\alpha = 2\sin^2\dfrac{\alpha}{2}.$

Задание 4. Найдите $\cos\dfrac{\pi}{8}$.

Задание 5. Докажите тождество:

а) $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}$; б) $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}$.

Задание 6. Вычислите: $\sin^4 x + \cos^4 x$, если известно, что $\cos 2x = \frac{5}{13}$.

Задание 7. Упростите выражение:

а) $\dfrac{1-2\sin^2\frac{\alpha}{2}}{2\cos^2\frac{\alpha}{2}-1}$; б) $2\sin^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{3\alpha}{2}\right)-1$;

в) $2\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{3\alpha}{2}\right)-1$; г) $\dfrac{1-2\cos\frac{\alpha}{2}+\cos\alpha}{1+2\cos\frac{\alpha}{2}+\cos\alpha}$;

д) $\dfrac{1-2\sin\frac{\alpha}{2}-\cos\alpha}{1+2\sin\frac{\alpha}{2}-\cos\alpha}$; е) $2\sin^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)+\sin\alpha$.

Задание 8. Дано: $\cos\alpha = \frac{7}{9}$, $\frac{3}{2}\pi < \alpha < 2\pi$. Вычислите: $\sin\frac{\alpha}{2}$, $\cos\frac{\alpha}{2}$, $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$.

Задание 9. Дано: $\sin 2\alpha = -0{,}6$, $90^\circ < \alpha < 135^\circ$. Вычислите: $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$.

Задание 10. Вычислите $\sin\frac{\alpha}{2}$, $\cos\frac{\alpha}{2}$ и $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$, если $\cos\alpha = 0{,}8$ и $\pi \le \alpha \le 2\pi$.

Задание 11. Найдите $\sin\frac{\alpha}{2}$, $\cos\frac{\alpha}{2}$ и $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$, если:

а) $\cos\alpha = -\frac{12}{13}$, $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$;

б) $\cos\alpha = 0{,}6$, $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$.

Задание 12. Вычислите:

а) $\sin\alpha$, если $\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2} = 2$;

б) $\cos\alpha$, если $\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2} = 3$;

в) $\operatorname{tg}\alpha$, если $\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2} = \sqrt{3}$;

г) $\dfrac{5\cos\alpha - 3}{10\sin\alpha + 1}$, если $\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2} = 3$.

Задание 13. Докажите тождество:

а) $\dfrac{2\sin x - \sin 2x}{2\sin x - \sin 2x} = \operatorname{tg}^2\dfrac{x}{2}$;

б) $\dfrac{\sin 2x}{1+\cos 2x}\cdot\dfrac{\cos x}{1+\cos x} = \operatorname{tg}\dfrac{x}{2}$.

Ваш помощник

К заданию 2. $\cos\dfrac{x}{2} = \dfrac{\sqrt{14}}{4}$; $\sin\dfrac{x}{2} = \dfrac{\sqrt{2}}{4}$.

К заданию 4. $\sqrt{\dfrac{2+\sqrt{2}}{4}}$.

К заданию 6. $\dfrac{97}{169}$.

К заданию 7. а) 1; б) $\sin 3\alpha$; в) $\sin 3\alpha$; г) $-\operatorname{tg}^2\dfrac{\alpha}{4}$; д) $-\operatorname{tg}^2\left(\dfrac{\alpha}{4} - \dfrac{\pi}{4}\right)$; е) 1.

К заданию 8. $\sin\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{1}{3}$; $\cos\dfrac{\alpha}{2} = -\dfrac{2\sqrt{2}}{4}$; $\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2} = -\dfrac{\sqrt{2}}{4}$.

УЭ-10. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ПО ТЕМЕ «СУММА И РАЗНОСТЬ СИНУСОВ И КОСИНУСОВ»

Цель: актуализировать основные знания, умения и навыки, полученные на уроках математике по данной теме.

Теоретическая часть

Напомним основные формулы суммы и разности синусов и косинусов.

Для любых углов α и β справедливы равенства:

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2},$$

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}.$$

Сумма синусов двух углов равна удвоенному произведению синуса полусуммы этих углов на косинус их полуразности; разность синусов двух углов равна удвоенному произведению синуса полуразности этих углов на косинус их полусуммы.

Для любых углов α и β справедливы равенства:

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2},$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

Сумма косинусов двух углов равна удвоенному произведению косинуса полусуммы этих углов на косинус их полуразности; разность косинусов двух углов равна взятому со знаком «минус» удвоенному произведению синуса полусуммы этих углов на синус их полуразности.

Практическая часть

Задание 1. Вычислите:

а) $\sin 75^\circ + \sin 15^\circ$; б) $\sin\frac{5\pi}{12} - \sin\frac{\pi}{12}$;

в) $\cos 75^\circ + \cos 15^\circ$; г) $\cos\frac{5\pi}{12} - \cos\frac{\pi}{12}$.

Задание 2. Преобразуйте в произведение выражение:

а) $\sin 44^\circ + \sin 16^\circ$; б) $\sin 7\alpha - \sin\alpha$;

в) $\cos 33^\circ + \cos 23^\circ$; г) $\cos 3 - \cos 7$;

д) $\sin 40^\circ + \sin 20^\circ$; е) $\cos\frac{\pi}{5} - \cos\frac{7\pi}{10}$;

ж) $\sin 20^\circ + \sin 50^\circ$; з) $\sin^2 5\alpha - \sin^2 3\alpha$.

Задание 3. Докажите тождество:

а) $\frac{\sin x + \sin 3x}{\cos x + \cos 3x} = \operatorname{tg} 2x$;

б) $\dfrac{\sin x + \sin 2x + \sin 3x}{\cos x + \cos 2x + \cos 3x} = \operatorname{tg} 2x;$

в) $\dfrac{\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)} = \operatorname{tg}\alpha;$

г) $\dfrac{\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)}{\sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta)} = \operatorname{tg}\alpha.$

Задание 4. Преобразуйте в произведение:

а) $1 + \sin\alpha + \cos\alpha;$ б) $1 - \sin\alpha - \cos\alpha;$

в) $\sin\alpha + \sin(\alpha+\beta) + \sin\beta;$ г) $\cos\alpha + \sin(\alpha+\beta) + \cos\beta.$

Задание 5. Представьте в виде произведения:

а) $\sin\alpha + \cos\beta;$ б) $\cos\alpha - \sin\beta.$

Задание 6. Докажите, что:

а) $\sin x + \cos x = \sqrt{2}\cos\left(\dfrac{\pi}{4} - x\right);$

б) $\sin x - \cos x = -\sqrt{2}\cos\left(\dfrac{\pi}{4} - x\right).$

Задание 7. Докажите тождество:

а) $\sqrt{3} - 2\sin\alpha = 4\sin\left(30^\circ - \dfrac{\alpha}{2}\right)\cos\left(30^\circ + \dfrac{\alpha}{2}\right);$

б) $1 + \sin\alpha + \cos\alpha = 2\sqrt{2}\cos\dfrac{\alpha}{2}\cos\left(45^\circ - \dfrac{\alpha}{2}\right);$

в) $\dfrac{\cos\alpha + \sqrt{3}\sin\alpha}{\cos\alpha - \sqrt{3}\sin\alpha} = \dfrac{\cos(60^\circ - \alpha)}{\cos(60^\circ + \alpha)}.$

Задание 8. Упростите:

а) $\sin\alpha + \sin 2\alpha + \sin 3\alpha + \sin 4\alpha;$

б) $\cos 2\alpha - \cos 4\alpha - \cos 6\alpha - \cos 8\alpha;$

в) $1 + \cos\alpha + \cos\beta + \cos(\alpha+\beta);$

г) $\cos 2\alpha + \cos\left(2\alpha - \dfrac{8\pi}{3}\right) + \cos\left(2\alpha + \dfrac{2\pi}{3}\right).$

Задание 9. Докажите тождество:

а) $\dfrac{\sin\alpha + \sin 2\alpha + \sin 3\alpha}{\cos\alpha + \cos 2\alpha + \cos 3\alpha} = \operatorname{tg} 2\alpha;$

б) $\dfrac{\cos\alpha - \cos 3\alpha + \cos 5\alpha - \cos 7\alpha}{\sin\alpha + \sin 3\alpha + \sin 5\alpha + \sin 7\alpha} = \operatorname{tg}\alpha;$

в) $\dfrac{\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4} + \alpha\right) + \operatorname{tg}\left(\alpha - \dfrac{\pi}{4}\right)}{\dfrac{1}{\operatorname{tg}\left(\alpha + \dfrac{\pi}{4}\right)} + \dfrac{1}{\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4} - \alpha\right)}} = \sin 2\alpha.$

Задание 10. Разложите на множители:

а) $\sin x + \sin 2x + \sin 3x + \sin 4x;$

б) $\cos x + \cos 2x + \cos 3x + \cos 4x;$

в) $\cos 2x + \cos 4x - \cos 6x + \cos 8x;$

г) $\cos\left(7x - \dfrac{\pi}{6}\right) + \cos\left(3x - \dfrac{\pi}{6}\right) + \sin 4x.$

Задание 11. Докажите тождество:

а) $\cos^2\alpha - \dfrac{3}{4} = \cos\left(\dfrac{\pi}{3} + \alpha\right)\cos\left(\dfrac{\pi}{3} - \alpha\right);$

б) $\sin^2\alpha - \dfrac{1}{4} = \sin\left(\alpha + \dfrac{\pi}{6}\right)\sin\left(\alpha - \dfrac{\pi}{6}\right);$

в) $\sin^2(\alpha + \beta) - \sin^2(\alpha - \beta) = \sin 2\alpha \sin 2\beta;$

г) $\dfrac{\cos\alpha + \cos 3\alpha + \cos 5\alpha + \cos 7\alpha}{\sin\alpha + \sin 3\alpha + \sin 5\alpha + \sin 7\alpha} = \dfrac{1}{\operatorname{tg} 4\alpha};$

д) $\dfrac{\cos\alpha - \cos 3\alpha + \cos 5\alpha - \cos 7\alpha}{\sin\alpha + \sin 3\alpha + \sin 5\alpha + \sin 7\alpha} = \operatorname{tg}\alpha;$

е) $\dfrac{\cos\alpha - \cos 2\alpha - \cos 4\alpha + \cos 5\alpha}{\sin\alpha - \sin 2\alpha - \sin 4\alpha + \sin 5\alpha} = \dfrac{1}{\operatorname{tg} 3\alpha}.$

Задание 12. Докажите, что если A, B и C — углы треугольника, то:

а) $\sin A + \sin B + \sin C = 4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$;

б) $\sin A + \sin B - \sin C = 4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$;

в) $\sin A - \sin B + \sin C = 4\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$;

г) $\cos A - \cos B + \cos C = 4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} + 1$;

д) $\cos A + \cos B - \cos C = 4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} - 1$;

е) $\cos A - \cos B - \cos C = -4\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} + 1$.

Ваш помощник

К заданию 1. а) $0{,}5\sqrt{6}$; б) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; в) $\frac{\sqrt{6}}{2}$; г) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

К заданию 2. а) $\cos 14°$; б) $2\cos 4\alpha \sin 3\alpha$.

К заданию 4. а) $2\sqrt{2}\cos\frac{\alpha}{2}\sin\left(\frac{\alpha}{2} + 45°\right)$; б) $2\sqrt{2}\sin\frac{\alpha}{2}\sin\left(\frac{\alpha}{2} - 45°\right)$.

К заданию 10. а) $4\cos\frac{x}{2}\cos x\sin\frac{5}{2}x$; б) $4\cos\frac{x}{2}\cos x\cos\frac{5}{2}x$.

УЭ-11. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ПО ТЕМЕ «ПРОИЗВЕДЕНИЕ СИНУСОВ И КОСИНУСОВ ДВУХ УГЛОВ»

Цель: актуализировать основные знания, умения и навыки, полученные на уроках математики по данной теме.

Теоретическая часть

Напомним основные формулы по данной теме.

Для любых углов α и β справедливо равенство

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\big(\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)\big).$$

Произведение косинуса любого угла α и косинуса любого угла β равно полусумме косинуса разности этих углов и косинуса их суммы.

Для любых углов α и β справедливо равенство

$$\sin\alpha \sin\beta = \frac{1}{2}\big(\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)\big).$$

Произведение синуса любого угла α и синуса любого угла β равно полуразности косинуса разности этих углов и косинуса их суммы.

Для любых углов α и β справедливо равенство

$$\sin\alpha \cos\beta = \frac{1}{2}\big(\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)\big).$$

Произведение синуса любого угла α на косинус любого угла β равно полусумме синуса суммы углов α и β и синуса разности углов α и β, причем разность берется так, что из угла, стоящего под знаком суммы, вычитается угол, стоящий под знаком косинуса.

Заметим, что формулы тождественных преобразований, рассмотренные в этом модуле, верны независимо от того, какой мерой — радианной или градусной — измеряются фигурирующие в этих формулах углы.

Практическая часть

Задание 1. Преобразуйте в сумму произведение:

а) $\cos 5° \cos 35°$;
б) $\sin 3° \sin 5°$;
в) $\sin 7° \cos 9°$;
г) $2\cos 5° \sin 35°$;
д) $\cos 2\alpha \cos 3\beta$;
е) $\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)$;
ж) $\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)$;
з) $\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)$.

Задание 2. Преобразуйте в сумму выражение:

а) $\cos 5° \cos 55° \cos 65°$;
б) $\operatorname{tg} 20° \operatorname{tg} 40° \operatorname{tg} 60° \operatorname{tg} 80°$;
в) $\sin 10° \cos 8° \cos 6°$;
г) $\cos 3\alpha \cos 5\alpha \cos 7\alpha$;
д) $\sin\alpha \sin 2\alpha \sin 3\alpha \sin 4\alpha$;
е) $8\sin^3\alpha \cos\alpha$.

Задание 3. Докажите:

а) $\sin 20^\circ \sin 50^\circ \cos 80^\circ = \frac{1}{8}$;

б) $16 \sin 20^\circ \sin 40^\circ \sin 60^\circ \sin 80^\circ = 3$.

Задание 4. Докажите тождество:

а) $2 \sin 2\alpha \sin \alpha + \cos 3\alpha = \cos \alpha$;

б) $\sin \alpha - 2 \sin\left(\frac{\alpha}{2} - 15^\circ\right)\cos\left(\frac{\alpha}{2} + 15^\circ\right) = \frac{1}{2}$;

в) $\sin^2 \alpha + \cos(60^\circ + \alpha)\cos(60^\circ - \alpha) = \frac{1}{4}$;

г) $4\cos\left(\frac{\pi}{6} - \alpha\right) \cdot \left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right) = \frac{\sin 3\alpha}{\sin \alpha}$.

Задание 5. Докажите тождество:

а) $\sin^2 \alpha \cos \alpha = \frac{1}{4}(\cos \alpha - \cos 3\alpha)$;

б) $\sin^3 \alpha \cos \alpha = \frac{1}{8}(2 \sin 2\alpha - \sin 4\alpha)$;

в) $\sin^2 \alpha \cos^3 \alpha = \frac{1}{16}(2\cos \alpha - \cos 3\alpha - \cos 5\alpha)$;

г) $\sin^3 \alpha \cos^3 \alpha = \frac{1}{32}(3 \sin 2\alpha - \sin 6\alpha)$.

Ваш помощник

К заданию 1. а) $\frac{\sqrt{3}}{4} + 0{,}5\cos 40^\circ$; б) $\frac{1}{2}(\cos 2^\circ - \cos 8^\circ)$.

Модуль 3 ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ ЧИСЛОВОГО АРГУМЕНТА

УЭ-1. ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ ЧИСЛОВОГО АРГУМЕНТА. ИХ ПЕРИОДИЧНОСТЬ

Цель: углубить и расширить знания о тригонометрических функциях, периодических функциях, полученные на уроках математики.

Теоретическая часть

Понятия тригонометрических функций числового аргумента. Соответствие, по которому каждому действительному числу x сопоставляют синус этого числа, называют **функцией синус** и обозначают $y = \sin x$.

Соответствие, по которому каждому действительному числу x сопоставляют косинус этого числа, называют **функцией косинус** и обозначают $y = \cos x$.

Соответствие, по которому каждому действительному числу $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$, сопоставляется тангенс этого числа, называют **функцией тангенс** и обозначают $y = \operatorname{tg} t$.

Область определения функции тангенс состоит из всех действительных чисел, кроме $\frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \boldsymbol{Z}$. Множеством значений функции тангенс является множество $\boldsymbol{R}$ всех действительных чисел.

Понятие периодической функции. Функция f называется **периодической**, если существует такое число $T \neq 0$, что при любом x из области определения функции f числа $(x - T)$ и $(x + T)$ также принадлежат этой области и выполняется равенство

$$f(x+T) = f(x).$$

В этом случае число T называют **периодом функции** f.

Рассмотрим простейшие свойства периодических функций.

Теорема 1. Если число T — период функции $y = f(x)$, то число $2T$ — также ее период.

Теорема 2. Если число T — период функции $y = f(x)$, то число T также является периодом этой функции.

Наименьший из положительных периодов функции f (если он существует) называют ее **основным (главным) периодом**.

Например, функция $g(x) = 3$ имеет периодом любое действительное число (докажите), но наименьшего положительного периода эта функция не имеет.

Теорема 3. Функции синус и косинус — периодические с основным периодом 2π.

Теорема 4. Функции тангенс и котангенс — периодические с основным периодом π.

Практическая часть

Задание 1. Может ли значение функции синус быть равным:

а) $0{,}68$; б) $\frac{13}{12}$;

в) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; г) $\frac{\sqrt{15}}{3}$?

Задание 2. Может ли значение функции косинус быть равным:

а) $-2{,}7$; б) $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt[3]{5}}$;

в) $\frac{\sqrt{29}}{6}$; г) 1?

Задание 3. Может ли значение функции тангенс быть равным:

а) 5; б) 1; в) $0{,}87$; г) 0?

Задание 4. Найдите значения основных тригонометрических функций для следующих значений аргумента: 0, π, $\frac{\pi}{2}$; $\frac{3\pi}{2}$; $\frac{\pi}{4}$; $-\frac{\pi}{4}$; $\frac{3\pi}{4}$; $\frac{\pi}{6}$; $\frac{\pi}{3}$; $-\frac{2\pi}{3}$.

Задание 5. Существует ли число, синус и косинус которого одновременно равны нулю?

Задание 6. Постройте на координатной окружности точки, которым соответствуют числа t, такие, что:

а) $\cos t = -\frac{1}{3}$; б) $\sin t = -\frac{2}{5}$; в) $\cos t = \frac{2}{3}$;

г) $\cos t = -\frac{1}{3}$; д) $\operatorname{tg} t = 3$; е) $\operatorname{tg} t = -2$.

Задание 7. Докажите, что для функции $y = \cos 2x$ число $T = -3\pi$ является периодом.

Задание 8. Может ли периодическая функция быть возрастающей:

а) на всей числовой прямой;

б) на промежутке $(100; 1000)$;

в) на промежутке $(0; +\infty)$?

Задание 9. Докажите, что функция $y = x^2$, $x \in \boldsymbol{R}$, не является периодической.

Задание 10. Пользуясь периодичностью тригонометрических функций, запишите значение функции так, чтобы аргумент был выражен наименьшим возможным положительным числом:

а) $\sin\frac{35\pi}{9}$; б) $\cos\frac{20\pi}{7}$; в) $\operatorname{tg}\frac{2021}{8}\pi$.

Задание 11. Вычислите:

а) $\sin 17\pi$; б) $\sin\frac{27}{2}\pi$; в) $\cos\frac{23\pi}{4}$; г) $\operatorname{tg}\frac{16\pi}{3}$.

Ваш помощник

К заданию 1. а) Да; б) нет.
К заданию 2. а) Нет; б) нет.
К заданию 3. а) Да; б) да.
К заданию 5. Не существует. Докажите самостоятельно.
К заданию 8. а) Не может; б) может; в) не может.
К заданию 10. а) $-\sin\frac{\pi}{9}$; б) $\cos\frac{\pi}{7}$.
К заданию 11. а) 0; б) -1; в) $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

УЭ-2. ФУНКЦИЯ $y = \sin x$, ЕЕ ГРАФИК И СВОЙСТВА

Цель: актуализировать основные знания, умения и навыки по данной теме, приобретенные на уроках математики.

Теоретическая часть

Понятие функции синус. Напомним определение функции синус.

Соответствие, по которому каждому действительному числу x сопоставляют синус этого числа, называют **функцией синус** и обозначают $y = \sin x$.

График функции синус. График функции $y = \sin x$ на отрезке $[0; \pi]$ с учетом ее свойств показан на рисунке 12, *а*. Так как функция синус — нечетная, то, отобразив построенную часть графика симметрично относительно начала координат, получим график функции на отрезке $[-\pi; \pi]$ (рис. 12, *б*). Затем, воспользовавшись периодичностью функции синус, строим ее график на всей области определения (рис. 12, *в*). График функции $y = \sin x$ называют *синусоидой*.

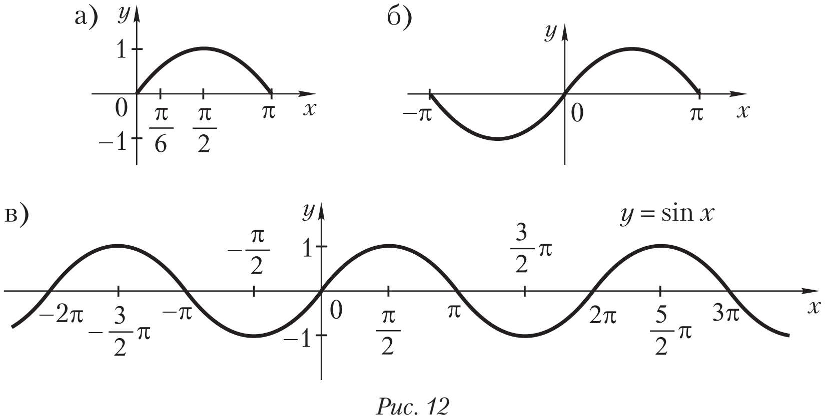


Рис. 12

Свойства функции синус.

1. *Область определения*: $D(\sin) = \boldsymbol{R}$.
2. *Область значений*: $E(\sin) = [-1; 1]$.

3. *Наибольшее и наименьшее значения*. Наибольшее значение функции синус равно 1 и достигается при $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; наименьшее значение данной функции равно -1 и достигается при $x = \frac{3\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

4. *Нули функции*. Ее нулями являются точки πn, где $n \in \boldsymbol{Z}$.

5. *Промежутки знакопостоянства*. Функция синус принимает положительные значения при всех $x \in (2\pi n; \pi + 2\pi n)$, $n \in \boldsymbol{Z}$, а отрицательные значения — при всех $x \in (\pi + 2\pi n; 2\pi + 2\pi n)$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

6. *Промежутки монотонности*. Функция возрастает от -1 до 1 на промежутках $\left[-\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{\pi}{2} + 2\pi n\right]$, $n \in \boldsymbol{Z}$, и убывает от 1 до -1 на промежутках $\left[\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{3\pi}{2} + 2\pi n\right]$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

7. *Четность и нечетность*. Функция синус — нечетная.

8. *Периодичность функции*. Функция синус — периодическая с основным периодом 2π.

Практическая часть

Задание 1. Для функций $y = 2\sin x$, $y = |\sin x|$, $y = -\sin x$ укажите:

а) область определения;

б) область значений;

в) периодичность;

г) четность, нечетность;

д) точки пересечения с осями координат;

е) промежутки возрастания и убывания.

Постройте графики функций.

Задание 2. Найдите область определения функции:

а) $y = 5\sin(3x - 2)$; б) $y = \sin\frac{1}{x}$;

в) $y = \dfrac{\sin x}{x-1}$;   г) $y = \dfrac{x-1}{\sin x}$;

д) $\dfrac{\sin^2 x}{\sin x}$;   е) $y = \dfrac{|\sin x|}{\sin x}$.

Задание 3. Найдите область значений функции:

а) $y = 5\sin x$;   б) $y = 3\sin x + 2$;

в) $y = \dfrac{\sin^3 x - 3}{2}$;   г) $y = 2\sin(3x+1) - \pi$;

д) $y = \sin|x|$;   е) $y = \sin(x^2 + x)$.

Задание 4. Четной или нечетной является функция:

а) $y = \sin 5x$;   б) $y = 2\sin^2 x$;

в) $y = \sin^2 x + \sin x$;   г) $y = 5\sin^3 x - 2\sin x$;

д) $y = \sin x + 1$;   е) $y = x^3 \sin x$?

Задание 5. Определите знаки выражений:

а) $\sin\dfrac{5\pi}{4}\sin\dfrac{7\pi}{3}\sin\dfrac{4\pi}{5}$;

б) $\sin 1 \sin 2 \sin 3 \sin 4$;

в) $\sin 2 \sin(-3)\sin(-5)$.

Задание 6. Найдите промежутки возрастания и убывания функции:

а) $y = \sin 3x$;   б) $y = \sin\dfrac{x}{2}$;   в) $y = \sin(2x+3)$.

Задание 7. Докажите, что:

а) $\sin\dfrac{\pi}{9} < \sin\dfrac{4}{9}\pi$;   б) $\sin\dfrac{\pi}{4} > \sin\dfrac{\pi}{8}$;

в) $\sin(3{,}7\pi) = -\sin(0{,}3\pi)$;   г) $\sin(2{,}2\pi) = \sin(0{,}2\pi)$.

Задание 8. При каких значениях x выражение $\sin x - 0{,}5$:

а) положительно;

б) отрицательно;

в) равно нулю?

Задание 9. Постройте график функции:

а) $y = -\sin x$; б) $y = \frac{2}{3}\sin x$;

в) $y = \sin 2x$; г) $y = \sin \frac{x}{2}$;

д) $y = \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$; е) $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$;

ж) $y = -\frac{1}{2}\sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$; з) $y = 2\sin\left(3x - \frac{\pi}{2}\right)$;

и) $y = \sin\ \frac{2}{3}x$; к) $y = -2\sin\left(-\frac{2}{3}x\right)$.

Задание 10. Как, зная график функции $y = \sin x$, построить график функции:

а) $y = -2\sin x$; б) $y = 0{,}5\sin x$;

в) $y = \sin 2x$; г) $y = \sin \frac{1}{2}x$;

д) $y = \sin x - 2$; е) $y = \sin x + 2$;

ж) $y = -\sin x + 1$; з) $y = -\sin x - 1$;

и) $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$; к) $y = 2\sin(x + \pi)$?

Задание 11. Постройте график функции:

а) $y = \left(\sqrt{\sin x}\right)^2$; б) $y = \left(\sqrt{\sin x + 2}\right)^2$;

в) $y = 1 : \frac{1}{\sin\ x}$.

Задание 12. Постройте график функции:

а) $y = |\sin x|$; б) $y = \sin|x|$;

в) $y = \frac{|\sin x|}{\sin x}$; г) $y = |\sin x| - \sin x$;

д) $y = |\sin x| - \sin|x|$; е) $y = \frac{|\sin x|}{\sin x} \cdot x$.

Задание 13. Изобразите на координатной плоскости множество точек, таких, что:

а) $|y| = \sin x$;

б) $|y| = |\sin x|$;

в) $|y| = \sin|x|$;

г) $y = |y| \sin x$;

д) $y = \dfrac{\sin|2x|}{|\sin x|}$;

е) $y = \left|\sin\left|x - \dfrac{\pi}{3}\right|\right|$.

Ваш помощник

К заданию 2. а) $D(y) = \boldsymbol{R}$; б) $D(y) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$; в) $D(y) = (-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$.

К заданию 3. а) $[-5; 5]$; б) $[-1; 5]$; в) $[-2; -1]$.

К заданию 5. а) Минус; б) минус; в) минус.

УЭ-3. ФУНКЦИЯ $y = \cos x$, ЕЕ ГРАФИК И СВОЙСТВА

Цель: актуализировать основные знания, умения и навыки по данной теме, приобретенные на уроках математики.

Теоретическая часть

Понятие функции косинус. Напомним, что называют функцией косинус.

Соответствие, по которому каждому действительному числу x сопоставляют косинус этого числа, называют **функцией косинус** и обозначают $y = \cos x$.

График функции косинус. График функции $y = \cos x$ можно получить из графика функции $y = \sin x$, сдвинув синусоиду влево на $\dfrac{\pi}{2}$, поскольку $\sin\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right) = \cos x$ (рис. 13).

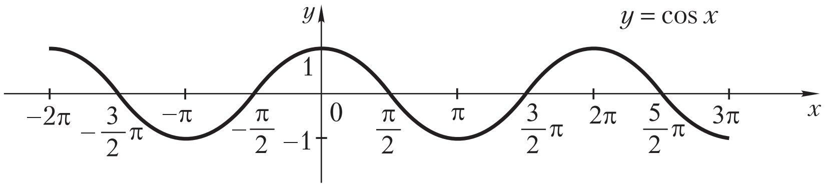


Рис. 13

Свойства функции косинус.

1. *Область определения*: $D(\sin) = \boldsymbol{R}$.

2. *Область значений*: $E(\sin) = [-1; 1]$.

3. *Наибольшее и наименьшее значения*. Наибольшее значение функции косинус равно 1 и достигается при $x = 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; наименьшее значение равно -1 и достигается при $x = \pi + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

4. *Нули функции*. Ее нулями являются точки $\frac{\pi}{2} + \pi n$, где $n \in \boldsymbol{Z}$.

5. *Промежутки знакопостоянства*. Функция косинус принимает положительные значения при всех $x \in \left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{\pi}{2} + 2\pi n\right)$, $n \in \boldsymbol{Z}$, а отрицательные значения — при всех $x \in \left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{3\pi}{2} + 2\pi n\right)$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

6. *Промежутки монотонности*. Функция возрастает от -1 до 1 на промежутках $[-\pi + 2\pi n; 2\pi n]$, $n \in \boldsymbol{Z}$, и убывает от 1 до -1 на промежутках $[2\pi n; \pi + 2\pi n]$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

7. *Четность и нечетность*. Функция косинус — четная.

8. *Периодичность функции*. Функция косинус — периодическая с основным периодом 2π.

Практическая часть

Задание 1. Постройте график функции $y = \sin x$ и с его помощью укажите:

а) область определения;

б) область значений;

в) как изменяются значения функции $y = \sin x$ при изменении аргумента от $-\frac{\pi}{2}$ до $\frac{\pi}{2}$; от $\frac{\pi}{2}$ до $\frac{3\pi}{2}$;

г) как расположен график функции $y = \sin x$ по отношению к началу координат; каким свойством функции $y = \sin x$ объясняется симметричность ее графика относительно начала координат.

Задание 2. Постройте график функции $y = \cos x$. С помощью графика укажите:

а) область определения;
б) область значений;
в) четность, нечетность;
г) периодичность;
д) точки пересечения с осями;
е) промежутки возрастания и убывания функции;
ж) точки, в которых функция достигает своих наибольшего и наименьшего значений.

Задание 3. Возможны ли равенства:

а) $\sin\alpha = 2$; б) $\cos\beta = -\sqrt{2}$;

в) $\sin\alpha = m + \dfrac{1}{m}$, где $m \neq 0$; г) $\cos\alpha = \dfrac{\pi}{4}$?

Задание 4. Укажите наибольшее и наименьшее значения функции:

а) $y = \sin x$; б) $y = 1 + \sin x$;
в) $y = 1 - \cos x$; г) $y = 3 + 2\cos x$;
д) $y = 2 - 3\sin x$; е) $y = |\sin x|$;
ж) $y = 4 - 3|\sin x|$; з) $y = -|\cos x|$;
и) $y = 2 - 5|\cos x|$.

Задание 5. Как по графику функции $y = \sin x$ можно построить график функции:

а) $y = -\sin x$; б) $y = 2\sin x$;
в) $y = -0{,}5\sin x$; г) $y = |\sin x|$;
д) $y = \sin\left(x - \dfrac{\pi}{3}\right)$; е) $y = |\sin|x||$?

Задание 6. Как по графику функции $y = \cos x$ можно построить график функции:

а) $y = -\cos x$; б) $y = 0{,}5\cos x$;

в) $y = 2\cos x$;

г) $y = |\cos x|$;

д) $y = \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$;

е) $y = |\cos|x||$?

Задание 7. Для функции $y = 3\cos x$, $y = |\cos x|$, $y = -\cos x$ укажите:

а) область определения;
б) область значений;
в) четность, нечетность;
г) периодичность;
д) точки пересечения с осями координат;
е) промежутки возрастания и убывания.

Задание 8. Найдите область определения функции:

а) $y = 3\cos(2x - 1)$;

б) $y = \cos\frac{1}{1 - x}$;

в) $y = \frac{\cos x}{x}$;

г) $y = \frac{x}{\cos x}$.

Задание 9. Найдите область значений функции:

а) $y = -3\cos x$;

б) $y = 2\cos x + 3$;

в) $y = \cos^3(x - \pi)$;

г) $y = \cos(x^2 - x)$;

д) $y = \cos(2x + 1)$, $D(y) = (0{,}25; 0{,}5]$.

Задание 10. Четной или нечетной является функция:

а) $y = \cos 3x$;

б) $y = \sin^2 x + 2\cos 3x$;

в) $y = \cos^2 x + \cos x - 1$;

г) $y = \cos^2 x + \sin^3 x$?

Задание 11. Найдите:

а) $\cos 21\pi$;

б) $\cos\frac{23}{4}\pi$;

в) $\cos(-19{,}5\pi)$;

г) $\cos\left(-\frac{17}{6}\pi\right)$.

Задание 12. Докажите, что число $2{,}5\pi$ не является периодом функции $y = \cos 2x$.

Задание 13. Определите знак значения выражения:

а) $\cos\frac{6}{7}\pi\cos\frac{7}{7}\pi\cos\frac{2}{3}\pi$;

б) $\cos 2\cos 3\cos 4$.

Задание 14. Найдите промежутки возрастания и убывания, а также нули функции:

а) $y = \cos 2x$;

б) $y = \cos 2\pi x$;

в) $y = \cos(x-2)$;

г) $y = \cos\frac{\pi x}{2}$.

Задание 15. Докажите, что:

а) $\cos\frac{\pi}{9} > \cos\frac{\pi}{6} > \cos\frac{\pi}{3}$;

б) $\cos 11\pi < 0$.

Задание 16. Пользуясь свойствами функции косинус, докажите неравенство $\cos 42°\cos 43°\cos 44° > \frac{1}{3}$.

Задание 17. Как, зная график функции $y = \cos x$, построить график функции:

а) $y = -3\cos x$;

б) $y = \frac{1}{2}\cos x$;

в) $y = \cos\frac{x}{2}$;

г) $y = \cos 2x$;

д) $y = \cos\frac{2}{3}x$;

е) $y = \cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$;

ж) $y = \cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$;

з) $y = \cos 2x - 1$?

Задание 18. Постройте график функции:

а) $y = |\cos x|$;

б) $y = \cos|x|$;

в) $y = |\cos|x||$;

г) $y = \cos x + |\cos x|$;

д) $y = \sin x|\cos x|$;

е) $y = \cos x\sqrt{\cos^2 x} - \sin x\sqrt{\sin^2 x}$.

Задание 19. Постройте график функции:

а) $y = (\sqrt{\cos x})^2 - 1$;

б) $y = \frac{|x|}{x} \cdot \cos x$;

в) $y = \frac{\cos x}{|\cos x|}$.

Ваш помощник

К заданию 3. а) Нет; б) нет; в) нет. Ответ обоснуйте.
К заданию 4. а) 1 и −1; б) 2 и 0; в) 2 и 0.
К заданию 8. а) $\boldsymbol{R}$; б) $(-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$.
К заданию 9. а) $[-3; 3]$; б) $[1; 5]$.
К заданию 13. а) Минус; б) минус.

УЭ-4. ФУНКЦИЯ $y = \operatorname{tg} x$, ЕЕ ГРАФИК И СВОЙСТВА

Цель: актуализация основных знаний, умений и навыков, полученных на уроках математики по данной теме.

Теоретическая часть

Понятие функции тангенс. Напомним сначала, что называют тангенсом действительного числа.

Тангенсом действительного числа t (обозначают $\operatorname{tg} t$) называют отношение синуса этого числа к косинусу того же числа:

$$\operatorname{tg} t = \frac{\sin t}{\cos t},$$

если оно существует.

Соответствие, по которому каждому действительному числу $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi$, $n \in \boldsymbol{Z}$, сопоставляется тангенс этого числа, называют **функцией тангенс** и обозначают $y = \operatorname{tg} t$.

График функции тангенс. График данной функции изображен на рисунке 14.

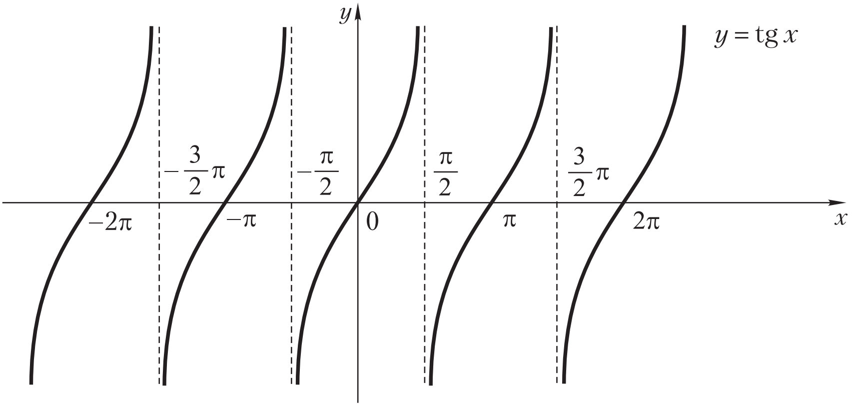


Рис. 14

График функции $y = \operatorname{tg} x$ называют *тангенсоидой*.

Свойства функции тангенс.

1. *Область определения*: $D(\operatorname{tg}) = \left\{x \in \boldsymbol{R} \text{ и } x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}\right\}$.

2. *Множество значений*: $E(\operatorname{tg}) = \boldsymbol{R}$.

3. *Наибольшее и наименьшее значения функции*. Наибольшего и наименьшего значений данная функция не достигает.

4. *Нули функции*. Ее нулями являются точки $x = \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

5. *Промежутки знакопостоянства*. Функция тангенс принимает положительные значения при всех $x \in \left(\pi n;\ \frac{\pi}{2} + \pi n\right)$, $n \in \boldsymbol{Z}$, а отрицательные значения — при всех $x \in \left(-\frac{\pi}{2} + \pi n;\ \pi n\right)$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

6. *Промежутки монотонности*. Функция тангенс возрастает на каждом из промежутков $\left(-\frac{\pi}{2} + \pi n;\ \frac{\pi}{2} + \pi n\right)$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

7. *Четность и нечетность*. Функция тангенс — нечетная.

8. *Периодичность функции*. Функция тангенс — периодическая с основным периодом π.

Практическая часть

Задание 1. Найдите область определения функции:

а) $y = \operatorname{tg} x + \dfrac{1}{\operatorname{tg} x}$; б) $y = \operatorname{tg} 3x \cdot \dfrac{1}{\operatorname{tg} 2x}$;

в) $y = \operatorname{tg}\left(3x + \dfrac{\pi}{3}\right)$; г) $y = \dfrac{1}{\operatorname{tg}(5x+4)}$.

Задание 2. Найдите область значений функции:

а) $y = \operatorname{tg}(2x+1), D(y) = \left[0; \dfrac{\pi}{8}\right]$;

б) $y = \operatorname{tg}\dfrac{x}{3} - 2, D(y) = \left[0; \dfrac{3\pi}{4}\right]$.

Задание 3. Установите, какие из следующих функций являются четными, а какие — нечетными:

а) $y = 2x \operatorname{tg} x$; б) $y = x^3 - \operatorname{tg}^3 x$;

в) $y = \operatorname{tg} x \sin^2 x$; г) $y = \operatorname{tg} 2x + 2\sin x$;

д) $y = x^2 + \operatorname{tg}^2 x$; е) $y = \operatorname{tg} 10|x|$.

Задание 4. Вычислите:

а) $\operatorname{tg}\dfrac{21}{4}\pi$; б) $\operatorname{tg}\left(-\dfrac{19}{3}\pi\right)$;

в) $\operatorname{tg} 3{,}5\pi$; г) $\operatorname{tg}\dfrac{11}{6}\pi$.

Задание 5. Определите знак значения выражения:

а) $\operatorname{tg}\dfrac{4\pi}{3} \cdot \dfrac{1}{\operatorname{tg}\dfrac{3\pi}{4}} \cdot \operatorname{tg}\dfrac{5\pi}{3}$;

б) $\operatorname{tg} 1 \operatorname{tg} 2 \cdot \dfrac{1}{\operatorname{tg} 5}$.

Задание 6. Что больше: $\operatorname{tg} 13\dfrac{1}{3}$ или $\operatorname{tg} 22\dfrac{1}{2}$?

Задание 7. Найдите промежутки возрастания и убывания, а также нули функции:

а) $y = \operatorname{tg} 2x$; б) $y = \operatorname{tg} \frac{4}{3}\pi x$; в) $y = 3\operatorname{tg} 2(x+\pi)$.

Задание 8. Постройте график функции:

а) $y = \operatorname{tg} x$; б) $y = 0{,}5\operatorname{tg} x$; в) $y = -0{,}5x\operatorname{tg} x$;

г) $y = -2\operatorname{tg} x$; д) $y = \operatorname{tg} 2x$; е) $y = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$.

Укажите точки пересечения графиков функций с осями координат; периоды функций; значения x, при которых функции неопределены. Имеют ли функции наибольшее и наименьшее значения?

Задание 9. Постройте график функции:

а) $y = \left|\operatorname{tg} x\right|$; б) $y = \operatorname{tg}\left|x\right|$;

в) $y = \left|\operatorname{tg}\left|x\right|\right|$; г) $y = \frac{\left|\operatorname{tg} x\right|}{\operatorname{tg} x}$.

Задание 10. Постройте график функции:

а) $y = \frac{\left|\sin x\right|}{\operatorname{tg} x}$; б) $y = \frac{\sin x}{\left|\cos x\right|}$;

в) $y = \cos x \operatorname{tg} x$; г) $y = \cos x\left|\operatorname{tg} x\right|$;

д) $y = \operatorname{tg} x \cdot \frac{1}{\operatorname{tg} x}$; е) $y = \left|\operatorname{tg} x\right| \cdot \frac{1}{\operatorname{tg} x}$;

ж) $y = \frac{\left|x\right|}{x} \cdot \operatorname{tg} x$; з) $y = x \cdot \frac{\left|\operatorname{tg} x\right|}{\operatorname{tg} x}$.

Ваш помощник

К заданию 2. а) $[1; 2]$; б) $(-2; -1)$; в) $[-5; 0]$.

К заданию 4. а) 1; б) $-\sqrt{3}$; в) не существует; г) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$.

К заданию 5. а) Плюс; б) плюс.

Модуль 4 ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ

УЭ-1. РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ ВИДА $\sin x = a$

Цель: актуализировать основные знания, умения и навыки по данной теме, полученные на уроках математики.

Теоретическая часть

Напомним определение арксинуса действительного числа.

Арксинусом числа a из промежутка $[-1;\ 1]$ называется число x из промежутка $\left[-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right]$, синус которого равен a, т. е. $\sin x = a$.

Заметим, что для чисел a, удовлетворяющих условию $|a| > 1$, арксинус не определяется.

Найдем арксинус некоторых чисел:

$$\arcsin\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}, \text{ так как } \frac{\pi}{6} \in \left[-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right]$$

$$\text{и } \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}; \arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{\pi}{3}, \text{ так как } -\frac{\pi}{3} \in \left[-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right]$$

$$\text{и } \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Задание. Заполните в тетрадях таблицу:

x	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\arcsin x$		$-\frac{\pi}{3}$				$\frac{\pi}{6}$			

Пример 1. Решить уравнение $\arcsin(x+3)=\frac{\pi}{6}$.

Решение. Поскольку $\arcsin(x+3)$ и $\frac{\pi}{6}$ принадлежат промежутку $\left[-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right]$, то данное уравнение равносильно такому:

$$\sin\left(\arcsin(x+3)\right)=\sin\frac{\pi}{6},$$

откуда $x+3=0{,}5$, т. е. $x=-2{,}5$.

Ответ: $-2{,}5$.

Формулы для нахождения корней тригонометрических уравнений вида $\sin x=a$:

$$x=\arcsin\alpha+2\pi k,\ k\in \boldsymbol{Z},$$

$$x=\pi-\arcsin\alpha+2\pi k,\ k\in \boldsymbol{Z},$$

$$x=(-1)^k\arcsin\alpha+\pi k,\ k\in \boldsymbol{Z}.$$

Пример 2. Решить уравнение $\sin x=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Решение. По формуле получаем:

$$x=(-1)^k\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}+\pi k,\ k\in \boldsymbol{Z}.$$

Но $\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\pi}{4}$, следовательно,

$$x=(-1)^k\frac{\pi}{4}+\pi k,\ k\in \boldsymbol{Z}.$$

Ответ: $(-1)^k\frac{\pi}{4}+\pi k,\ k\in \boldsymbol{Z}$.

Практическая часть

Чтобы научиться правильно решать простейшие тригонометрические уравнения, необходимо прежде всего приобрести умение правильного, осознанного нахождения арксинуса произвольного действительного числа. Постарайтесь это умение приобрести посредством выполнения следующих заданий.

Задание 1. Какие из выражений имеют смысл: $\arcsin 0{,}5$; $\arcsin\left(-\frac{2}{3}\right)$; $\arcsin 1{,}5$; $\arcsin\frac{\pi}{3}$; $\arcsin\frac{\pi^2}{10}$?

Задание 2. Может ли $\arcsin\alpha$ принимать значения:

а) $\frac{\pi}{4}$; $\frac{5\pi}{8}$; $-\sqrt{2}$;

б) $\frac{3\pi}{4}$; $-\frac{\pi}{8}$; $\frac{\sqrt{3}}{2}$?

Задание 3. Вычислите:

а) $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$;

б) $\sin\left(\arcsin\frac{\sqrt{5}}{3}\right)$;

в) $\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}$;

г) $\sin\left(\arcsin\frac{1}{8}\right)$;

д) $\arcsin(-1)$;

е) $\sin\left(\arcsin\frac{1}{2}\right)$.

Задание 4. Вычислите:

а) $\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}+\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)+\arcsin 1$;

б) $\arcsin(-1)+\arcsin 0-\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$;

в) $\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}-\arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)+\arcsin(-1)$;

г) $2\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}+3\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)+\frac{\sqrt{2}}{2}\arcsin 0$.

Задание 5. Вычислите:

а) $\arcsin\left(\sin\frac{\pi}{5}\right)$;

б) $\arcsin(\sin 1)$;

в) $\arcsin(\sin 2)$;

г) $\arcsin\left(\sin\frac{4}{3}\pi\right)$.

Задание 6. Верно ли равенство:

а) $\arcsin 0 = \pi$; б) $\arcsin \pi = 0$;

в) $\arcsin \frac{1}{2} + \arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{2}$; г) $\arcsin 1 - \arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{6}$?

Задание 7. Вычислите:

а) $\cos\left(\arcsin \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{\operatorname{tg}\left(\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)}$;

б) $\operatorname{tg}\left(\arcsin \frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \cos(\arcsin(-1))$.

Задание 8. Решите уравнение:

а) $\arcsin x = \frac{\pi}{4}$; б) $\arcsin(x+2) = -\frac{\pi}{2}$;

в) $\arcsin(2x-1) = \frac{\pi}{2}$; г) $\arcsin x = -1$;

д) $\arcsin x = \frac{2\pi}{3}$; е) $\arcsin x = -\frac{3\pi}{4}$.

Задание 9. Решите уравнение:

а) $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$; б) $\sin x = -\frac{1}{2}$;

в) $\sin x = \frac{\sqrt{5}}{3}$; г) $\sin x = -\frac{\sqrt{5}}{2}$;

д) $\sin x = \frac{\pi}{4}$; е) $\sin x = \frac{\pi}{3}$.

Задание 10. Найдите наибольший отрицательный корень уравнения:

а) $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; б) $\sin x = 1$; в) $\sin x = 0$.

Задание 11. Найдите число корней уравнения $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Задание 12. Найдите решение уравнения в градусах:

а) $\sin(x-65^\circ)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$;

б) $\sin(5x+40^\circ)=1$;

в) $\sin\dfrac{3}{7}x=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$;

г) $\sin\left(\dfrac{2}{3}x+20^\circ\right)=-0{,}5$.

Задание 13. Решите уравнение:

а) $\sin\dfrac{5}{2}x=\dfrac{5}{6}$;

б) $2\sin\left(3x-\dfrac{\pi}{3}\right)=\dfrac{2}{3}$;

в) $\sin(2x+4)=3-\sqrt{3}$;

г) $\sin\left(\dfrac{x}{2}+1\right)=0{,}6$;

д) $\sin(2x-5)=\sin 1$;

е) $\sin\ x=\sin\ 6$;

ж) $\sin\ 3x=\sin\ 4$;

з) $2\sin\left(4x-\dfrac{\pi}{4}\right)=\sqrt{3+2\sqrt{2}}-1$.

Ваш помощник

К заданию 2. а) Да; нет; да; б) нет; да; да.

К заданию 3. а) $-\dfrac{\pi}{4}$; б) $\dfrac{\sqrt{5}}{3}$; в) $\dfrac{\pi}{3}$; г) $\dfrac{1}{8}$; д) $-\dfrac{\pi}{2}$; е) 0,5.

К заданию 4. а) $\dfrac{7\pi}{12}$; б) $-\dfrac{\pi}{6}$; в) $\dfrac{\pi}{12}$; г) 0.

К заданию 5. а) $\dfrac{\pi}{5}$; б) 1; в) $\pi-2$; г) $-\dfrac{\pi}{3}$.

К заданию 6. а) Нет; б) нет; в) да; г) нет.

К заданию 8. а) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$; б) -3; в) 1; г) $-\sin 1$.

К заданию 10. а) $-\dfrac{\pi}{3}$.

К заданию 11. Один.

К заданию 12. а) $x=110^\circ+360^\circ n,\ n\in\boldsymbol{Z}$.

УЭ-3. РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ ВИДА $\cos x = a$

Цель: актуализировать основные знания, умения и навыки по данной теме, полученные на уроках математики.

Теоретическая часть

Напомним определение арккосинуса числа.

Арккосинусом числа a из промежутка $[-1; 1]$ называется число x из промежутка $[0; \pi]$, косинус которого равен a, т. е. $\cos x = a$.

Для числа a, удовлетворяющего условию $|a| > 1$, арккосинус не определяется.

Найдем арккосинус некоторых чисел:

$$\arccos\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{6}, \text{ так как } \frac{\pi}{6} \in [0; \pi] \text{ и } \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{3\pi}{4}, \text{ так как } \frac{3\pi}{4} \in [0; \pi] \text{ и } \cos\frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Задание. Заполните в тетрадях таблицу:

x	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\arccos x$	π		$\frac{3\pi}{4}$					$\frac{\pi}{6}$	

Формула для нахождения корней тригонометрических уравнений вида $\cos x = a$:

$$x = \pm\arccos\alpha + 2\pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}.$$

Пример. Решить уравнение $\cos\ x = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Решение. Воспользовавшись формулой для нахождения корней уравнения $\left(0 < \frac{\sqrt{3}}{2} < 1\right)$, будем иметь:

$$x = \pm\arccos\frac{\sqrt{3}}{2} + 2\pi k,\ k \in \boldsymbol{Z},$$

т. е.

$$x = \pm\frac{\pi}{6} + 2\pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}.$$

Ответ: $\frac{\pi}{6} + 2\pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}.$

Практическая часть

Чтобы научиться правильно решать простейшие тригонометрические уравнения, необходимо прежде всего приобрести умение правильного, осознанного нахождения арккосинуса произвольного действительного числа. Постарайтесь это умение приобрести посредством выполнения следующих заданий.

Задание 1. Какие из выражений имеют смысл: $\arccos\frac{4}{3}$; $\arccos\left(-\frac{2}{3}\right)$; $\arccos(-1{,}5)$; $\arccos\frac{2\pi}{3}$; $\arccos\frac{\pi}{4}$?

Задание 2. Может ли $\arccos\alpha$ принимать значения:

а) $-\frac{\pi}{6}$; $\frac{\pi}{4}$; $\sqrt{5}$;

б) $\frac{\pi}{3}$; $\frac{5\pi}{4}$; $-\sqrt{5}$?

Задание 3. Вычислите:

а) $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)$;

б) $\arccos 1$;

в) $\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}$;

г) $\arccos 0$;

д) $\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$;

е) $\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

Задание 4. Найдите:

а) $\arccos 0{,}8746$;

б) $\arccos(-0{,}2145)$.

Задание 5. Найдите:

а) $\cos\left(\arccos\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$;

б) $\cos(\arccos 1)$.

Задание 6. Найдите:

а) $\arccos\left(\cos\frac{\pi}{4}\right)$; б) $\arccos(\cos 2)$;

в) $\arccos\left(\cos\frac{5\pi}{4}\right)$; г) $\arccos(\cos 5)$.

Задание 7. Верно ли равенство:

а) $\arccos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$; б) $\arccos\frac{1}{2}+\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\pi}{2}$?

Задание 8. Вычислите:

а) $\operatorname{tg}(\arcsin 0)-\operatorname{ctg}\left(\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)$;

б) $\operatorname{tg}\left(\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)+\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)$.

Задание 9. Решите уравнение:

а) $\arccos x=-\frac{\pi}{6}$; б) $\arccos x=\frac{4\pi}{3}$;

в) $\arccos\left(3x+\frac{1}{2}\right)=\frac{2\pi}{3}$; г) $\arccos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{2}$;

д) $\arccos x=-\frac{\pi}{2}$; е) $\arccos(2x-1)=\pi$.

Задание 10. Решите уравнение:

а) $\cos x=\frac{\sqrt{2}}{2}$; б) $\cos x=-\frac{\sqrt{3}}{2}$;

в) $\cos x=-\frac{3}{4}$; г) $\cos x=\sqrt{1{,}01}$;

д) $\cos x=-\frac{\pi}{6}$; е) $\cos x=-\frac{\pi}{3}$.

Задание 11. Найдите наименьший корень уравнения, который больше 5:

а) $\cos x=-0{,}5$; б) $\cos x=1$; в) $\cos x=0$.

Задание 12. Найдите корни уравнения $\cos x = -1$, принадлежащие промежутку $[0; 10]$.

Задание 13. Решите в градусах уравнение:

а) $\cos 5x = \frac{1}{2}$;

б) $\cos(2x + 30°) = 1$;

в) $\cos\left(\frac{3}{2}x + 45°\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$;

г) $\cos\left(\frac{5}{4}x - 35°\right) = 0$.

Задание 14. Решите уравнение:

а) $\cos 3x = \frac{3}{4}$;

б) $\cos\left(\frac{2}{5}x - 4\right) = 0$;

в) $\cos\frac{3}{2}x = -\sqrt{2}$;

г) $\cos(4x - 1) = 0{,}8$;

д) $\cos(2x + 4) = \cos 1$;

е) $\cos 5x = \cos 6$;

ж) $\cos x = \cos 7$;

з) $2\cos\frac{3}{2}x = \sqrt{7 - 4\sqrt{3}} - 2$.

Ваш помощник

К заданию 3. а) $\frac{2}{3}\pi$; б) 0; в) $\frac{\pi}{6}$; г) $\frac{\pi}{2}$; д) $\frac{3}{4}\pi$; е) $\frac{5}{6}\pi$.

К заданию 4. а) $\approx 0{,}5062$; б) $\approx 1{,}7870$.

К заданию 5. а) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; б) 1.

К заданию 6. а) $\frac{\pi}{4}$; б) 2; в) $\frac{3\pi}{4}$; г) $2\pi - 5$.

К заданию 7. а) Неверно; б) верно.

К заданию 8. а) 1; б) $-\sqrt{3}$.

К заданию 9. а) Нет решений; б) нет решений; в) $-\frac{1}{3}$; г) $\frac{\pi}{2}$; е) 0.

К заданию 12. π; 3π.

УЭ-3. РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ ВИДА $\operatorname{tg} x = a$

Цель: актуализировать основные знания, умения и навыки по данной теме, полученные на уроках математики.

Теоретическая часть

Напомним определение арктангенса действительного числа.

Арктангенсом числа a (обозначается $\operatorname{arctg} a$) называется число x_0 из промежутка $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, тангенс которого равен a, т. е. $\operatorname{tg} x_0 = a$.

По определению имеем: $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} a) = a$.
Найдем арктангенс некоторых чисел:

$$\operatorname{arctg} 0 = 0, \text{ так как } 0 \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right) \text{ и } \operatorname{tg} 0 = 0;$$

$$\operatorname{arctg} \sqrt{3} = \frac{\pi}{3}, \text{ так как } \frac{\pi}{3} \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right) \text{ и } \operatorname{tg} \frac{\pi}{3} = \sqrt{3};$$

$$\operatorname{arctg}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = -\frac{\pi}{6}, \text{ так как } -\frac{\pi}{6} \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right) \text{ и } \operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Задание. Заполните в тетрадях таблицу:

x	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
$\operatorname{arctg} x$			$-\frac{\pi}{6}$				$\frac{\pi}{3}$

Формула для нахождения корней уравнения $\operatorname{tg} x = a$.

$$x = \operatorname{arctg} a + \pi k, k \in \boldsymbol{Z}.$$

Пример. Решить уравнение $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$.

Решение. По формуле для нахождения корней уравнения имеем: $x = \operatorname{arctg} \sqrt{3} + \pi k, k \in \boldsymbol{Z}$, т. е. $x = \frac{\pi}{3} + \pi k, k \in \boldsymbol{Z}$.

Ответ: $\frac{\pi}{3} + \pi k, k \in \boldsymbol{Z}$.

Практическая часть

Чтобы научиться правильно решать простейшие тригонометрические уравнения, необходимо прежде всего приобрести умение правильного, осознанного нахождения арктангенса произвольного действительного числа. Постарайтесь это умение приобрести посредством выполнения следующих заданий.

Задание 1. Какие из выражений имеют смысл: $\operatorname{arctg} 1$; $\operatorname{arctg} \frac{\pi}{2}$; $\operatorname{arctg}(-\pi)$?

Задание 2. Может ли $\operatorname{arctg} \alpha$ принимать значения:

а) $0, -\frac{\pi}{3}, \sqrt{5}$; б) $-\frac{\pi}{2}, \frac{7\pi}{15}, -1$?

Задание 3. Вычислите:

а) $\operatorname{arctg}(-1)$; б) $\operatorname{arctg} \sqrt{3}$;

в) $\operatorname{arctg}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$; г) $\operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Задание 4. Найдите:

а) $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} 2)$; б) $\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)$.

Задание 5. Найдите:

а) $\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)$; б) $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} 1)$;

в) $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} 2)$; г) $\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg} \frac{5\pi}{4}\right)$.

Задание 6. Вычислите:

а) $\operatorname{tg}\left(\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)\right) + \sin\left(\operatorname{arctg}(-\sqrt{3})\right)$;

б) $\cos(\operatorname{arctg} 0) - \operatorname{ctg}\left(\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)$.

Задание 7. Решите уравнение:

а) $\operatorname{arctg} x = -\frac{\pi}{4}$;   б) $\operatorname{arctg} x = -\frac{5\pi}{4}$;

в) $\operatorname{arctg}\left(2x - \frac{\sqrt{3}}{3}\right) = -\frac{\pi}{6}$;   г) $\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{2} - \sqrt{3}\right) = -\frac{\pi}{3}$;

д) $\operatorname{arctg}(x+1) + \operatorname{arctg}(1-x) = \frac{\pi}{4}$.

Задание 8. Решите уравнение:

а) $\operatorname{tg} x = \frac{\sqrt{3}}{3}$;   б) $\operatorname{tg} x = -1$;   в) $\operatorname{tg} x = 2$;

г) $\operatorname{tg} x = -3$;   д) $\operatorname{tg} x = \frac{\pi}{2}$;   е) $\operatorname{tg} x = -\pi$.

Задание 9. Найдите, используя в случае необходимости таблицы или микрокалькулятор, наибольший отрицательный корень уравнения:

а) $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$;   б) $\operatorname{tg} x = 0$;

в) $\operatorname{tg} x = 7$;   г) $\operatorname{tg} x = -\frac{\pi}{2}$.

Задание 10. Найдите корни уравнения $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$, принадлежащие промежутку $[2; 5]$.

Задание 11. Решите уравнение:

а) $\operatorname{tg} 3x = 12$;   б) $\operatorname{tg} \frac{2x}{5} = -4$;

в) $\operatorname{tg}(4x - 68^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{3}$;   г) $\operatorname{tg}\left(\frac{x}{3} + 10^\circ\right) = -1$;

д) $\operatorname{tg}\left(4x + \frac{\pi}{3}\right) = -\sqrt{3}$;   е) $3 \operatorname{tg} 2x = 4$;

ж) $\operatorname{tg}(\pi x) = -\frac{\sqrt{3}}{3}$;

з) $\operatorname{tg}(2x - 3) = \sqrt{12 - 6\sqrt{3}} - 3$.

Ваш помощник

К заданию 1. Все выражения имеют смысл.

К заданию 2. а) Может; б) может.

К заданию 3. а) $-\frac{\pi}{4}$; б) $\frac{\pi}{3}$; в) $-\frac{\pi}{6}$; г) $\frac{\pi}{6}$.

К заданию 4. а) 2; б) $-\frac{\pi}{3}$.

К заданию 5. а) $-\frac{\pi}{3}$; б) 1; в) $2-\pi$; г) $\frac{\pi}{4}$.

К заданию 6. а) $\frac{-3\sqrt{3}}{3}$; б) 2.

К заданию 7. а) -1; б) нет решений; в) 0; г) 0; д) $\pm\sqrt{2}$.

К заданию 10. $\frac{4\pi}{3}$.

УЭ-4. ЛОГИКА ОБОСНОВАНИЯ ПРОЦЕССА РЕШЕНИЯ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Цель: усвоить и развить логику обоснования процесса решения уравнений на примере тригонометрических уравнений.

Теоретическая часть

Одной из основных идей решения является идея, общая для всех типов уравнений, — переход от одного уравнения к уравнению-следствию или равносильному уравнению (или их системе либо совокупности), от него к следующему и т. д., пока не придем к простейшим уравнениям, из которых получаем решение исходного уравнения.

В этом случае применяются различные виды преобразования: перенос слагаемых из одной части уравнения в другую; умножение или деление обеих частей уравнения на число или некоторое выражение; возведение обеих частей уравнения в квадрат; тождественные преобразования отдельных частей уравнения (группировка, применение формул сокращенного умножения, выделение полного квадрата и т. д.).

Способ равносильных переходов. Если, выполняя преобразования, мы получаем цепочку равносильных уравнений, то проверка не является составной частью решения. В этом и заключается сущность способа равносильных переходов.

Пример 1. Решить уравнение $2\cos x - 1 = 0$.

Решение. Имеем: $(2\cos x - 1 = 0) \Leftrightarrow (2\cos x = 1) \Leftrightarrow \left(\cos x = \frac{1}{2}\right)$, откуда $x = \pm\arccos\frac{1}{2} + 2\pi k = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

Ответ: $\pm\frac{\pi}{3} + \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

Способ проверки. Напомним, что при умножении или делении обеих частей уравнения на некоторое выражение не всегда получается уравнение, равносильное исходному: могут появиться посторонние корни или могут потеряться корни. Лишние корни могут появиться также при возведении обеих частей уравнения в четную степень. Посторонние корни исключаются с помощью проверки.

Пример 2. Решить уравнение $\cos x - \sqrt{3}\sin x = 0$.

Решение. Разделим обе части уравнения на $\cos x$. Если $\cos x = 0$, то $\sin x \neq 0$ и $\cos x - \sqrt{3}\sin x \neq 0$, значит, среди нулей функции $\cos x$ нет корней данного уравнения. Поэтому получаем равносильное данному уравнение:

$$\left(1 - \sqrt{3}\frac{\sin x}{\cos x} = 0\right) \Leftrightarrow \left(1 - \sqrt{3}\,\mathrm{tg}\,x = 0\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{3}\,\mathrm{tg}\,x = 1\right) \Leftrightarrow \left(\mathrm{tg}\,x = \frac{\sqrt{3}}{3}\right), \text{ откуда}$$

$$x = \mathrm{arctg}\frac{\sqrt{3}}{3} + \pi k,\ x = \frac{\pi}{6} + \pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}.$$

Ответ: $\frac{\pi}{3} + \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

Практическая часть

Задание 1. Решите уравнение:

а) $\frac{\sin x + \cos x}{\sin x} = \frac{2}{\operatorname{tg} x}$; б) $\frac{\sin x - \cos x}{\cos x} = 3 \operatorname{tg} x$;

в) $\frac{\sin x + 1}{\operatorname{tg} x + 3} = 0$; г) $\frac{5 \sin \pi x - \cos \pi x}{\sin \pi x} = \frac{4}{\operatorname{tg} \pi x}$;

д) $\frac{\sqrt{3} \cos 7x + \sin 7x}{\cos 7x} = 2 \operatorname{tg} 7x$;

е) $\frac{\cos 3x (\sin 3x - 1)}{\operatorname{tg} 3x - 2} = 0$.

Задание 2. Решите уравнение:

а) $\cos x + \sin x = 0$; б) $\sin x = \cos x$;

в) $\sin x + \sqrt{3} \cos x = 0$; г) $2 \sin x - 5 \cos x = 0$;

д) $\sin \pi x + \sqrt{3} \cos \pi x = 0$; е) $\sqrt{3} \sin \frac{\pi}{x} + \cos \frac{\pi}{x} = 0$;

ж) $\sqrt{7} \sin 7x + \cos 7x = 0$; з) $3 \cos 4x - \sqrt{2} \sin 4x = 0$.

Задание 3. Решите уравнение:

а) $(\operatorname{tg} x - 3)\left(\cos x - \frac{1}{2}\right) = 0$;

б) $(2 \cos x - 3) \cdot \operatorname{ctg} x = 0$;

в) $\sqrt{\sin x + 4} \cdot \cos x = 0$;

г) $\sqrt{2 \cos x + 5} \cdot \sin (3x - 30^\circ) = 0$.

Ваш помощник

К заданию 1. а) $\frac{\pi}{4} + \pi, k \in \boldsymbol{Z}$; б) $-\operatorname{arctg} \frac{1}{2} + \pi k, k \in \boldsymbol{Z}$. Учитесь самоконтролю.

К заданию 2. а) $-\frac{\pi}{4} + \pi, k \in \boldsymbol{Z}$.

К заданию 3. г) $10^\circ + 60^\circ n, n \in \boldsymbol{Z}$.

УЭ-5. МЕТОД ВВЕДЕНИЯ НОВОЙ ПЕРЕМЕННОЙ ПРИ РЕШЕНИИ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Цель: выработать умения и навыки по овладению методом введения новой переменной при решении тригонометрических уравнений, удовлетворяющие таким требованиям, как правильность, осознанность, рациональность и прочность.

Теоретическая часть

Метод введения новой переменной (метод подстановки) удобен в случае, если уравнение можно представить в виде $F\big(\varphi(x)\big) = 0$, где F и φ — некоторые функции. Метод заключается в том, что вводят новую переменную $t = \varphi(x)$. Тогда исходное уравнение принимает вид: $F(t) = 0$. Находим корни последнего уравнения и для каждого его корня t_0 решаем уравнение $\varphi(x) = t_0$. В результате получаем корни исходного уравнения.

Пример 1. Решить уравнение $\cos\left(2x - \frac{\pi}{12}\right) - \frac{1}{2} = 0.$

Решение. Положим $2x - \frac{\pi}{12} = t$. Тогда $\cos t - \frac{1}{2} = 0$ или $\cos t = \frac{1}{2}$, откуда $t = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}$.

Значит, $2x - \frac{\pi}{12} = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k$, а $x = \pm\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{24} + \pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}$.

Ответ: $\pm\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{24} + \pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}$.

Пример 2. Решить уравнение

$$2\cos^2 x - 3\cos x - 2 = 0.$$

Решение. Сделаем замену: $\cos x = t$. Получим квадратное уравнение:

$$2t^2 - 3t - 2 = 0.$$

Его корни: $t_1 = 2$, $t_2 = \frac{1}{2}$. Затем решаем уравнения $\cos x = t_1$ и $\cos x = t_2$, т. е. $\cos x = 2$ и $\cos x = \frac{1}{2}$. Первое уравнение решений не имеет, а второе имеет решения

$$x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}.$$

Ответ: $\pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}$.

Практическая часть

Задание 1. Решите уравнение:

а) $\sin 2x = 0$; б) $2\sin 2x - 1 = 0$;

в) $\sin\frac{x}{3} = -1$; г) $\sin\left(\frac{x}{2} - 1\right) = 0$;

д) $\sin\left(\frac{\pi}{6} - 2x\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; е) $\sin\left(4x - \frac{\pi}{6}\right) = -0{,}05$.

Задание 2. Решите уравнение:

а) $\cos 3x = \frac{1}{2}$; б) $\cos 2x = -1$;

в) $\cos\left(5x + \frac{5}{4}\right) = \frac{1}{2}$; г) $\cos\left(6x - \frac{\pi}{4}\right) = -\sqrt{3}$;

д) $\cos\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{7}\right) = \sqrt{3}$; е) $3\cos 5x - 3 = 0$.

Задание 3. Решите уравнение:

а) $\operatorname{tg} 2x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$; б) $\operatorname{tg}\frac{x}{3} = -1$;

в) $\operatorname{tg}(2x + 5) = -\sqrt{3}$; г) $\sqrt{3}\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{6} - 3x\right) + 3 = 0$;

д) $3\operatorname{tg}(x + 1) - \sqrt{3} = 0$; е) $\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right) - 1 = 0$.

Задание 4. Решите уравнение:

а) $\operatorname{ctg} 4x = 5$;

б) $\operatorname{ctg} 2x + \sqrt{3} = 0$;

в) $\operatorname{ctg}\left(3x + \frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}$;

г) $\sqrt{3}\operatorname{ctg}\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) - 1 = 0$;

д) $\sqrt{3}\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{3} - x\right) = 1$;

е) $3\operatorname{ctg}\frac{x}{2} + 5 = 0$.

Задание 5. Решите уравнение:

а) $\sin^2 x + 2\sin x - 3 = 0$;

б) $\cos^2 x - \cos x - 2 = 0$;

в) $2\cos^2 x - 5\cos x + 2 = 0$;

г) $4\cos^2 x - 4\cos x - 1 = 0$;

д) $2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0$;

е) $\operatorname{tg}^2 x - 2\operatorname{tg} x - 3 = 0$;

ж) $\sin^2 3x - 3\sin 3x + 2 = 0$;

з) $\cos^2 2x + \cos 2x - 6 = 0$;

и) $3\operatorname{tg}^2 2x + 2\operatorname{tg} 2x - 5 = 0$;

к) $\operatorname{tg}^4 3x - 3\operatorname{tg}^2 3x + 1 = 0$.

Задание 6. Решите уравнение:

а) $\sin^3 x + 9\sin^2 x + 23\sin x - 15 = 0$;

б) $\operatorname{tg}^3 x - 4\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg} x + 6 = 0$;

в) $4\cos^3 x + 6\cos^2 x + 4\cos x + 1 = 0$;

г) $10\sin^3 \pi x - 3\sin^2 \pi x - 2\sin \pi x + 1 = 0$.

Задание 7. Решите уравнение:

а) $|\cos 2x - 1| - 2|\cos 2x + 2| = 0$;

б) $|\cos \pi x - 3| + 2|\cos \pi x + 1| = 4$;

в) $|2\sqrt{3}\operatorname{tg} x - 1| = 5\sqrt{3}\operatorname{tg} x - 10$;

г) $|4\sin 3x + 2| = 10\sin 3x - 1$.

Задание 8. Решите уравнение:

а) $\sqrt{\sin x} = 2\sin x - 1$; б) $2\cos x = 1 - \sqrt{\cos x}$;

в) $6\cos x - 2 = \sqrt{10 - 18\cos x}$; г) $\sqrt{5 - 2\sin x} = 6\sin x - 1$.

Ваш помощник

К заданию 5. а) Подстановка $\sin x = t$.

К заданию 8. а) Подстановка $\cos 2x = t$.

УЭ-6. МЕТОД РАЗЛОЖЕНИЯ НА МНОЖИТЕЛИ ПРИ РЕШЕНИИ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Цель: выработать умения и навыки по овладению методом разложения левой части на множители при решении тригонометрических уравнений, удовлетворяющие таким требованиям, как правильность, осознанность, рациональность и прочность.

Теоретическая часть

Приводим уравнение к виду $f(x) = 0$ и представляем левую часть уравнения в виде произведения $f_1(x) \cdot f_2(x) \cdot \ldots \cdot f_m(x)$, применяя группировку, вынесение общего множителя за скобки. Тогда данное уравнение приводится к совокупности уравнений: $f_1(x) = 0$, $f_2(x) = 0$, ..., $f_m(x) = 0$. Следует помнить, что эта совокупность не всегда равносильна исходному уравнению и что здесь надо руководствоваться правилом: произведение равно нулю тогда и только тогда, когда один из множителей равен нулю, а все остальные при этом имеют смысл.

Пример. Решить уравнение $\sin x = \frac{1}{2}\operatorname{tg} x$.

Решение. Представим уравнение в виде $f(x) = 0$, а затем его левую часть в виде произведения:

$$\left(\sin x - \frac{1}{2}\operatorname{tg} x = 0\right) \Leftrightarrow \left(\sin x\left(1 - \frac{1}{2\cos x}\right) = 0\right) \Leftrightarrow \left[\begin{aligned} &\sin x = 0, \\ &1 - \frac{1}{2\cos x} = 0. \end{aligned}\right.$$

Первое уравнение имеет решение $x = \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$. Решаем второе уравнение:

$$1 = \frac{1}{2\cos\ x},\ \cos\ x = \frac{1}{2},\ x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}.$$

Ответ: $\{\pi k \mid k \in \boldsymbol{Z}\} \cup \left\{\pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n \mid n \in \boldsymbol{Z}\right\}$.

Практическая часть

Задание 1. Решите уравнение:

а) $\operatorname{tg} 3x \cos x = 0$;

б) $\sin 2x \operatorname{tg} x = 0$;

в) $\operatorname{tg} 3x \operatorname{tg} 6x = 0$;

г) $\cos(2x + 3)\operatorname{ctg}(x - 1) = 0$.

Задание 2. Решите уравнение:

а) $\sin^2 x - \sin x = 0$;

б) $\cos^2 x - \cos x = 0$;

в) $\operatorname{tg}^5 x - \operatorname{tg}^2 x = 0$;

г) $\operatorname{ctg}^2 x - \operatorname{ctg} x = 0$;

д) $\operatorname{tg}^2 x + 3\operatorname{tg} x = 0$;

е) $\operatorname{tg}^3 x - 3\operatorname{tg} x = 0$.

Задание 3. Решите уравнение:

а) $\sin x \cos x - \sqrt{3}\cos^2 x = 0$;

б) $\sin 2x \cos 2x - \cos^2 2x = 0$;

в) $3\cos x + \sin x \cos x + 3\sin x + \sin^2 x = 0$;

г) $2\cos x - \cos^2 x - 2\sqrt{3}\sin x + \sqrt{3}\sin x \cos x = 0$;

д) $2\sin^2 3\pi x - \sin 3\pi x = 0$;

е) $\sqrt{2}\cos^2 7\pi x - \cos 7\pi x = 0$.

Ваш помощник

К заданию 1. а) $\frac{\pi}{3}n,\ n \in \boldsymbol{Z};\ \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}$.

К заданию 3. а) $\frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z};\ \frac{\pi}{3} + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$.

УЭ-7. РЕШЕНИЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С ПРИМЕНЕНИЕМ ОСНОВНЫХ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ТОЖДЕСТВ

Цель: повторить основные тригонометрические тождества; выработать умения и навыки по решению тригонометрических уравнений с применением основных тригонометрических тождеств, удовлетворяющие таким требованиям, как правильность, осознанность, рациональность и прочность.

Теоретическая часть

Напомним основные тригонометрические тождества:

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1,$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\ \left(\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}\right),$$

$$1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}.$$

Эти тождества в сочетании с общими методами решения уравнений позволяют решать уже довольно много тригонометрических уравнений.

Пример 1. Решить уравнение $2\cos^2 x + 3\sin x = 0$.

Решение. Поскольку $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$, то данное уравнение равносильно такому:

$$2(1 - \sin^2 x) + 3\sin x = 0,$$

$$\text{т. е. } 2\sin^2 x - 3\sin x - 2 = 0.$$

Это квадратное уравнение относительно $\sin x$. Решаем его:

$$\sin x = -\frac{1}{2} \text{ или } \sin x = 2.$$

Уравнение $\sin x = 2$ решений не имеет, а первое уравнение имеет корни: $x = (-1)^k \arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) + \pi k = (-1)^{k+1}\frac{\pi}{6} + \pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}$.

Ответ: $(-1)^{k+1}\frac{\pi}{6} + \pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}$.

Пример 2. Решить уравнение

$$\sin^2 x - 4\sin x\cos x - 5\cos^2 x = 0.$$

Решение. Данное уравнение равносильно уравнению

$$\operatorname{tg}^2 x - 4\operatorname{tg} x - 5 = 0.$$

Решая это квадратное уравнение относительно $\operatorname{tg} x$, получаем:

$$\operatorname{tg} x = -1 \text{ или } \operatorname{tg} x = 5.$$

Откуда имеем: $x = -\frac{\pi}{4} + \pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}$, или $x = \operatorname{arctg} 5 + \pi l,\ l \in \boldsymbol{Z}$.

Ответ: $-\frac{\pi}{4} + \pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}, \operatorname{arctg} 5 + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$.

Практическая часть

Задание 1. Решите уравнение:

а) $2\cos^2 x - 3\cos^2 x = \frac{3}{4}$;

б) $2\sin^2 x - \cos x = 1$;

в) $2\sin x - \cos^2 x - 2 = 0$;

г) $2\cos^2 x - 5\sin x = -1$;

д) $\sin x - \cos^2 x + 2 = 0$;

е) $\sin^2 x - 2\cos x = 0$.

Задание 2. Решите уравнение:

а) $3\sin^2 2x + 7\cos 2x - 3 = 0$;

б) $2\sin^2 x + \operatorname{tg}^2 x = 2$;

в) $\cos^4 2x + 6\cos^2 2x = \frac{25}{16}$.

Задание 3. Решите уравнение:

а) $\sin x - \cos x = 0$;

б) $\sin x + \cos x = 0$;

в) $\sqrt{3}\sin x - \cos x = 0$;

г) $\sin x + \sqrt{3}\cos x = 0$;

д) $3\sin x = 2\cos x$;

е) $2\sin x + \cos x = 0$.

Задание 4. Решите уравнение:

а) $2{,}5\sin 2x - 8{,}75\cos 2x = 0$;

б) $\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) - \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = 0$;

в) $5\sin 3x = 2\cos 3x$;

г) $\sqrt{3}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+\cos\left(\frac{\pi}{4}+x\right)=0$.

Задание 5. Решите уравнение:

а) $2\sin^2 x - 5\sin x\cos x + 3\cos^2 x = 0$;

б) $2\sin^2 x = \sin x\cos x + \cos^2 x$;

в) $\sin^2 2x + \sin 2x\cos 2x - 2\cos^2 2x = 0$;

г) $\sin^2\frac{x}{2} - 3\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} + 2\cos^2\frac{x}{2} = 0$.

Задание 6. Решите уравнение:

а) $2\cos^2 x - 3\sin x\cos x + 3\sin^2 x = 1$;

б) $3\sin^2 x - 7\sin x\cos x + 14\cos^2 x - 2 = 0$;

в) $4\sin^2 2x + \sin 2x\cos 2x = 3$;

г) $3\sin^2 x + 2\cos x\sin x - 2 = 0$;

д) $5\cos^2 x - 2\sin x\cos x = 2 + 3\sin^2 x$;

е) $\left|4\sin^2 x - 8\sin x\cos x + 10\cos^2 x\right| = 3$.

Задание 7. Решите уравнение:

а) $\cos^2 x + \cos x\sin x = 0$;

б) $\sin^3 3x - \sin 3x\cos^2 3x = 0$;

в) $\cos^3 2x = 3\sin^2 2x\cos 2x$;

г) $3\sin^2 x\cos x - 7\sin x\cos^2 x + 4\cos^3 x = 0$.

Задание 8. Решите уравнение:

а) $1 - 2\sin x\cos x + \sin x + \cos x = 0$;

б) $2\sin x\cos x + 5\sin x + 5\cos x + 1 = 0$;

в) $10\sin x\cos x - 11\cos x - 11\sin x + 7 = 0$;

г) $\sin^3 2x + \cos^3 2x + \sin 2x + \cos 2x = 1$;

д) $2(1 - \sin x - \cos x) + \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x = 0$;

е) $2 - 2\cos x + 2\sin x - \sin x\cos x = 0$.

Задание 9. Решите уравнение:

а) $\sqrt{3}\,\mathrm{tg}\,x+3=\frac{3}{\cos^2 x}$;

б) $\frac{1}{\sin^2 x}=\mathrm{ctg}\,x+3$;

в) $\frac{3}{\sin^2 x}-2\sqrt{3}\,\mathrm{tg}\,x-6=0$;

г) $2\mathrm{tg}^2 x+3=\frac{3}{\cos^2 x}$.

УЭ-8. РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ С ПРИМЕНЕНИЕМ ФОРМУЛ СЛОЖЕНИЯ. МЕТОД ВСПОМОГАТЕЛЬНОГО АРГУМЕНТА

Цель: выработать умения и навыки по решению тригонометрических уравнений с применением формул сложения, удовлетворяющие таким требованиям, как правильность, осознанность, рациональность и прочность.

Теоретическая часть

Решение уравнений с применением формул сложения. Рассмотрим конкретные примеры.

Пример 1. Решить уравнение

$$\mathrm{tg}\left(x+\frac{\pi}{3}\right)+\mathrm{tg}\,x=2\sqrt{3}.$$

Решение. Применяя формулу для $\mathrm{tg}\,(\alpha+\beta)$, получим:

$$\frac{\mathrm{tg}\,x+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}\,\mathrm{tg}\,x}+3\,\mathrm{tg}\,x=2\sqrt{3}.$$

После замены $\mathrm{tg}\,x=t$ имеем:

$$\frac{t+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}t}+3t=2\sqrt{3},\text{ т. е. } 9t^2-10\sqrt{3}t+3=0,$$

откуда $t = \sqrt{3}$ или $t = \frac{\sqrt{3}}{9}$. Значит, $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$ или $\operatorname{tg} x = \frac{\sqrt{3}}{9}$, а $x = \frac{\pi}{3} + \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$, или $x = \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3}}{9} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

Ответ: $\frac{\pi}{3} + \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$, $\operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3}}{9} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

Пример 2. Решить уравнение

$$\sin 4x \cos 2x = \cos 4x \sin 2x.$$

Решение. Имеем:

$$(\sin 4x \cos 2x - \cos 4x \sin 2x = 0) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \big(\sin(4x - 2x) = 0\big) \Leftrightarrow (\sin 2x = 0) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (2x = \pi k,\ \ k \in \boldsymbol{Z}) \Leftrightarrow \left(x = \frac{\pi k}{2},\ \ k \in \boldsymbol{Z}\right).$$

Ответ: $\frac{\pi k}{2}$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

Метод вспомогательного аргумента. Методом вспомогательного аргумента можно решать любое уравнение вида $a \sin x + b \cos x = c$. Разделим обе части уравнения на $\sqrt{a^2 + b^2}$:

$$\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin x + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos x = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Поскольку $\left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right)^2 + \left(\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right)^2 = 1$, то существует число φ, такое, что

$$\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \sin \varphi,\ \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \cos \varphi.$$

Таким образом, получаем:

$$\sin x \sin \varphi + \cos x \cos \varphi = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}},$$

или, используя формулу для $\cos(\alpha - \beta)$:

$$\cos(x - \varphi) = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Последнее уравнение имеет решения, если $|c| \le \sqrt{a^2 + b^2}$:

$$x = \pm\arccos\frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}} + 2\pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}.$$

Пример 3. Решить уравнение

$$5\sin x - 12\cos x = -13.$$

1-й способ. В этом примере $a = 5$, $b = -12$, $\sqrt{a^2 + b^2} = 13$. Разделим обе части уравнения на 13:

$$\frac{5}{13}\sin x - \frac{12}{13}\cos x = -1.$$

Рассмотрим угол φ, такой, что $\sin\varphi = \frac{5}{13}$, $\cos\varphi = -\frac{12}{13}$.

Таким углом будет, например, угол $\varphi = \pi - \arcsin\frac{5}{13}$ $\left(\varphi = \arccos\left(-\frac{12}{13}\right)\right)$. Тогда уравнение принимает вид: $\cos(x - \varphi) = -1$, откуда

$$x - \varphi = \pi + 2\pi k,\ k \in \boldsymbol{Z},$$

$$x = \varphi + \pi + 2\pi k = -\arcsin\frac{5}{13} + \pi(2k + 1),\ k \in \boldsymbol{Z}.$$

Ответ: $-\arcsin\frac{5}{13} + \pi(2k + 1),\ k \in \boldsymbol{Z}$.

Одно и то же тригонометрическое уравнение можно решать различными способами. Так, последнее уравнение, как и любое уравнение вида $a\sin x + b\cos x = c$, можно решать не только способом вспомогательного аргумента, но и иначе. Укажем несколько других способов.

2-й способ. Возводим обе части уравнения в квадрат, после чего уравнение сводится к однородному.

3-й способ. Переносим $12\cos x$ в правую часть и возводим обе части в квадрат, после чего уравнение решается заменой $\sin x = t$.

4-й способ. Применяем формулы двойного угла и сводим уравнение к однородному.

5-й способ. Выражаем $\sin x$ и $\cos x$ через $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$.

Заметим, что при втором и третьем способах необходима проверка.

Практическая часть

Задание 1. Решите уравнение:

а) $\sin^2\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+\cos^2 x+\sin x\cos x = 2;$

б) $\operatorname{tg}\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+\operatorname{tg} x = 0;$

в) $2(1+2\sin x\cos x) = \operatorname{tg}\left(x+\frac{\pi}{4}\right);$

г) $\left(\sin 2x+\sqrt{3}\cos 2x\right)^2 = 2-2\cos\left(\frac{\pi}{6}-2x\right);$

д) $\sin\left(\frac{\pi}{6}+x\right)+\sqrt{3}\cos\left(\frac{\pi}{6}-x\right) = 2.$

Задание 2. Решите уравнение:

а) $\sin x-\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2};$ б) $3\cos x+4\sin x = 5;$

в) $3\cos x+2\sqrt{3}\sin x = 4{,}5;$ г) $\sqrt{2}\cos x-\sqrt{3}\sin x = 1;$

д) $\sqrt{3}\sin 3x+\cos 3x = 1;$ е) $2\sin x-\cos x = 3.$

Задание 3. Решите уравнение:

а) $\sqrt{3}\sin x-\cos x = \sqrt{2};$ б) $\sin x-\cos x = 1;$

в) $\cos x = 1-\sqrt{3}\sin x;$ г) $\sin x+\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2};$

д) $3\sin x-4\cos x = \sqrt{26};$ е) $\sin 2x+\sqrt{3}\cos 2x = \sqrt{3};$

ж) $\cos 3x = 1-\sqrt{3}\sin 3x;$ з) $\sin 2x = \sqrt{2}-\cos 2x.$

Задание 4. Найдите множество значений функции, заданной формулой:

а) $y = 5\cos 3x - 12\sin 3x$; б) $y = 6\sin 2x + 8\cos 2x$;

в) $y = 3\cos 5x + 4\sin 5x + 2$; г) $y = 15\sin 4x - 8\cos 4x - 3$.

Задание 5. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции, заданной формулой:

а) $y = \left|\sqrt{7}\cos x - \sqrt{29}\sin x\right|$;

б) $y = \left|2\sin 3x + \sqrt{21}\cos 3x\right|$;

в) $y = \left|\sqrt{33}\cos 7x - 4\sin 7x\right| - 4$;

г) $y = \left|\sqrt{3}\sin x + \sqrt{6}\cos x\right| + 2$.

Задание 6. Докажите, что уравнение $2\sin x + 3\cos x = 5$ не имеет решения.

УЭ-9. РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ С ПРИМЕНЕНИЕМ ФОРМУЛ ПРИВЕДЕНИЯ

Цель: повторить значения формул приведения; выработать умения и навыки по решению тригонометрических уравнений с применением формул приведения, удовлетворяющие таким требованиям, как правильность, осознанность, рациональность и прочность.

Теоретическая часть

Напомним формулы приведения, записав их в виде таблицы:

β	$\pi + \alpha$	$\pi - \alpha$	$2\pi + \alpha$	$2\pi - \alpha$
$\sin\beta$	$-\sin\alpha$	$\sin\alpha$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$
$\cos\beta$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$\cos\alpha$	$\cos\alpha$
$\mathrm{tg}\,\beta$	$\mathrm{tg}\,\alpha$	$-\mathrm{tg}\,\alpha$	$\mathrm{tg}\,\alpha$	$-\mathrm{tg}\,\alpha$
$\mathrm{ctg}\,\beta$	$\mathrm{ctg}\,\alpha$	$-\mathrm{ctg}\,\alpha$	$\mathrm{ctg}\,\alpha$	$-\mathrm{ctg}\,\alpha$

β	$\frac{\pi}{2}+\alpha$	$\frac{\pi}{2}-\alpha$	$\frac{3}{2}\pi+\alpha$	$\frac{3}{2}\pi-\alpha$
$\sin\beta$	$\cos\alpha$	$\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$
$\cos\beta$	$-\sin\alpha$	$\sin\alpha$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$
$\operatorname{tg}\beta$	$-\operatorname{ctg}\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$	$-\operatorname{ctg}\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$
$\operatorname{ctg}\beta$	$-\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$

Важно знать закономерности, которые позволяют сформулировать два правила, облегчающие применение формул приведения:

1) в правой части каждого равенства ставят тот знак, который имеет выражение в левой части, если считать $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$;

2) для углов $\pi \pm \alpha, 2\pi \pm \alpha$ в обеих частях равенства стоит или синус, или косинус, или тангенс, или котангенс; для углов $\frac{\pi}{2} \pm \alpha$ и $\frac{3\pi}{2} \pm \alpha$ синус меняется на косинус, косинус на синус, тангенс на котангенс, котангенс на тангенс.

Рассмотрим пример решения тригонометрического уравнения с помощью применения формул приведения.

Пример. Решить уравнение

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = 2 - 3\cos x.$$

Решение. Поскольку $\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos x$, то имеем $\cos x = \frac{1}{2}$, откуда $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}$.

Ответ: $\pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}$.

Практическая часть

Задание 1. Решите уравнение:

а) $3\sin(\pi + x) = 2\sin^2\left(\frac{3}{2}\pi + x\right)$;

б) $0{,}5 - \cos\left(\frac{\pi}{2} - 5x\right)\cos(5x - 6\pi) = -\cos\frac{5\pi}{6}\cos\frac{25\pi}{6}$;

в) $4\sin\left(3x - \frac{\pi}{2}\right) + 7\cos^2\left(3x - \frac{\pi}{2}\right) = 7\frac{1}{4}$.

Задание 2. Решите уравнение:

а) $\cos\left(\frac{5\pi}{2} - x\right) - \sin(\pi + 2x) = 0$;

б) $2\sin^2 x + 5\cos\left(\frac{3}{2}\pi + x\right) - 3 = 0$;

в) $2\sin^2(3\pi + x) + 5\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) + 2 = 0$;

г) $2\sin^2\frac{x}{2} = \cos\left(\frac{3}{2}\pi + \frac{x}{2}\right)$;

д) $\cos\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) + \sin\left(\frac{7\pi}{2} + x\right) = \sqrt{2}$;

е) $\sqrt{3}\sin\left(\frac{5}{2}\pi - 3x\right) - \cos\left(\frac{\pi}{2} + 3x\right) = 2$;

ж) $2\sin x\cos\left(x + \frac{11\pi}{2}\right) + \sin\left(\frac{9\pi}{2} + x\right)\cos x = 3\cos x\sin(7\pi - x)$;

з) $\sqrt{3}\sin^2(\pi + x) - \left(1 - \sqrt{3}\right)\cos x\cos\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) + \cos^2 x = 0$.

УЭ-10. РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ С ПРИМЕНЕНИЕМ ФОРМУЛ ДВОЙНОГО И ТРОЙНОГО АРГУМЕНТОВ

Цель: повторить формулы двойного и тройного аргументов; выработать умения и навыки по решению тригонометрических уравнений с применением этих формул, удовлетворяющие таким требованиям, как правильность, осознанность, рациональность и прочность.

Теоретическая часть

Вначале напомним формулы двойного угла.

Для любого угла α справедливы равенства:

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha, \cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha.$$

Для любого угла α, такого, что $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$, и $\alpha \neq \pm\frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$, $n \in \boldsymbol{Z}$, имеет место равенство

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2\alpha}.$$

Для любого угла α имеют место равенства:

$$\sin 3\alpha = \sin\alpha(3 - 4\sin^2\alpha),$$

$$\cos 3\alpha = \cos\alpha(4\cos^2\alpha - 3).$$

Рассмотрим примеры решения тригонометрических уравнений с помощью применения формул двойного аргумента.

Пример. Решить уравнение $\sin^2 2x = \cos^2 x$.

Решение. По формуле для $\sin 2x$ имеем:

$$\left((2\sin x\cos x)^2 = \cos^2 x\right) \Leftrightarrow (4\sin^2 x\cos^2 x - \cos^2 x = 0) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\cos^2 x(4\sin^2 x - 1) = 0\right) \Leftrightarrow \left(\left[\begin{array}{l}\cos^2 x = 0, \\ \sin^2 x = \frac{1}{4}\end{array}\right.\right) \Leftrightarrow \left(\left[\begin{array}{l}\cos x = 0, \\ \sin x = \frac{1}{2}, \\ \sin x = -\frac{1}{2}\end{array}\right.\right),$$

откуда $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$; $x = (-1)^l \frac{\pi}{6} + \pi l$, $l \in \boldsymbol{Z}$; $x = (-1)^{m+1}\frac{\pi}{6} + \pi m$, $m \in \boldsymbol{Z}$.

Вторую и третью серии корней можно записать одной формулой:

$$x = \pm\frac{\pi}{6} + \pi m, m \in \boldsymbol{Z}.$$

Ответ: $2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$, $\pm\frac{\pi}{6} + \pi m$, $m \in \boldsymbol{Z}$.

Примечание. Это уравнение можно решить и другими способами, в частности применяя формулы понижения степени сразу или начиная с совокупности уравнений.

Практическая часть

Задание 1. Решите уравнение:

а) $\sin 2x + \sin^2 x = 4\cos^2 x$;

б) $22\cos^2 x + 4\sin 2x = 7$;

в) $2\cos^2 x + \sin 2x - 2 = 0$;

г) $2\cos^2 x + \frac{5}{4}\sin^2 2x - \sin^4 x + \cos 2x = 0$;

д) $2\sin 2x + 4\sin^2 x = 1 + \sqrt{3}$;

е) $\cos x + 2\cos 2x = \sin\frac{5\pi}{4}$;

ж) $\cos 2x - 5\sin x = 3$;

з) $\cos^2 2x - \sin^2 x = 0{,}5$;

и) $\sin^2(x + \pi) - \cos\left(\frac{3}{2}\pi - 2x\right) = \sin^2\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$.

Задание 2. Решите уравнение:

а) $\sin^4 x + \cos^4 x = \frac{2}{3}$;

б) $\sin^4 x + \cos^4 x = \cos 4x$;

в) $\sin^4 2x + \cos^4 2x = \sin 2x \cos 2x$;

г) $\sin^4 \frac{x}{2} - \cos^4 \frac{x}{2} = \frac{1}{4}$;

д) $\sin^4 x - \cos^4 x = \sqrt{3}\sin 2x$;

е) $\cos^4 x - \sin^4 x = \sin 4x$.

Задание 3. Решите уравнение:

а) $3\sin\frac{x}{3} = \sin x$;

б) $\sin\frac{3}{2}x + 3\sin x = 3\sin\frac{x}{2}$;

в) $3\cos x + 3\sin x + \sin 3x - \cos 3x = 0$;

г) $\cos 9x - 2\cos 6x = 2$;

д) $\sin 6x + 2 = 2\cos 4x$;

е) $\sin 3x + \sin^3 x = \dfrac{3\sqrt{3}}{4}\sin 2x$;

ж) $\cos 3x - \cos 2x = \sin 3x$;

з) $\sin 3x - 4\sin x\cos 2x = 0$.

Задание 4. Решите уравнение:

а) $1 + \cos\left(5x - \dfrac{\pi}{2}\right) = \left(\cos\dfrac{5}{2}x - \sin\dfrac{5}{2}x\right)^2$;

б) $2 + \sin 3x = \left(\sin\dfrac{3}{2}x - \cos\dfrac{3}{2}x\right)^2$;

в) $4(\cos^2 x + \cos 2x) + 3\sin(270^\circ + x) = 2$;

г) $1 + \sin\left(\dfrac{\pi}{2} + \dfrac{x}{2}\right) = \cos(21\pi - x)$;

д) $3 + \cos 2x + 3\sqrt{2}\cos x = 0$;

е) $\cos 2x + \sqrt{2}\sin x = 1$;

ж) $2\sin^2 x\cos^2 x - 3\sin 2x - \dfrac{7}{2} = 0$;

з) $\sin^2 x\cos^2 x - \dfrac{3}{4}\cos 2x + \dfrac{3}{4} = 0$;

и) $(\sin x + 2\cos x)(3\sin x + \cos x) = \sin 2x$;

к) $(\sin x - \cos x)(3\sin x - 2\cos x) = \sin 2x$.

Задание 5. Решите уравнение:

а) $5 - 7|\sin 3x| = 2\cos^2 3x$;

б) $4 - 5|\cos x| = 2\sin^2 x$;

в) $\dfrac{1}{1+\cos^2 x} + \dfrac{1}{1+\sin^2 x} = \dfrac{16}{11}$;

г) $\dfrac{1}{1-\sin^2 2x} + \dfrac{1}{1-\cos^2 2x} = \dfrac{16}{3}$.

УЭ-11. РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ С ПРИМЕНЕНИЕМ ФОРМУЛ ПОНИЖЕНИЯ СТЕПЕНИ И ФОРМУЛ ПОЛОВИННОГО АРГУМЕНТА

Цель: повторить формулы понижения степени и формулы половинного аргумента; выработать умения и навыки по решению тригонометрических уравнений с применением этих формул, удовлетворяющие таким требованиям, как правильность, осознанность, рациональность и прочность.

Теоретическая часть

Напомним формулы понижения степени:

$$\cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2},\ \sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2}.$$

Если же в этих формулах вместо α взять $\frac{\alpha}{2}$, то получим:

$$\cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1+\cos\alpha}{2},$$

$$\sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{2},$$

откуда:

$$\left|\sin\frac{\alpha}{2}\right| = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}};\ \left|\cos\frac{\alpha}{2}\right| = \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}};$$

$$\left|\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\right| = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}};$$

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha};\ \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}.$$

Эти формулы позволяют заменять квадраты тригонометрических функций и сами эти функции синусами и косинусами вдвое большего или меньшего аргумента, что часто упрощает решение и его запись.

Пример. Решить уравнение

$$\cos^3 x + \cos^2 x - 4\cos^2\frac{x}{2} = 0.$$

Решение. Используя формулу $\left|\cos\frac{\alpha}{2}\right| = \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$, получим

$$\left(\cos^3 x + \cos^2 x - 4\cdot\frac{1+\cos\ x}{2} = 0\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\cos^2 x(\cos x + 1) - 2(\cos x + 1) = 0\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left((\cos x + 1)(\cos^2 x - 2) = 0\right) \Leftrightarrow (\cos x + 1 = 0) \Leftrightarrow (\cos x = -1) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x = \pi + 2\pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}) \Leftrightarrow \left(x = \pi(2k+1),\ k \in \boldsymbol{Z}\right).$$

Ответ: $\pi(2k+1)$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

Практическая часть

Задание 1. Решите уравнение:

а) $\sin^2 x + \sin^2 5x = 1$;

б) $\sin^2\frac{x}{2} + \sin^2\frac{3x}{2} = 1$;

в) $\sin^2 3x + \frac{1}{2}\sin^2 6x = 1$;

г) $2\sin^2 x + \cos 4x = 0$;

д) $2\cos^2 2x + \cos 10x - 1 = 0$;

е) $2\sin^2\frac{x}{2} + \cos 2x = 0$.

Задание 2. Решите уравнение:

а) $\sin^2 2x + \sin^2 3x + \sin^2 4x + \sin^2 5x = 2$;

б) $\cos^2 2x + \cos^2 4x - \sin^2 6x - \sin^2 8x = 0$;

в) $\cos^2 x + \cos^2 2x + \cos^2 3x + \cos^2 4x = 2$.

Задание 3. Решите уравнение:

а) $\sin^2 x + \sin^2 2x + \sin^2 3x = \frac{3}{2}$;

б) $\sin^2 x + \sin^2 2x = \sin^2 3x$;

в) $3\sin x + \sin 2x = 6\sin^2\frac{x}{2}$;

г) $\sin^2 6x + \sin^2 8x = \cos^2 2x + \cos^2 4x$;

д) $\sin^2 3x + \sin^2 4x = \sin^2 5x + \sin^2 6x$.

Задание 4. Решите уравнение:

а) $\sin^4 x + \cos^4 x = \sin x \cos x$;

б) $\sin^4 x + \cos^4 x = \frac{1}{4}(3 - \cos 6x)$;

в) $\sin^8 2x + \cos^8 2x = \frac{41}{128}$;

г) $\frac{\sin x}{1 + \cos x} = 2 \operatorname{ctg} x$;

д) $2\cos^2 3x + \sin 5x = 1$.

УЭ-12. РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ С ПОМОЩЬЮ УНИВЕРСАЛЬНОЙ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКОЙ ПОДСТАНОВКИ

Цель: выработать умения и навыки по решению тригонометрических уравнений с универсальной подстановкой, удовлетворяющие таким требованиям, как правильность, осознанность, рациональность и прочность.

Теоретическая часть

Если тригонометрическое уравнение содержит только тригонометрические функции одного аргумента, то формулы

$$\sin\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}} \quad \left(\frac{\alpha}{2} \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, \quad k \in \boldsymbol{Z}\right); \tag{1}$$

$$\cos\alpha = \frac{1 - \operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}} \quad \left(\frac{\alpha}{2} \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, \quad k \in \boldsymbol{Z}\right); \tag{2}$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}} \quad \left(\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi k \text{ и } \frac{\alpha}{2} \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, \quad k \in \boldsymbol{Z}\right) \tag{3}$$

позволяют привести его к уравнению относительно $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$, которое решается заменой $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t$. Эту замену называют **универсальной тригонометрической подстановкой**.

Следует помнить, однако, что при такой подстановке из рассмотрения исключаются числа $x=\pi+2\pi k$, $k\in \boldsymbol{Z}$, которые входят в область определения левых частей формул (1)—(3), но не входят в область определения правых частей этих формул. Поэтому, решая уравнение этим методом, надо проверить, нет ли среди исключительных чисел корней данного уравнения, иначе может произойти потеря корней.

Пример. Решить уравнение $\sin x+5\cos x=-5$.

Решение. Применяя формулы (1) и (2), получим

$$\frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}+\frac{5\left(1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}\right)}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}+5=0,$$

т. е. $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=-5$, откуда $\frac{x}{2}=\operatorname{arctg}(-5)+\pi k$, $k\in \boldsymbol{Z}$, значит,

$$x=-2\operatorname{arctg}5+2\pi k,\ k\in \boldsymbol{Z}.$$

Теперь еще надо проверить, нет ли среди чисел $\pi+2\pi k$ корней данного уравнения. Проверяем: $\sin(\pi+2\pi k)+5\cos(\pi+2\pi k)=-5$ — верное числовое равенство. Следовательно, все числа $\pi+2\pi k$, $k\in \boldsymbol{Z}$, являются корнями данного уравнения.

Ответ: $\{-2\operatorname{arctg}5+2\pi k,\ k\in \boldsymbol{Z}\}\cup\{\pi+2\pi k,\ k\in \boldsymbol{Z}\}$.

Заметим, что это уравнение можно решить методом вспомогательного аргумента и другими методами.

Практическая часть

Задание 1. Решите уравнение:

а) $2\sin 2x+3\operatorname{tg}x=5$; б) $\operatorname{tg}^2x+2\cos 2x-5=0$;

в) $2+\sin x=3\operatorname{tg}\frac{x}{2}$; г) $1+\cos x=-\operatorname{tg}\frac{x}{2}$.

Задание 2. Решите уравнение:

а) $\operatorname{tg} 2x + \sin 2x = \frac{16}{15}\operatorname{ctg} x$;

б) $1 - \sin x = (\sin x + \cos x)\cos x$;

в) $\operatorname{tg} 2x + \sin 2x = \frac{16}{15}\operatorname{ctg} 2x$;

г) $\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{ctg} x = 4\sin 2x$.

Задание 3. Решите уравнение:

а) $2\sin^2\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 2\sin^2 x - \operatorname{tg} x$;

б) $\frac{5\sin x - 5\operatorname{tg} x}{\sin x + \operatorname{tg} x} + 4(1 - \cos x) = 0$;

в) $\frac{1 - \cos 2x + \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg} x} = 1 + \sin 2x$;

г) $3\sin 4x = (\cos 2x - 1)\operatorname{tg} x$.

Задание 4. Решите уравнение:

а) $\operatorname{ctg} x - \operatorname{tg} x = \frac{3}{2}$;

б) $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x = \frac{4}{\sqrt{3}}$;

в) $\operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x = \frac{2}{\sqrt{3}}$;

г) $\operatorname{ctg} x - \operatorname{tg} x = 4 - 2\operatorname{tg} 2x$;

д) $\cos 4x + \frac{10\operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg}^2 x} = 3$;

е) $\cos 4x + \frac{2\operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg}^2 x} = 1$;

ж) $\frac{\sqrt{3}}{3} + 2\sin 2x = \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x$;

з) $\operatorname{ctg}(x + \pi) - \operatorname{tg}(x - \pi) = 6\operatorname{tg} 2x$.

УЭ-13. РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ ПРЕОБРАЗОВАНИЕМ СУММЫ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ВЫРАЖЕНИЙ В ПРОИЗВЕДЕНИЕ

Цель: выработать умения и навыки по решению тригонометрических уравнений путем преобразования суммы тригонометрических функций в произведение, удовлетворяющие таким требованиям, как правильность, осознанность, рациональность и прочность.

Теоретическая часть

При решении некоторых уравнений могут применяться следующие тригонометрические формулы:

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2};$$

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2};$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2};$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\sin\frac{\alpha+\beta}{2}.$$

Пример. Решить уравнение $\cos x = \cos 3x$.

Решение. Имеем:

$$(\cos x = \cos 3x) \Leftrightarrow (\cos x - \cos 3x = 0) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(2\sin\frac{x+3x}{2}\sin\frac{3x-x}{2} = 0\right) \Leftrightarrow (\sin 2x \sin x = 0) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\left[\begin{array}{l}\sin 2x = 0,\\ \sin x = 0\end{array}\right.\right),$$

$$\text{откуда } x = \frac{\pi k}{2},\ k \in \boldsymbol{Z},\ x = \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}.$$

Первая серия корней содержит вторую.

Ответ: $\frac{\pi k}{2}$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

Практическая часть

Задание 1. Решите уравнение:

а) $\sin 3x + \sin x = 0$;

б) $\sin 5x = \sin x$;

в) $\cos 2x = -\cos 6x$;

г) $\cos 2x + \cos 3x = 0$;

д) $\cos 2x - \cos 6x = 0$;

е) $\cos 3x = \sin x$;

ж) $\sin \frac{x}{2} = \cos \frac{x}{3}$;

з) $\sin^2 2x = \cos^2 x$.

Задание 2. Решите уравнение:

а) $\sin 3x + \sin 2x + \sin 4x = 0$;

б) $\sin x + \sin 3x + 4\cos 3x = 0$;

в) $1 + \cos x + \cos 2x + \cos 3x = 0$;

г) $\sin x + \sin 2x + \sin 3x + \sin 4x = 0$;

д) $\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 1 + \cos x + \cos 2x$;

е) $\sin x + \sin 2x - \sin(3x + \pi) = 1 + \cos x - \cos(\pi + 2x)$;

ж) $\dfrac{\cos x - \sin 2x}{\cos 3x} = 1.$

Задание 3. Решите уравнение:

а) $\sin x + \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 0$;

б) $\cos 3x + \sin(9x + 2) = 0$;

в) $\sin^2 x - \cos^2 x = \cos \frac{x}{2}$;

г) $\cos x - \cos 3x = 2\sqrt{3} \sin^2 x$;

д) $\sin 3x - \sin 7x = \sqrt{3} \sin 2x$.

Задание 4. Решите уравнение:

а) $\sin 7x - \cos 3x = 0$;

б) $\cos 4x + \sin x = 0$;

в) $1 - \sin 5x = \left(\cos \frac{3}{2}x - \sin \frac{3}{2}x\right)^2$;

г) $1+\cos 7x=\left(\sin\frac{3}{2}x-\cos\frac{3}{2}x\right)^2$;

д) $\cos 7x-\sin 5x=\sqrt{3}(\cos 5x-\sin 7x)$;

е) $\sin 4x+\sin 3x=\sqrt{3}(\cos 4x+\cos 3x)$.

УЭ-14. РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ ПРЕОБРАЗОВАНИЕМ ПРОИЗВЕДЕНИЯ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ В СУММУ

Цель: выработать умения и навыки по решению тригонометрических уравнений преобразованием произведения тригонометрических функций в сумму, удовлетворяющие таким требованиям, как правильность, осознанность, рациональность и прочность.

Теоретическая часть

При решении некоторых уравнений применяются следующие формулы:

$$\sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}\big(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\big);$$

$$\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\big(\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)\big);$$

$$\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\big(\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta)\big).$$

Пример. Решить уравнение

$$\cos 3x\cos 6x=\cos 4x\cos 7x.$$

Решение. Преобразуем произведение косинусов в полусумму косинусов:

$$\frac{1}{2}\big(\cos(3x+6x)+\cos(3x-6x)\big)=$$

$$=\frac{1}{2}\big(\cos(4x+7x)+\cos(4x-7x)\big)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\cos 9x + \cos 3x = \cos 11x + \cos 3x) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (\cos 9x - \cos 11x = 0) \Leftrightarrow (2\sin 10x \sin x = 0) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin 10x = 0, \\ \sin x = 0 \end{array}\right),$$

откуда

$$x = \frac{\pi k}{10},\ k \in \boldsymbol{Z}.$$

Ответ: $\frac{\pi k}{10},\ k \in \boldsymbol{Z}.$

Практическая часть

Задание 1. Решите уравнение:

а) $\cos 7x \cos 3x = \cos 4x;$

б) $\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = 0{,}5;$

в) $\cos(x + 70°)\cos(x + 10°) = 0{,}5;$

г) $\sin(x + 45°)\sin(x - 15°) = 0{,}5;$

д) $2\cos(x + 20°)\cos x = \cos 40°.$

Задание 2. Решите уравнение:

а) $\cos 3x \cos 6x = \cos 4x \cos 7x;$

б) $\sin x \sin 7x = \sin 3x \sin 5x;$

в) $\sin 5x \cos 3x = \sin 9x \cos 7x;$

г) $0{,}25 - 0{,}5\cos 2x = \cos x \cos 3x.$

Задание 3. Решите уравнение:

а) $8\cos x \cos\left(\frac{\pi}{3} + x\right)\sin\left(\frac{\pi}{6} + x\right) = 1;$

б) $\sin x \sin 2x \sin 3x = \frac{1}{4}\sin 4x.$

Задание 4. Решите уравнение:

а) $\mathrm{tg}(x - 15°)\,\mathrm{ctg}(x + 15°) = \frac{1}{3};$

б) $\sin x \sin 2x + \cos^2 x = \sin 4x \sin 5x + \cos^2 4x$;

в) $\sin^2 3x - \sin^2 13x = \cos 14x \cos 12x$;

г) $\sqrt{3} \sin 5x \cos x - \sin 3x = -\sqrt{3} \cos 5x \sin x$;

д) $2 \sin 2x \cos 3x + \sin x + \cos 2x = 0$;

е) $2(\sin 6x - \sin 4x \sin 2x) = \cos 6x + \cos 2x$;

ж) $2 \sin 4x \cos 2x = \sin 3x - \frac{\sqrt{3}}{2}$;

з) $\cos \frac{x}{2} \cos \frac{3}{2} x - \sin x \sin 3x - \sin 2x \sin 3x = 0$.

УЭ-15. ОТБОР КОРНЕЙ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Цель: выработать умения и навыки по отбору корней при решении тригонометрических уравнений, удовлетворяющие таким требованиям, как правильность, осознанность, рациональность, обобщенность и прочность.

Теоретическая часть

При решении тригонометрического уравнения часто возникает задача исследования его корней. В результате какая-то часть полученных значений переменной выбирается или отбрасывается.

Пример 1. Найти количество корней уравнения

$$6 \sin^2 x - \sin x - 1 = 0$$

на промежутке $\left[-\pi; \frac{5}{2}\pi\right]$.

Решение. Решая данное уравнение как квадратное относительно $\sin x$, получаем: $\sin x = \frac{1}{2}$ или $\sin x = -\frac{1}{3}$.

Построим график функции $y = \sin x$ на промежутке $\left[-\pi; \frac{5}{2}\pi\right]$ (рис. 15).

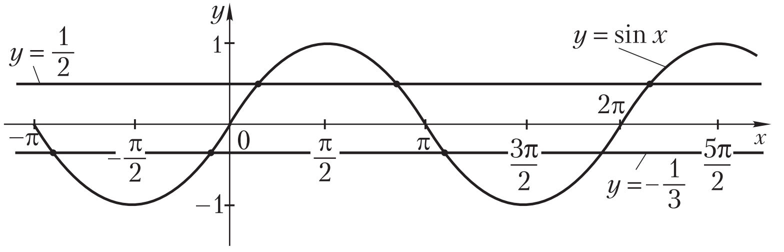


Рис. 15

Найдем, сколько точек пересечения имеет график функции $y = \sin x$ на промежутке $\left[-\pi;\ \frac{5}{2}\pi\right]$ с прямыми $y = \frac{1}{2}$ и $y = -\frac{1}{3}$, построив их в одной системе координат. Получаем семь точек пересечения, значит, исходное уравнение имеет на заданном промежутке семь корней.

Ответ: 7.

Пример 2. Найти все корни уравнения

$$\sin^3 \pi x \cos \pi x - \sin \pi x \cos^3 \pi x = \frac{1}{4},$$

принадлежащие промежутку (0; 1).

Решение. Раскладываем левую часть уравнения на множители и, применяя формулу синуса и косинуса двойного угла, получим:

$$\sin \pi x \cos \pi x(\sin^2 \pi x - \cos^2 \pi x) = \frac{1}{4},$$

$$-2 \sin 2\pi x \cos 2\pi x = 1,$$

$$\sin 4\pi x = -1,$$

откуда

$$4\pi x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in \boldsymbol{Z},$$

т. е.

$$x = -\frac{1}{8} + \frac{k}{2},\ k \in \boldsymbol{Z}.$$

По условию задачи корни должны принадлежать числовому промежутку (0; 1), значит, должно иметь место двойное неравенство

$$0 < \frac{k}{2} - \frac{1}{8} < 1,$$

откуда $0{,}25 < k < 2{,}25$. Следовательно, $k = 1$ либо $k = 2$, тогда $x = \frac{3}{8}$ либо $x = \frac{7}{8}$.

Ответ: $\frac{3}{8}; \frac{7}{8}$.

Пример 3. Решить уравнение $\operatorname{tg} x \operatorname{ctg} x + \cos 4x = 2$.

Решение. Данное уравнение равносильно системе:

$$\left(\begin{cases}\cos 4x = 1,\\ \sin x \neq 0,\\ \cos x \neq 0\end{cases}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{cases}x = \frac{\pi}{2}n,\ n \in \boldsymbol{Z},\\ x \neq \pi m,\ m \in \boldsymbol{Z},\\ x \neq \frac{\pi}{2} + \pi l,\ l \in \boldsymbol{Z}\end{cases}\right).$$

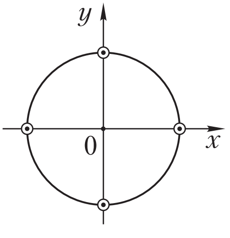


Рис. 16

Воспользуемся координатной окружностью (рис. 16), чтобы найти решение полученной системы. Очевидно, что данное уравнение не имеет корней.

Ответ: нет корней.

Пример 4. Решить уравнение

$$\sqrt{x}\sin x = 0.$$

Решение.

$$\left(\sqrt{x}\sin x = 0\right) \Leftrightarrow \left(\sqrt{x} = 0 \quad \text{или} \quad \begin{cases}x \geq 0,\\ \sin x = 0\end{cases}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x = 0 \quad \text{или} \quad x = \pi k \mid k \in \boldsymbol{Z}_0) \Leftrightarrow (x = \pi k \mid k \in \boldsymbol{Z}_0),$$

где $\boldsymbol{Z}_0$ — множество всех неотрицательных чисел.

Ответ: $\pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}_0$.

Пример 5. Решить уравнение $\sqrt{25-4x^2}\,(3\sin 2\pi x + 8\sin \pi x) = 0.$

Решение. Исходное уравнение равносильно следующей совокупности:

$$\left[\begin{array}{l} 25-4x^2 = 0, \\ \begin{cases} 3\sin 2\pi x + 8\sin \pi x = 0, \\ 25-4x^2 \ge 0. \end{cases} \end{array}\right.$$

Решив уравнение $25-4x^2 = 0$, получим: $x_1 = -2{,}5$ и $x_2 = 2{,}5$.

Найдем корни уравнения $3\sin 2\pi x + 8\sin \pi x = 0$ при условии, что $-2{,}5 \le x \le 2{,}5$:

$$6\sin \pi x \cos \pi x + 8\sin \pi x = 0;$$

$$\sin \pi x\,(3\cos \pi x + 4) = 0.$$

1) $\sin \pi x = 0, \pi x = \pi k\ (k \in \boldsymbol{Z})$, откуда $x = k\ (k \in \boldsymbol{Z})$. Но $-2{,}5 \le x \le 2{,}5$. Значит, $x_3 = 0$; $x_{4,5} = \pm 1$; $x_{6,7} = \pm 2$;

2) $3\cos \pi x + 4 = 0$, откуда $\cos \pi x = -\dfrac{4}{3}$. Уравнение корней не имеет, так как $|\cos x| \le 1$.

Ответ: –2,5; –2; –1; 0; 1; 2; 2,5.

Полезно помнить, что произведение $f_1(x)\cdot f_2(x)\cdot \ldots \cdot f_n(x)$ равно нулю тогда и только тогда, когда хотя бы один из его множителей равен нулю, а остальные при этом имеют смысл.

Пример 6. Решить уравнение

$$\frac{\cos x + \sin 2x}{\cos 3x} = 1.$$

Решение. Исходное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} \cos x + \sin 2x = \cos 3x, & (1) \\ \cos 3x \ne 0. & (2) \end{cases}$$

Решим уравнение (1):

$$(\cos x - \cos 3x) + \sin 2x = 0,$$

$$2\sin 2x \sin x + \sin 2x = 0,$$

$$\sin 2x\,(2\sin x + 1) = 0,$$

откуда:

а) $\sin 2x = 0, x = \frac{\pi n}{2}, n \in \boldsymbol{Z}$;

б) $2\sin x + 1 = 0, \sin x = -\frac{1}{2}, x = (-1)^{n+1}\frac{\pi}{6} + \pi n, n \in \boldsymbol{Z}$,

$\cos 3x \neq 0$, откуда $x \neq \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3}m, m \in \boldsymbol{Z}$.

Из найденных множеств решений уравнения (1) отберем те значения x, которые удовлетворяют условию (2).

Для этого воспользуемся координатной окружностью (рис. 17). Отметим на ней точками все значения x, при которых $\cos 3x \neq 0$. Очевидно, что корнями данного уравнения являются числа $x = \pi l$, где $l \in \boldsymbol{Z}$.

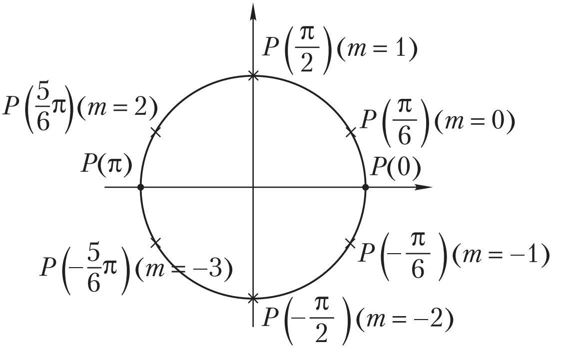


Рис. 17

Ответ: $\pi l, l \in \boldsymbol{Z}$.

Пример 7. Решить уравнение

$$\cos\frac{3x}{4} + \cos 2x = 2.$$

Поскольку $\cos\frac{3x}{4} \leq 1, \cos 2x \leq 1$, то уравнение равносильно системе уравнений:

$$\left(\begin{cases}\cos\frac{3x}{4} = 1,\\ \cos 2x = 1\end{cases}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{cases}\frac{3x}{4} = 2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z},\\ 2x = 2\pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}\end{cases}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{cases}x = \frac{8\pi n}{3},\ n \in \boldsymbol{Z},\\ x = \pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}\end{cases}\right).$$

Надо найти общие корни этих двух серий корней, т. е. пересечение двух множеств корней. Общие корни получаются из условия

$$\frac{8\pi n}{3} = \pi k.$$

Решаем это уравнение на множестве $\boldsymbol{Z}$. Оно равносильно уравнению $8n = 3k$, $n \in \boldsymbol{Z}$, $k \in \boldsymbol{Z}$, откуда $n = 3m$, $k = 8m$, $m \in \boldsymbol{Z}$. Значит, общие корни $x = \pi k = 8\pi m$, $m \in \boldsymbol{Z}$.

Ответ: $8\pi m$, $m \in \boldsymbol{Z}$.

Практическая часть

Приобретение умений и навыков по данной теме важно для вступительных экзаменов. Попробуйте решать первое уравнение из каждого задания. Если в процессе решения задач появляются ошибки, то тогда постарайтесь решить правильно второе уравнение из задания и т. д. Другими словами, сами определите количество решаемых уравнений по данной теме. Если возникли проблемы, обращайтесь еще раз к входной информации, помощи товарища или учителя.

Задание 1. Найдите количество корней уравнения:

а) $3\cos^2 x - 10\cos x + 3 = 0$ на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2};\ 2\pi\right]$;

б) $2\sin^2 x - 3\sin x - 1 = 0$ на отрезке $[-\pi; 2\pi]$;

в) $\operatorname{tg}^2 x + 4\operatorname{tg} x - 21 = 0$ на отрезке $\left[\frac{\pi}{6};\ \frac{5}{2}\pi\right]$.

Задание 2. Найдите все решения уравнения, удовлетворяющие заданному неравенству:

а) $\operatorname{tg}\left(2x - \frac{\pi}{8}\right) = \sqrt{3}$, $4\pi < x < \frac{5\pi}{2}$;

б) $\cos\left(\frac{x}{4} - 1\right) = 0{,}5$, $-6\pi < x < -\frac{5\pi}{2}$;

в) $\sin x + \cos^2 x = \frac{1}{4}$, $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$;

г) $\sin^5 x - 5\sin x = 0$, $-\frac{\pi}{2} < x < \pi$.

Задание 3. Найдите корни уравнения, удовлетворяющие условию:

а) $\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$, $180° < x < 270°$;

б) $\sqrt{3}(\cos x-\sin 3x)=\cos 3x-\sin x$, $0° \le x \le 20°$;

в) $\sin^2 2x=3\cos^2 x-\sin^2(x+\pi)$, $-\pi < x < \pi$;

г) $\sin^4 x-\cos^4 x=\frac{1}{2}$, $0° < x < 90°$;

д) $3\cos^2 x-\sin 2x-\sin^2 x=0$, $0° < x < 90°$;

е) $\sin\pi x+\cos\pi x=\sqrt{2}$, $-1 \le x \le 1$.

Задание 4. Решите уравнение:

а) $\sin 3x+\cos 3x\,\mathrm{tg}\,x=0$;

б) $\cos 3x+\sin 3x\,\mathrm{tg}\,x=0$;

в) $(\cos 6x-1)\,\mathrm{ctg}\,3x=\sin 3x$;

г) $\mathrm{tg}\,x\sqrt{1+\sin^2 x}+\sqrt{1+\sin^2 x}=\sqrt{2}(\mathrm{tg}\,x+1)$;

д) $\mathrm{ctg}\,x\sqrt{2+\cos x}+\sqrt{2+\cos x}=\mathrm{ctg}\,x+1$.

Задание 5. Решите уравнение:

а) $\sqrt{x-2}\,\sin\pi x=0$; б) $\sqrt{7-x}\,\mathrm{ctg}\,2x=0$;

в) $\sqrt{2+x+x^2}\left(2\cos\pi x-\sqrt{2}\right)=0$.

Задание 6. Решите уравнение:

а) $\sqrt{49-4x^2}\left(\sin\pi x+3\cos\frac{\pi x}{2}\right)=0$;

б) $\sqrt{16-x^2}\,(\sin 2x-3\cos x)=0$;

в) $\sqrt{4\pi^2-x^2}\,(2\cos^2 x-5\cos x+2)=0$.

Задание 7. Решите уравнение:

а) $\sin\left(\frac{3}{2}\pi\cos x\right)=-\frac{1}{2}$;

б) $\operatorname{ctg}\left(-\frac{3}{2}\pi+\frac{\pi\sqrt{3}}{9}\cos x\right)=-\frac{1}{\sqrt{3}}$;

в) $\operatorname{tg}(4\sin x)=\sqrt{3}, \frac{\pi}{2}<x<\frac{3\pi}{2}$.

Задание 8. Решите уравнение:

а) $\sin 5x+\sin x=2+\cos^2 x$;

б) $3\sin^2\frac{x}{3}+5\sin^2 x=8$;

в) $2\sin\left(\frac{2}{3}x-\frac{\pi}{6}\right)-3\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)=5$;

г) $(\sin x+\sqrt{3}\cos x)\sin 3x=2$;

д) $\sin x+\cos x=\sqrt{2}+\sin^4 4x$;

е) $\cos^2 x+\cos^2 2x+\cos^2 3x=3$;

ж) $3\cos 8x+7\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=10$.

Задание 9. Решите уравнение и в ответе укажите число корней на указанном промежутке:

а) $2\cos^2 x+5\sin x=5$, $[0; 16]$;

б) $\sin^2 3x-\cos(180°-x)+\cos^2 3x+\sin\left(90°+\frac{x}{2}\right)=0$, $[0°; 270°]$;

в) $\cos^2 2x+\cos^2 6x=1, \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$;

г) $\cos(x+70°)\cos(x+10°)=\sin 30°$, $[-10°; 170°]$;

д) $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3}+x\right)+\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{6}-x\right)=\frac{4}{\sqrt{3}}$, $[0; \pi]$;

е) $1+\sin x=2\cos x+\sin 2x, [-\pi; 2\pi]$;

ж) $\frac{\cos x+\sin 2x}{\cos 3x}=1$, $[0; 2\pi]$.

Задание 10. Укажите сумму корней уравнения, принадлежащих указанному промежутку (в ответе запишите их сумму в градусах):

а) $\cos 8x - 4\sin 6x - \cos 4x = 0, \left[\frac{\pi}{2}; \frac{5\pi}{4}\right]$;

б) $\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 2x - \operatorname{tg} 3x = 0, [0; \pi]$;

в) $\cos^3 x - \cos x = \sin 2x, [45°; 360°]$;

г) $\sin x + \cos 2x = 1 + \sin x \cos 2x, (30°; 180°]$;

д) $5\sin 2x + \sqrt{75}\cos 2x = 10, [0; 2\pi]$;

е) $\sin^4 x + \cos 4x = 1 + 12\cos^4 x, \left[-\frac{\pi}{2}; \pi\right]$;

ж) $\sin x \operatorname{tg} x + \sin x - \operatorname{tg} x = 1, [-90°; 360°]$.

Задание 11. Найдите все корни уравнения, принадлежащие указанному отрезку (в ответе укажите их количество):

а) $4(\sin 6x + \sin 4x) = \cos x(4\sin^2 5x - 5), \left[\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right]$;

б) $5(\sin x - \sin 3x) = \sin x\left(2\cos^2 2x - \sqrt{3}\cos 2x - 2\sqrt{3}\right), \left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$;

в) $|8\sin x + 5| + |8\sin x + 7| = 4, [\pi; 2\pi]$;

г) $|2\operatorname{tg} x - 5| - |2\operatorname{tg} x - 1| = 2, \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$;

д) $|\cos x - \sin x| = \frac{\sqrt{3}}{2}, [-\pi; 0]$;

е) $\left|\sqrt{3}\sin x - \cos x\right| = 1, [0; \pi]$;

ж) $4\cos x \cos 3x \sin 4x = \sin 6x, \left[\pi; \frac{3\pi}{2}\right]$;

з) $4\cos x \cos 2x \sin 3x = \sin 2x, \left[\pi; \frac{3\pi}{2}\right]$;

и) $\sin 4x + 2\sqrt{3}\cos^2 x = 0, \left[-\frac{\pi}{2}; \pi\right]$;

к) $2\cos^2 2x + \sqrt{3}\sin 4x = 2, \left[-\pi; \frac{\pi}{3}\right]$.

Задание 12. Найдите корень уравнения, принадлежащий указанному отрезку (ответ укажите в градусах):

а) $\sqrt{2\cos^2 x - \frac{\sqrt{3}}{2}} = \sqrt{(\sqrt{3}-1)\cos x}, [0; \pi]$;

б) $\sqrt{(2-\sqrt{3})\sin x} = \sqrt{2\sin^2 x - \sqrt{3}}, \left[\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{2}\right]$;

в) $\sqrt{\sin x} = \sqrt{1 - 2\sin^2 x}, \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$;

г) $2\sqrt{\sin x} = \sqrt{3 - 4\sin^2 x}, \left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$.

Задание 13. Решите уравнение:

а) $\frac{\sin 3x - 2\sin x}{\cos 3x} = \sqrt{3}\,\mathrm{tg}^2 x$;

б) $\frac{\sin x - \cos x}{4x - \pi} = 0$;

в) $\frac{\cos 2x - \sin x}{\pi^2 + 8\pi x + 12x^2} = 0$;

г) $\frac{1 - 5\sin \pi x + 2\cos^2 \pi x}{6x^2 + x - 5} = 0$;

д) $\frac{\sin x + \sin 3x}{\cos x + \cos 3x} = 0$;

е) $\frac{\sin 2x}{1 + \sin x} = -2\cos x$;

ж) $\frac{\sin 4x}{\sin 6x} = 1$;

з) $\cos 7x - \sqrt{3}\sin 7x = -\sqrt{2}, \frac{2}{5}\pi < x < \frac{6}{7}\pi$;

и) $\cos 7x + \cos^2 2x = \sin^2 2x - \cos x, |x| < 2$.

Задание 14. Решите уравнение:

а) $\frac{2 - 2\sin^2 x - \cos x}{6x^2 + 5\pi x + \pi^2} = 0$;

б) $\frac{\sin^2 x + \sin x}{1 + \cos x} = 0$;

в) $\sqrt{\cos 2x}\cos x = 0$;

г) $\sqrt{2\cos x + \sin 2x} = \sqrt{5\sin x + 4\sin\ 2x}$.

Ваш помощник

К заданию 1. а) Три корня; б) четыре корня; в) пять корней.

К заданию 3. а) 240°; б) 15°; г) 60°; д) 45°.

К заданию 4. а) $\frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z},\ \pi m,\ m \in \boldsymbol{Z}$.

К заданию 5. а) $n,\ n \in \mathbf{N}$ и $n \neq 1$.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОЗАИКА

Из истории возникновения тригонометрии

Изобретение способа измерения углов в градусах относится к III—II тысячелетиям до н. э. За единицу измерения был принят угол, равный $\frac{1}{360}$ части длины окружности. Эту единицу назвали одним дуговым градусом, а центральный угол, опирающийся на такую дугу, назвали одним угловым градусом.

Шестидесятеричное градусное измерение, как и шестидесятеричная система счисления, проникло далеко за пределы Ассирии и Вавилона и получило широкое распространение в странах Азии, Северной Африки и Западной Европы. Оно применялось, в частности, в астрономии и тригонометрии.

Древнегреческие ученые не знали современных обозначений тригонометрических функций, вместо синуса они пользовались хордой, равной удвоенной линии синуса половинной дуги. Греческое слово «хорде», от которого происходит термин «хорда», означает «тетива лука». Первые таблицы хорд дошли до нас в книге Птолемея «Альмагест» (II в. н. э.). Индийцы, заимствовавшие греческую хорду, перевели это слово санскритским словом «джива», также означавшим «тетива». В арабском языке было близкое по звучанию слово «джайб», означавшее «пазуха, выпуклость». Европейские переводчики перевели его латинским словом *sinus*, имеющим то же значение.

Кроме линий синуса *DB* и косинуса *OD* (рис. 18) индийские астрономы ввели еще одну величину: обращенный синус (XII в.) — *sinus versus* — *DA* — разность между радиусом окружности и ее косинусом. В современной символике это записывается так:

$$sinversus = 1 - \cos\alpha.$$

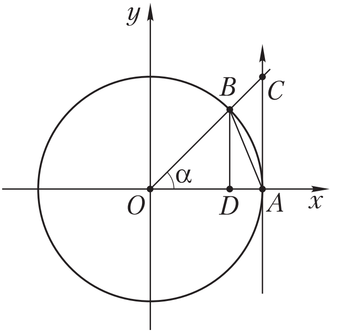


Рис. 18

В трактате индийского математика Ариабхата в 499 г. упоминаются функции синус, косинус и синусверсус. Они рассматривались только для острого угла, и их вычисления сводились к рассмотрению лишь прямоугольных треугольников.

Новые тригонометрические функции, которыми мы пользуемся и сейчас, были введены учеными стран Среднего и Ближнего Востока в IX—X вв. Понятия «тангенс» и «котангенс», как и первые таблицы этих новых тригонометрических величин, родились из учения о солнечных часах (гномоники). Солнечные часы представляли собой шест, вертикально воткнутый в землю. Время отсчитывалось по длине и направлению тени, отбрасываемой шестом. Циферблатом служила площадка с колышками, вбитыми в землю. Ахмед ал-Марвази, уроженец г. Мерва, названный ал-Хабаш ал-Хасиб, т. е. «Вычислитель», кроме этих понятий ввел еще и понятие «секанс».

Арабский астроном и математик аль-Баттани (858—929) в трактате «Усовершенствование Альмагеста» рассматривает уже все шесть тригонометрических величин: синус, косинус, тангенс, котангенс, секанс и косеканс, хотя они и назывались несколько иначе. Термины «котангенс», «косеканс», образованные по аналогии с термином «косинус», встречаются впервые в 1620 г. у английского ученого Эдмунда Гунтера.

В Европе первым трудом, в котором тригонометрия рассматривалась как самостоятельная ветвь математики, была работа немецкого астронома и математика Региомонтана (псевдоним Иоганна Мюллера, 1436—1476) «Пять книг о треугольниках всех видов», написанная в 1462—1466 гг. В ней автор систематизировал и изложил все известные к этому времени знания по тригонометрии.

Наиболее значительные исследования по тригонометрии связаны с именами Насирэддина Туси (1201—1274), Джона Валлиса (1616—1703), Джеймса Грегори (1638—1675), Исаака Барроу (1630—1677), Роджера Котеса (1682—1716), Исаака Ньютона (1643—1727), Леонарда Эйлера (1707—1783).

Интересно знать

В разные годы для обозначения тригонометрических функций использовались различные символы. Р. Норвунд (1660) обозначал: синус — *S*; тангенс — *t*; секанс — *sec*; косинус — *SC* или *CS*; котангенс — *Ct* или *tC*.

Д. Валлис (1684) обозначал: синус — *S*; косинус — $\sum$; тангенс — *T*; котангенс — τ. Например, соотношение $\sin\alpha = \sqrt{R^2 \cos^2 \alpha}$ Валлис записывал так:

$$S = V : R^2 - \sum{}^2.$$

Современную символику и близкое к современному изложение тригонометрии дал гениальный математик Л. Эйлер во второй половине XVIII в.

Арифметические ребусы

1. Расшифруйте, какая цифра скрывается за каждой буквой:

$$\begin{array}{r} \text{СИНУС} \\ +\quad \text{СИНУС} \\ \underline{\text{КОСИНУС}} \\ \text{ТАНГЕНС} \end{array}$$

2. Расшифруйте равенства:

$$\text{tg} \cdot \text{tg} = \text{ctg};$$

$$\sin \cdot \sin = \arcsin.$$

Где ошибка?

Пусть $0 < \alpha < \pi$, и, следовательно, $0 < \frac{\alpha}{2} < \frac{\pi}{2}$.

Имеем:

$$\sin\left(\pi + \frac{\alpha}{2}\right) < \sin\frac{\alpha}{2} \text{ и } \cos\left(\pi + \frac{\alpha}{2}\right) < \cos\frac{\alpha}{2}.$$

Почленно перемножая, получим:

$$\sin\left(\pi + \frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\pi + \frac{\alpha}{2}\right) < \sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}$$

или

$$\frac{1}{2}\sin(2\pi + \alpha) < \frac{1}{2}\sin\alpha,$$

откуда

$$\sin(2\pi + \alpha) < \sin\alpha.$$

Из полученного неравенства следует, что 2π не является периодом функции $y = \sin\alpha$.

Содержание

Модуль 4. ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ